ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

40

BERLIN
MAYER & MÜLLER
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.
1916

PARIS
A. HERMANN & FILS.
6 RUE DE LA SORBONNE.

UPPSALA 1916

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

REDACTION

INHALTSVERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 40. — 1916. — TOME 40.

Einem von verschiedenen Seiten dargelegten Wunsche gemäss und anlässlich der obwaltenden Weltlage hat S. M. der König Gustaf V beschlossen, dass die Einreichungsfrist für diejenigen Arbeiten, welche zur Konkurrenz um den von S. M. gestifteten mathematischen Preis angemeldet werden, vom 31. Oktober 1915 bis zum 31. Oktober 1916 hinausgeschoben wird.

G. Mittag-Leffler.

Conformément au souhait exprimé de différents côtés et vu la situation générale actuelle, S. M. le Roi Gustave V a décidé que le délai fixé pour la remise des travaux qui sont présentés en vue de concourir pour le prix de mathématiques fondé par S. M. sera prolongé du 31 octobre 1915 au 31 octobre 1916.

G. Mittag-Leffler.

Der Unterzeichnete Herausgeber dieser Zeitschrift erlaubt sich, den gelehrten Gesellschaften, mathematischen Vereinigungen und Gruppen, sowie den einzelnen Mathematikern in Deutschland, Dänemark, England, Finnland, Frankreich, Holland, Italien, Norwegen, Oesterreich, Portugal, Russland, Schweden, der Schweiz und in Ungarn seinen tiefgefühlten Dank auszusprechen für die Glückwünsche, mit denen sie ihn anlässlich seines 70. Geburtstages am 16. März dieses Jahres beehrt haben.

Zugleich möchte ich meinen aufrichtigen Dank aussprechen für die freundlichen Beweise der Anerkennung, die diese Zeitschrift für ihre vergangenen und noch zu erhoffenden Leistungen von allen Seiten gefunden hat. So weit es in meiner Macht steht, werde ich alles tun, um der Zeitschrift auch in Zukunft ihren streng wissenschaftlichen, von jeder anderen Erwägung unabhängigen Charakter zu wahren, den sie sich seit ihrer Begründung zum obersten Grundsatz gemacht hat.

Djursholm im April 1916.

G. Mittag-Leffler.

Le soussigné, rédacteur en chef de cette revue, présente ici l'expression de sa profonde reconnaissance aux sociétés savantes, aux associations, aux groupes de mathématiciens et aux mathématiciens d'Allemagne, d'Angleterre, d'Autriche, du Danemark, de Finlande, de France, de Hollande, de Hongrie, d'Italie, de Norvège, de Portugal, de Russie, de Suède et de Suisse qui ont bien voulu l'honorer de leurs vœux, à l'occasion du 70e anniversaire de sa naissance, le 16 mars dernier.

Pour les appréciations favorables dont cette revue aussi, son passé et son avenir, ont été l'objet à cette occasion, je tiens à dire également toute ma gratitude. Je ferai tout ce qui dépendra de moi pour que la revue continue de remplir la tâche strictement scientifique, étrangère à toute autre préoccupation, qu'elle s'est proposée dès sa fondation.

Djursholm, avril 1916.

G. Mittag-Leffler.

G. & S. MITTAG-LEFFLER

TESTAMENT 16/3 1916.

Auszug aus dem Testament, errichtet und unterschrieben von

G. MITTAG-LEFFLER und SIGNE MITTAG-LEFFLER, geb. AF LINDFORS

den 16. März 1916.

Hiermit erklären wir, unter Änderung des zwischen uns am 6. Januar 1883 errichteten Testamentes, dass unser letzter Wille ist, dass nach unserer beider Tod all unser zurückgelassenes Eigentum einer Stiftung zufällt, die den Namen tragen soll:

Mathematische Stiftung der Ehegatten Mittag-Leffler.

Die Aufgabe der Stiftung soll sein, innerhalb der vier nordischen Länder Schweden, Dänemark, Finnland und Norwegen und besonders in Schweden für die Zukunft die Stellung aufrecht zu erhalten und weiter auszubauen, die die *reine* Mathematik in diesen Ländern jetzt einnimmt und dadurch zugleich dem Beitrag dieser Länder zum höchsten Gedankenleben Achtung und gerechte Einschätzung ausserhalb der Grenzen des Nordens zu erwerben.

Extrait du testament dressé et signé le 16 mars 1916 par

G. MITTAG-LEFFLER et SIGNE MITTAG-LEFFLER, née AF LINDFORS.

Nous soussignés, modifiant le testament mutuel dressé entre nous le 6 janvier 1883, déclarons ici notre dernière volonté, qui est de léguer tous nos biens, pour lui revenir après notre mort à tous deux, à une fondation qui prendra le nom de:

Institut mathématique des époux Mittag-Leffler.

Cet institut aura pour tâche de conserver aux mathématiques *pures* et de développer encore, dans les quatre pays scandinaves, Suède, Danemark, Finlande et Norvège, mais tout particulièrement en Suède, la position qu'elles y occupent aujourd'hui, comme aussi de faire connaître et estimer à sa juste valeur, en dehors de leurs frontières, l'apport de ces pays dans la sphère la plus haute de la vie de l'esprit.

Besonders wird bestimmt, dass bei der Lösung dieser Aufgabe keine Rücksichten über die oben angegebenen hinaus oder neben ihnen gelten dürfen. Hieraus folgt, dass niemand auf persönliche Freundschaftsverhältnisse oder auf den Wunsch dem einen oder anderen in einer bedrängten Lage ökonomische Hilfe zu bringen Rücksicht nehmen darf. Keine Rücksicht darf auf praktische Bedürfnisse oder Wünsche, auf Examensverhältnisse, politische Meinungen oder Gesichtspunkte genommen werden, die in Bezug auf andere Wissenschaftszweige, als auf die *reine* Mathematik, geltend gemacht werden können.

Die Stiftung hat ihre Aufgabe zu erfüllen:

1.) Durch gewissenhafte Pflege, Aufrechterhaltung und Weiterentwicklung meiner, G. Mittag-Lefflers, mathematischen Bibliothek mit allem, was dazu an Manuskripten, Briefen, Portraits, Familiensammlungen, Familienerinnerungen u. a. gehört.

Die Bibliothek soll weiterhin in der grossen Steinvilla auf unserem Eigentum im Quartier 16, Midgård, Djursholm, aufbewahrt werden und darf keiner anderen Bibliothek einverleibt werden. Die Villa ist als Bibliothekslokal erbaut und eingerichtet und enthält daher mehrere Arbeitsräume, die dazu bestimmt sind, dass Forscher in ungestörter Ruhe die Sammlungen der Bibliothek benutzen können. Der kleinere Teil der Villa, der gegenwärtig als Wohnung eingerichtet ist, soll nach unsrem Tode auch der Bibliothek zur Verfügung gestellt werden.

Nous prescrivons expressément, dans l'accomplissement de cette tâche, toute considération autre que celles qui viennent d'être indiquées. Il ne devra être tenu compte, par conséquent, ni des relations personnelles d'amitié, ni du désir de prêter à qui que ce soit, dans des circonstances difficiles, un appui pécuniaire. Il ne devra pas être tenu compte davantage de vœux ou de besoins pratiques, de questions d'examen, des opinions politiques, ou de considérations qui pourraient être tirées de sciences autres que les mathématiques *pures*.

L'Institut s'acquittera de sa tâche:

1.) En vouant des soins attentifs à l'entretien et à l'enrichissement de la bibliothèque mathématique du soussigné G. Mittag-Leffler, avec tout ce qui y appartient en fait de manuscrits, de portraits, de collections de famille, de souvenirs de famille et d'autres objets.

La bibliothèque continuera d'être déposée dans la grande villa de pierre, sise dans notre propriété du quartier № 16, dit Midgård, à Djursholm, et ne devra être incorporée à aucune autre collection de livres. La villa a été édifiée et aménagée en vue de servir de local à la bibliothèque et contient, à cet effet, plusieurs chambres de travail où les chercheurs pourront utiliser en toute tranquillité les ressources de la bibliothèque.

La partie peu considérable de la villa servant actuellement de logement sera, après notre mort, également affectée à la bibliothèque.

Die Bibliothek soll allen Mathematikern zugänglich sein, aber um Missbrauch zu verhindern erst nach Erlaubnis durch den Vertreter der Direktion oder den Vorstand der Stiftung. Bücher dürfen nicht ausgeliehen, sondern nur innerhalb der Bibliothekslokale benutzt werden.

La bibliothèque sera ouverte à tous les mathématiciens, mais, pour éviter des abus, sur autorisation du président du comité directeur ou du directeur de l'Institut. Les livres ne pourront pas être emportés au dehors et ne devront être utilisés que dans les locaux de la bibliothèque.

2.) Durch Stipendien für Studien innerhalb oder ausserhalb des Landes für junge Männer und Frauen aus den oben genannten vier Ländern, die wirkliche Begabung für Forschung und Entdeckungen innerhalb der *reinen* Mathematik zeigen.

2.) En accordant des bourses, pour des études dans leur pays ou hors de leur pays, à des jeunes gens des deux sexes appartenant aux quatre pays susnommés et ayant fait preuve d'aptitudes réelles pour les recherches et les découvertes dans le domaine des mathématiques *pures*.

Ausserdem sollen Arbeiten von Verfassern aus diesen vier Ländern, die für mehr als von gewöhnlicher Bedeutung angesehen werden, durch eine Goldmedaille von derselben Grösse und dem gleichen Goldgehalt, wie die kleinere Nobeldenkmünze, ausgezeichnet werden, sowie, solange die Möglichheit besteht, durch eine möglichst vollständige Serie der Acta Mathematica in gediegenen Bänden, auf denen der Name des Ausgezeichneten angegeben sein soll.

En outre, les ouvrages d'une importance jugée supérieure à la moyenne, ayant pour auteurs des ressortissants de ces quatre pays, pourront faire l'objet d'une distinction, qui consistera en une médaille d'or, du même module et du même titre que la petite médaille Nobel et, tant que des exemplaires s'en trouveront disponibles, en une série aussi complète que possible des Acta Mathematica, dont les volumes, munis d'une belle reliure, porteront le nom de l'auteur couronné.

3.) Durch Austeilung von Preisen für wirkliche Entdeckungen auf dem Gebiet der *reinen* Mathematik. Bei der Verteilung dieses Preises darf keine Rücksicht auf die Nationalität des Entdeckers genommen werden. Er mag angehören welchem Land er will und dem Bürger

3.) En décernant des prix pour les découvertes réellement dignes de ce nom dans le domaine des mathématiques *pures*. Ces prix devront être donnés sans égard à la nationalité du lauréat. Celui-ci pourra appartenir à n'importe quel pays, et les ressortissants des quatre pays scan-

der oben genannten nordischen Länder darf hier kein Vortritt gelassen werden. Der Preis soll nur ausgeteilt werden, wenn eine solche Entdeckung vorliegt, die neue Gedanken von einer Tragweite enthält, dass man der Ansicht sein kann, die Wissenschaft nimmt von ihr ausgehend eine neue Entwicklung. Als wünschenswert muss jedoch gelten, dass die Preisausteilung wenigstens einmal innerhalb von 6 Jahren stattfindet. Der Preis soll dann aus einer künstlerisch ausgeführten, grösseren Goldmedaille bestehen, auf der der Name des Preisträgers angegeben ist, sowie aus einer künstlerisch ausgeführten Adresse, in der der Grund der Preisausteilung wissenschaftlich motiviert wird, ferner aus einer möglichst vollständigen Sammlung der Acta Mathematica, in schönen, soliden Bänden, auf denen der Name des Preisgekrönten angegeben ist. Der Preisträger wird eingeladen, sich persönlich in Djursholm einzufinden und hier den Preis entgegenzunehmen. Er erhält dabei eine für jeden besondern Fall passende Reisevergütung. Der Preis wird bei einer im Bibliothekssaal schön angeordneten Feierlichkeit überreicht.

4.) Wenn die jährlichen Einkommen der Stiftung den unten angegebenen Betrag überschreiten, sollen ausser dem Vorstand noch andere bezahlte Angestellter eingesetzt werden, die den Auftrag haben, eine rein wissenschaftliche Schriftsteller- und Lehrertätigkeit auf dem Gebiete der *reinen* Mathematik auszuüben.

dinaves ne jouiront, sur ce point, d'aucun privilège. Le prix ne devra être décerné que pour une découverte apportant des idées neuves d'une portée telle que la science en reçoive une nouvelle impulsion. Il est désirable, toutefois que le prix puisse être décerné une fois au moins tous les six ans. Ce prix consistera en une médaille d'or grand module artistement exécutée, et en un diplôme d'un caractère également artistique, motivant scientifiquement l'attribution du prix, enfin en une série aussi complète que possible des Acta Mathematica, dont les volumes, munis d'une solide et belle reliure, porteront le nom du lauréat. Celui-ci sera invité à se rendre personnellement à Djursholm, afin d'y recevoir le prix. Il touchera, à cet effet, une indemnité de voyage convenable, dont le montant sera fixé chaque fois. Le prix lui sera remis au cours d'une cérémonie solennelle organisée dans la grande salle de la bibliothèque.

4.) Lorsque les revenus annuels de l'Institut dépasseront le montant ci-dessous indiqué, il pourra être créé, outre le poste de directeur, d'autres emplois rétribués, dont les titulaires auront pour tâche d'exercer une activité de plume et d'enseignement exclusivement scientifique, dans le domaine des mathématiques *pures*.

Ausserdem wird bestimmt:

A. Die Direktion der Stiftung soll aus den schwedischen Mitgliedern der ersten Klasse (für reine Mathematik) der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Stockholm sowie zu ihren Lebzeiten aus Professor Ivar Fredholm und Professor N. E. Nörlund bestehen. Mitglied der Direktion ist ausserdem der unten genannte Vorstand der Stiftung. Die Direktion kann sich auch für längere oder kürzere Zeit wirklich bedeutende, schwedische Mathematiker adjungieren, die ganz die Auffassung teilen, die für uns die leitende war, aber noch nicht der ersten Klasse der Wissenschaftsakademie angehören. Auch können solche Mathematiker aus den übrigen drei nordischen Ländern adjungiert werden.

B. Sobald es geschehen kann, soll zum wissenschaftlichen Leiter und Vorstand der Stiftung ein Mathematiker von hohem Rang ernannt werden, der für eine solche Stellung am besten die Vorbedingungen zu erfüllen scheint und dessen Lebensaufgabe ganz und gar ins Gebiet der wissenschaftlichen Forschung fällt sowie im übrigen in der Arbeit für die Durchführung der Aufgabe der Stiftung besteht. Er soll dann Ratgeber und Helfer für alle der Wissenschaft Befliessenen sein, die bei der Stiftung Studien zu betreiben wünschen. Dabei mag er, wenn es mit Vorteil geschehen kann, aber immer nur zu rein wissenschaftlichen Zwecken, vor

Aux dispositions qui précèdent, s'ajoutent les suivantes:

A. Le Comité directeur de l'Institut se composera des membres suédois de la première classe (mathématiques pures) de l'Académie Royale des Sciences, ainsi que, pendant leur vie, de MM. les Professeurs Ivar Fredholm et N. E. Nörlund. Sera, en outre, de droit membre du Comité, le Directeur ci-dessous nommé. Le Comité pourra s'adjoindre aussi, pour une période plus ou moins longue, tel mathématicien suédois, réellement éminent, qui partagerait entièrement les idées qui nous ont dirigés mais n'appartiendrait pas encore à la première classe de l'Académie des sciences. Pourra également être adjoint au Comité un mathématicien appartenant à l'un des trois autres pays scandinaves et remplissant les mêmes conditions.

B. Dès que faire se pourra, il sera fait appel, pour occuper le poste de directeur scientifique et d'administrateur de l'Institut, à un mathématicien, d'un rang éminent, paraissant particulièrement qualifié pour cette charge, et dont l'activité devra s'exercer entièrement dans les limites de ses recherches scientifiques personnelles et tendre, en même temps, au but poursuivi par l'Institut. Il devra, par suite, assister de ses conseils tous ceux qui voudront se livrer à des études scientifiques à l'Institut. Il devra également, lorsqu'il y aura avantage à le faire, mais toujours dans un but exclusivement scientifique, faire des cours pour un nom-

einer kleineren Zahl wirklich Begabter und Interessierter Vorlesungen halten.

Seine Gehaltsverhältnisse sollen so geregelt werden, dass er eine wirtschaftlich günstigere Stellung als irgend ein Lehrer der Mathematik an den Hochschulen der vier Länder einnimmt. Er soll in Djursholm in möglichster Nähe des Bibliothekhauses wohnen. Bevor nicht eine eigene Wohnung für ihn eingerichtet werden kann, erhält er die Miete ersetzt. Wir hoffen, dass Seine Majestät Der König, nach Vorschlag der Direktion, ihn zu ernennen geruhen wird.

— — — — — — — — —

bre limité d'auditeurs réellement doués et prenant un vivant intérêt à ses leçons.

Au point de vue matériel, il devra lui être fait une situation plus avantageuse que celle d'aucun professeur de mathématiques dans l'une des Universités des quatre pays scandinaves. Il devra être domicilié à Djursholm et, si possible, dans le voisinage immédiat de la bibliothèque. Une indemnité de logement lui sera allouée aussi longtemps qu'une habitation spéciale ne pourra pas être aménagée à son usage. Sa nomination aura lieu, sur présentation du Comité directeur, par Sa Majesté le Roi, si, comme nous osons l'espérer, Sa Majesté daigne y consentir.

— — — — — — — — — — — —

E. Mindestens alle 6 Jahre begeht die Stiftung ihre besondere Feier. Die Mathematiker der vier nordischen Länder werden persönlich eingeladen, daran teilzunehmen. Wir wagen darauf zu rechnen, dass sie alle, in Anbetracht der Bedeutung der Stiftung für diese Länder, dieser Einladung Folge leisten werden, falls nicht unüberwindliche Hindernisse vorliegen.

Es wäre wünschenswert, dass man den Tag der Feier so wählen würde, dass er mit einem der Tage der Zusammenkunft des Mathematikerkongresses der vier nordischen Länder in Stockholm zusammenfällt. Am Tag der Feier wird Rechenschaft über die Tätigkeit der Stiftung seit der letzten Feier abgelegt. Die Feier wird unter schönen und feierlichen Formen begangen, so dass die hohe Aufgabe

E. Tous les six ans au moins, l'Institut célèbrera sa séance solennelle. Les mathématiciens des quatre pays scandinaves recevront une invitation personnelle à y assister. Nous osons croire que, eu égard à l'importance de l'Institut pour ces pays, et à moins d'empêchement majeur, tous tiendront à se rendre à cette invitation.

Il serait désirable que le jour de la cérémonie fût choisi de manière à coïncider avec la date de la réunion à Stockholm du congrès des mathématiciens scandinaves. A cette occasion, il sera donné communication d'un rapport sur l'activité de l'Institut depuis la précédente séance solennelle. La cérémonie devra revêtir un caractère de solennité qui mette en pleine lumière la mission

der mathematischen Wissenschaft und zugleich auch das Ziel, das der Tätigkeit der Stiftung gesteckt ist, in klares Licht tritt.

Zuletzt möchte ich, G. Mittag-Leffler, noch erwähnt haben, dass das Vorbild, dessen Grundzüge mir für meine und meiner Frau Stiftung vorgeschwebt hat, das Institut Pasteur in Paris ist. Dieses Institut scheint mir besser als irgend eine Universität oder Akademie der Neuzeit die Aufgabe gelöst zu haben, ganz und ausschliesslich ein Sitz wissenschaftlicher Forschung zu sein. Die Universität hat überall neben ihrer wissenschaftlichen Tätigkeit eine andere, nämlich Lehrer oder Beamte auszubilden und diese verschiebt dann oft und in hohem Grade die rein wissenschaftliche. Die Akademien wiederum, die früher am besten von allen die rein wissenschaftliche Aufgabe erfüllten, leiden darunter, dass ihre Mitglieder in der Regel ihre eigentliche Tätigkeit ausserhalb der Akademie ausüben und auch, wenn das ausnahmsweise nicht der Fall ist, darunter, dass der Ansporn zu stets lebendiger, wissenschaftlicher Forschung fehlt, der der Verpflichtung andere Forscher anzuleiten und zu stützen so wesentlich innewohnt. Unsere Stiftung ist nicht an einen Arbeitsplatz gebunden, an dem Experimental-Untersuchungen betrieben werden können, aber statt dessen, entsprechend den Bedürfnissen der reinen Mathematik, an eine sehr reichhaltige Fachbibliothek.

Bei gutem Willen bietet unser Land genügend Möglichkeit naturwissenschaft-

élevée des sciences mathématiques ainsi que le but assigné à l'activité de l'Institut.

En terminant, je soussigné, G. Mittag-Leffler, tiens à déclarer que le modèle que j'ai eu devant les yeux, pour l'Institut fondé par ma femme et par moi, est l'Institut Pasteur à Paris. Mieux qu'aucune université et qu'aucune académie actuelle, en effet, cet Institut me paraît avoir rempli la mission d'un établissement appelé à être exclusivement un foyer de recherches scientifiques. Les universités ont partout, à côté de leur tâche scientifique, celle — qui nuit souvent et singulièrement à la première — de former des maîtres et des fonctionnaires. Quant aux académies, qui répondaient le mieux jadis aux exigences purement scientifiques, elles souffrent de deux inconvénients: d'une part, l'activité propre de leurs membres s'exerce, en général, hors de leur sein, et d'autre part, même dans les cas exceptionnels où il en est autrement, il leur manque le stimulant que le savant trouve, pour ses investigations, dans l'obligation de guider ou d'assister d'autres chercheurs. Notre Institut n'est pas rattaché à un établissement où des recherches expérimentales pourraient être poursuivies, mais par contre, — ce qui est conforme aux besoins des mathémathiques pures — à une bibliothèque spéciale d'une grande richesse.

Avec de la bonne volonté, on trouvera dans notre pays de suffisantes possibili-

liche Institute nach dem Plan einzurichten, der unserer Stiftung zu Grunde liegt. Für reine Mathematik, für ihre Bedeutung und Aufgabe besteht, ausser bei Fachmännern, wenig Verständnis und ich, G. Mittag-Leffler, habe daher immer danach gestrebt, eine Stiftung zustande zu bringen wie die, die wir durch dieses Testament ins Leben gerufen zu haben hoffen.

Unser Testament ist aus der lebendigen Überzeugung heraus entstanden, dass ein Volk, das das mathematische Denken nicht hochschätzt, nie die höchsten Kulturaufgaben erfüllen und jenes Ansehen unter den Völkern geniessen kann, das auf die Dauer auch wirksam dazu beiträgt, seine Stellung nach aussen hin aufrecht zu erhalten und sein Recht ein eigenes Leben zu leben zu behaupten.

— — — — — — — — — — — —

Schliesslich folgen Vorschriften darüber, dass die Stiftung unmittelbar nach dem Tode G. Mittag-Lefflers in Wirksamkeit tritt, unter gewissen Vorbehalten für Frau Signe Mittag-Leffler während ihrer Lebenszeit, ausserdem Bestimmungen über die Verwaltung des Vermögens, kleinere Lebensrenten und andere Unterstützungen.

tés pour la création et l'organisation d'instituts pour les sciences naturelles, tandis que bien peu de gens, en dehors des spécialistes, comprennent l'importance et la mission des mathématiques pures. C'est la raison pour laquelle le soussigné, G. Mittag-Leffler, a toujours désiré pouvoir fonder un institut comme celui que nous espérons avoir établi par ce testament.

Notre testament doit son origine à la vivante conviction qu'un peuple qui n'accorde pas aux mathématiques un rang élevé dans son estime, ne sera jamais en état de remplir les plus hautes tâches civilisatrices et de jouir, pair suite, de la considération internationale qui, elle aussi, constitue à la longue un moyen efficace de conserver notre situation dans le monde et de sauvegarder notre droit à vivre notre propre vie.

— — — — — — — — — — — —

Le testament contient finalement des prescriptions en vertu desquelles l'Institut doit entrer en activité dès la mort de G. Mittag-Leffler, sous réserve de certains avantages dont la jouissance viagère est assurée à Madame Signe Mittag-Leffler, et, de plus, des dispositions relatives à l'administration des biens, à quelques petites rentes viagères et autres allocations.

INTEGRATION DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

$\Delta_2 u = k e^u$

AUF GESCHLOSSENEN FLÄCHEN.

Methode der unendlichvielen Variabeln.

VON

LEON LICHTENSTEIN

in BERLIN.

Es se T eine beliebige geschlossene, singularitätenfreie, analytische Fläche. In der Theorie der automorphen Funktionen spielt bekanntlich die folgende Aufgabe eine Rolle. Es ist eine auf T, ausser in einer endlichen Anzahl vorgegebener Punkte, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung $\Delta_2 u = k e^u$ zu bestimmen, die in jenen Ausnahmepunkten vorgeschriebene logarithmische Unstetigkeiten hat. Unter $\Delta_2 u$ wird der zweite BELTRAMI'sche Differentialparameter der Fläche, unter k eine auf T erklärte positive, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion verstanden. Man kann übrigens der Betrachtung eine zu einer beliebigen algebraischen Funktion gehörige RIEMANN'sche Fläche zugrunde legen. Alsdann lautet die Differentialgleichung einfacher $\Delta u = k e^u$; der gesuchten Lösung sind dann auch in den unendlich fernen Punkten bestimmte logarithmische Unstetigkeiten vorzuschreiben. In der zuletzt genannten Form ist denn auch diese Aufgabe im Jahre 1890 von Herrn H. A. SCHWARZ gestellt worden.[1]

In seinen berühmten Abhandlungen über die Methode der successiven Approximationen hat sich Herr PICARD als erster mit diesem Gegenstande be-

[1] Göttinger Nachrichten, 1890, S. 216.

schäftigt.[1] Herr Picard löst das erste Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta u = k e^u$ für hinreichend kleine Gebiete durch sukzessive Approximationen, geht dann zu beliebigen Gebieten nach dem alternierenden Verfahren über, um endlich durch gürtelförmige Verschmelzung zu geschlossenen Flächen zu gelangen. Die Verhältnisse liegen hierbei wesentlich anders als in den klassischen Fällen des Herrn H. A. Schwarz, so dass bei der Durchführung der Methode besondere Hilfsmittel angewandt werden mussten.

Es seien $(x_1, y_1), \ldots (x_{m_1}, y_{m_1})$ beliebige im Endlichen gelegene Punkte der m_2-blättrigen Riemann'schen Fläche F. Es wird der Einfachheit halber vorausgesetzt, dass weder die Punkte (x_i, y_i), noch die unendlich fernen Punkte von F zugleich Windungspunkte sind.

Herr Picard bestimmt diejenige in F, ausser in den Punkten (x_i, y_i) und den unendlich fernen Punkten, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = k e^u$, die sich in (x_i, y_i) wie

$$\alpha_i \log R_i + \text{beschränkte Funktion}, \quad R_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2, \; \alpha_i > -2,$$

in den unendlich fernen Punkten wie

$$-\delta_i \log R + \text{beschränkte Funktion}, \quad R^2 = x^2 + y^2, \quad \delta_i > 2$$

verhält. Es wird dabei

$$\sum \alpha_i + \sum \delta_i < 0$$

vorausgesetzt.

Ein anderes, von den alternierenden Methoden unabhängiges Verfahren ist später von Poincaré unter Zugrundelegung einer geschlossenen Fläche im Raume angegeben worden.[2] Poincaré führt überdies singuläre Punkte (p_i', q_i') ein, in deren Umgebung die gesuchte Lösung sich wie

$$-2 \log r_i' - 2 \log |\log r_i'| + \text{beschränkte Funktion}, \quad r_i'^2 = (p - p_i')^2 + (q - q_i')^2$$

[1] Vgl. E. Picard, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, Journal de Math. 1890, S. 145—210, *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles*, Journal de Math. 1893, S. 217—271 sowie namentlich die beiden Arbeiten, *Sur l'équation $\Delta u = e^u$*, Journal de Math. 1898, S. 313—316, *De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de* Riemann *fermée*, Journal für Math. 1905, S. 243—258.

[2] Vgl. H. Poincaré, *Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$*, Journal de Math. 1898, S. 137—230.

verhält. Diesen singulären Punkten kommt bei der Anwendung auf automorphe Funktionen eine besondere Bedeutung zu. Sie sind, wie es scheint, der PICARD'schen Methode nicht zugänglich.

In der vorliegenden Abhandlung wird die Aufgabe auf ein Problem der Variationsrechnung zurückgeführt und unter Benutzung des in einer vor kurzem erschienenen Arbeit[1] dargelegten, auf dem Gebrauch der unendlichvielen Variabeln beruhenden Gedankenganges erledigt. Wir legen unseren Betrachtungen eine geschlossene Fläche im Raume und logarithmische Unstetigkeiten sowohl des PICARD'schen als auch des POINCARÉ'schen Typus zugrunde. Am Schluss werden die Modifikationen, welche die Benutzung einer ebenen RIEMANN'schen Fläche bedingt, kurz besprochen. Der Existenzbeweis gelingt, was an dieser Stelle besonders hervorgehoben werden mag, ohne dass man genötigt ist, zu den schärferen Hilfsmitteln der neueren Analysis, wie dem LEBESGUE'schen Integralbegriff, dem FISCHER—RIESZ'schen Satze u. s. w. Zuflucht zu nehmen. Auch von dem Auswahlprinzip wird kein Gebrauch gemacht.[2]

§ 1. Problemstellung.

Es sei T eine beliebige analytische, singularitätenfreie, geschlossene Fläche, deren Punkte auf irgendein System isothermischer GAUSS'scher Parameter p und q bezogen sind.[3] Das Linienelement der Fläche sei

$$ds^2 = \varrho\,(dp^2 + dq^2). \tag{1}$$

Die beiden BELTRAMI'schen Differentialparameter der Fläche sind alsdann

$$\Delta_1 u = \frac{1}{\varrho}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2\right], \qquad \Delta_2 u = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right]. \tag{2}$$

[1] Vgl. L. LICHTENSTEIN, *Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung. Methode der unendlichvielen Variabeln*, Journal für Math., B. 145, 1914, S. 24—85.

[2] Die Ergebnisse dieser Arbeit habe ich in der Note, *Intégration de l'équation $\Delta_2 u = ke^u$ sur une surface fermée*, Comptes rendus, B. 157, 1913, S. 1508—1511 zusammengefasst.

[3] In bekannter Weise hat man sich hierbei die Fläche T in eine endliche Anzahl übereinandergreifender, einfach zusammenhängender Flächenstücke $T_1, T_2, \ldots, T_l$ geteilt zu denken. Bildet man $T_i (i = 1, \ldots l)$ einzeln auf einen Teil einer Ebene konform ab, so erhält man l Systeme isothermischer Parameter, die zusammengenommen unser System (p, q) darstellen. Den Punkten, die mehreren Teilgebieten zugleich angehören, entsprechen mehrere Wertepaare (p, q). Welcher dieser Wertepaare der Betrachtung zugrunde gelegt wird, ist wegen der bekannten Invarianzeigenschaften der BELTRAMI'schen Differentialparameter gleichgültig.

Es seien (p_i, q_i) $(i = 1, \ldots m)$, (p'_i, q'_i) $(i = 1, \ldots m')$ beliebig vorgegebene Punkte der Fläche, $k(p, q)$ eine positive, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion:

$$k(p, q) \geqq k_0 > 0. \tag{3}$$

Wir stellen uns die Aufgabe, *diejenige auf T, ausser in den Punkten (p_i, q_i), (p'_i, q'_i), nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u(p, q)$ der Differentialgleichung*

$$\Delta_2 u = k e^u \tag{4}$$

zu bestimmen, die sich in der Umgebung jener Punkte entsprechend wie

$$\alpha_i \log r_i, \quad r_i^2 = (p - p_i)^2 + (q - q_i)^2, \quad \alpha_i > -2, \tag{5}$$

$$-2 \log r'_i - 2 \log |\log r'_i|, \quad r'^2_i = (p - p'_i)^2 + (q - q'_i)^2 \tag{6}$$

verhält. Die entsprechend in der Umgebung der Punkte (p_i, q_i), (p'_i, q'_i) erklärten Ausdrücke

$$u - \alpha_i \log r_i, \quad u + 2 \log r'_i + 2 \log |\log r'_i| \tag{7}$$

sollen beschränkt sein. Es wird endlich

$$\sum_i^{1 \ldots m} \alpha_i - 2m' < 0 \tag{8}$$

vorausgesetzt.

§ 2. Hilfssätze und vorbereitende Betrachtungen.

Es sei τ der Flächeninhalt des Gebietes T und $G(p_0, q_0; p, q)$ diejenige, ausser im Punkte (p_0, q_0), nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta_2 G = \frac{2\pi}{\tau}, \tag{9}$$

die sich in der Umgebung des Punktes (p_0, q_0) wie

$$-\frac{1}{2} \log [(p - p_0)^2 + (q - q_0)^2] + \text{stetige Funktion} \tag{10}$$

verhält und überdies der Beziehung

$$(11) \qquad \iint\limits_T G(p_0, q_0;\ p, q)\, d\omega = 0$$

genügt, unter $d\omega$ das Flächenelement verstanden.

Bekanntlich ist

$$(12) \qquad G(p', q';\ p'', q'') = G(p'', q'';\ p', q').$$

Es sei $h(p, q)$ eine auf T, ausser in den Punkten (p_i, q_i), (p_i', q_i'), nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion, die sich in der Umgebung jener Punkte entsprechend wie

$$r_i^{a_i} \gamma_i(p, q), \quad r_i'^{-2} |\log r_i'|^{-2} \gamma_i'(p, q),$$

unter γ_i, γ_i' beschränkte Funktionen verstanden, verhält. Betrachten wir das Doppelintegral

$$(13) \qquad \bar{u}(p_0, q_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_T G(p_0, q_0;\ p, q)\, h(p, q)\, d\omega.$$

Nach bekannten Sätzen ist $\bar{u}(p_0, q_0)$ eine auf T, ausser höchstens in den Punkten (p_i', q_i'), stetige Funktion. Ausser höchstens in den Punkten (p_i, q_i) und (p_i', q_i'), hat $\bar{u}(p_0, q_0)$ auf T stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Es sei (p_0, q_0) irgendein von diesen Punkten verschiedener Punkt der Fläche. Wir beschreiben auf T eine geschlossene, doppelpunktlose, stetig gekrümmte Kurve C_*, so dass durch diese (p_0, q_0) von den vorhin ausgeschlossenen Punkten getrennt wird. Dasjenige der beiden Gebiete, in die T durch C_* geteilt wird, welches (p_0, q_0) enthält, sei mit T_* bezeichnet. In T_* kann man, sofern, was wir voraussetzen wollen, C_* hinreichend nahe an (p_0, q_0) liegt,

$$G(p_0, q_0;\ p, q) = G(p, q;\ p_0, q_0) = \log \frac{1}{r_0} + G'(p, q;\ p_0, q_0), \quad r_0^2 = (p - p_0)^2 + (q - q_0)^2$$

setzen. $G'(p, q;\ p_0, q_0)$ verhält sich, als Funktion von (p_0, q_0) betrachtet, für alle (p, q), (p_0, q_0) in T_* und auf C_* regulär und genügt der Differentialgleichung

$$\Delta_2 G' = \frac{2\pi}{T}.$$

Es ist nun

$$\bar{u}(p_0, q_0) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{T_*} h(p, q) \log\frac{1}{r_0}\, d\omega - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{T_*} G'(p_0, q_0;\ p, q)\, h(p, q)\, d\omega -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{T-T_*} G(p_0, q_0;\ p, q)\, h(p, q)\, d\omega = u_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3.$$

Nach bekannten Sätzen der Theorie des logarithmischen Potentials ist im Punkte (p_0, q_0) zunächst

$$\Delta_2 u_1 = h(p_0, q_0).$$

Man findet ferner

$$\Delta_2 u_2 = -\frac{1}{l}\iint\limits_{T_*} h(p, q)\, d\omega$$

und den bekannten Sätzen der Theorie uneigentlicher Integrale gemäss

$$\Delta_2 u_3 = -\frac{1}{l}\iint\limits_{T-T_*} h(p, q)\, d\omega,$$

somit

(14) $$\Delta_2 u = h(p_0, q_0) - \frac{1}{l}\iint\limits_{T} h(p, q)\, d\omega.$$

Ist insbesondere

$$\iint\limits_{T} h(p, q)\, d\omega = 0,$$

so erhält man einfacher

$$\Delta_2 u = h(p_0, q_0).$$

Es sei $\varphi_i(p, q)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ das normierte, orthogonale System derjenigen Lösungen der Differentialgleichung

(15) $$\Delta_2 u + \lambda u = 0,$$

die auf T sich nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung

stetig verhalten und von einer Konstanten verschieden sind; λ_i sei der zu $\varphi_i(p, q)$ gehörige Wert des Parameters λ. Es ist, wie man leicht findet,

$$(16) \qquad \varphi_i(p_0, q_0) = \frac{\lambda_i}{2\pi} \iint_T G(p_0, q_0; p, q)\, \varphi_i(p, q)\, d\omega, \qquad \iint_T \varphi_i(p, q)\, d\omega = 0\,.$$

Nach bekannten Sätzen sind alle λ_i positiv. Die unendliche Reihe

$$(17) \qquad \sum_i^{1..\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}$$

konvergiert. Die unendliche Reihe

$$(18) \qquad \sum_i^{1..\infty} \frac{[\varphi_i(p, q)]^2}{\lambda_i^2}$$

konvergiert unbedingt und gleichmässig. Jede in der Form

$$(19) \qquad \iint_T G(p_0, q_0; p, q)\, g(p, q)\, d\omega = f(p, q),$$

unter $g(p, q)$ eine auf T stetige Funktion verstanden, darstellbare Funktion $f(p, q)$ lässt sich in eine unbedingt und gleichmässig konvergierende Reihe

$$(20) \qquad f(p_0, q_0) = \sum_i^{1..\infty} \varphi_i(p_0, q_0) \iint_T f(p, q)\, \varphi_i(p, q)\, d\omega$$

entwickeln. Diese Entwicklung gilt wie die Darstellung (19) für alle nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung auf T stetigen, der Beziehung

$$(21) \qquad \iint_T f(p, q)\, d\omega = 0$$

genügenden Funktionen. Ist die Beziehung (21) nicht erfüllt, so ist

$$(22) \qquad f(p_0, q_0) = \frac{1}{F} \iint_T f(p, q)\, d\omega + \sum_i^{1..\infty} \varphi_i(p_0, q_0) \iint_T f(p, q)\, \varphi_i(p, q)\, d\omega$$

oder,

$$\varphi_0(p, q) = \frac{1}{r}, \tag{23}$$

gesetzt,

$$f(p_0, q_0) = \sum_i^{0..\infty} \varphi_i(p_0, q_0) \iint_T f(p, q)\, \varphi_i(p, q)\, d\omega. \tag{24}$$

Endlich ist

$$\iint_T \Delta_1 f\, d\omega = \sum_i^{1..\infty} \lambda_i \left[\iint_T f(p, q)\, \varphi_i(p, q)\, d\omega\right]^2. \tag{25}$$

Die Formel (25) lässt sich leicht aus der für jedes Paar auf T stetiger Funktionen f und g gültigen Beziehung

$$\iint_T f g\, d\omega = \frac{1}{r^2} \iint_T f\, d\omega \iint_T g\, d\omega + \sum_i^{1..\infty} \iint_T f \varphi_i\, d\omega \iint_T g \varphi_i\, d\omega \tag{26}$$

ableiten. In der Tat ist nach (26)

$$\iint_T \Delta_1 f\, d\omega = -\iint_T f \Delta_2 f\, d\omega = -\frac{1}{r^2} \iint_T f\, d\omega \iint_T \Delta_2 f\, d\omega - \sum_i^{1..\infty} \iint_T f \varphi_i\, d\omega \iint_T \Delta_2 f \varphi_i\, d\omega.$$

Nun ist aber

$$\iint_T \Delta_2 f\, d\omega = 0, \quad \iint_T \Delta_2 f \varphi_i\, d\omega = \iint_T f \Delta_2 \varphi_i\, d\omega = -\lambda_i \iint_T f \varphi_i\, d\omega,$$

daher wie behauptet

$$\iint_T \Delta_1 f\, d\omega = \sum_i^{1..\infty} \lambda_i \left(\iint_T f \varphi_i\, d\omega\right)^2.$$

Die Gleichung (26) gilt noch, wenn f und g in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig sind, sofern nur die Doppelintegrale $\iint_T f^2\, d\omega$, $\iint_T g^2\, d\omega$ existieren. Desgleichen gilt (25), wenn f auf T stetig ist, während die partiellen

Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig sind, sofern $\iint\limits_T \Delta_1 f\, d\omega$ existiert.

Der Beweis lässt sich ohne Schwierigkeit erbringen, indem man $f, \bar{g}, f$ durch geeignete singularitätenfreie Funktionen approximiert und die Formeln (25), (26) anwendet. Diese Formeln gelten übrigens unter beträchtlich allgemeineren Voraussetzungen. Doch genügen für unsere Zwecke die soeben betrachteten Spezialfälle vollständig.

§ 3. Hilfssätze und vorbereitende Betrachtungen (Fortsetzung).

Es sei $\gamma_0 > 1$ so gross gewählt, dass den Kreisen in der Ebene (p, q)

$$(p - p'_i)^2 + (q - q'_i)^2 = \frac{1}{\gamma_0'^2} \quad (i = 1, \ldots m')$$

auf T geschlossene, einander nicht treffende Kurven Γ_i entsprechen. Die von diesen begrenzten kreisförmigen Gebiete mögen $\Theta_i\,(i = 1, \ldots m')$ heissen. Es sei $w_0(p, q)$ irgendeine auf T, ausser in den Punkten (p'_i, q'_i), nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion, die in $\Theta_i\,(i = 1, \ldots m')$ den Wert

(27) $$w_0 = -\log\log\frac{1}{r'_i}$$

hat. Wie die unmittelbare Ausrechnung zeigt, ist in Θ_i

(28) $$\frac{\partial^2 w_0}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial q^2} = \frac{1}{r'^2_i(\log r'_i)^2}, \quad \Delta_2 w_0 = \frac{1}{\varrho\, r'^2_i(\log r'_i)^2}.$$

Man findet ferner

(29) $$\iint\limits_T \Delta_2 w_0\, d\omega = 0.$$

Es ist nämlich

(30) $$\iint\limits_T \Delta_2 w_0\, d\omega = \sum_i \iint\limits_{\Theta_i} + \iint\limits_{T - \sum\limits_i \Theta_i}.$$

Nach (27) ist

$$\iint\limits_{T-\sum_i \Theta_i} \Delta_2 w_0 \, d\omega = \sum_i \int\limits_{\Gamma_i} \frac{\partial w_0}{\partial n} ds = -\sum_i \int\limits_0^{2\pi} \frac{\gamma_0}{\log \gamma_0} \cdot \frac{1}{\gamma_0} d\theta = -\frac{2\pi m'}{\log \gamma_0}. \tag{31}$$

Aus (28) folgt ferner

$$\iint\limits_{\Theta_i} \Delta_2 w_0 \, d\omega = \int\limits_0^{\frac{1}{\gamma_0}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{r'_i \, dr'_i \, d\varphi}{r'^2_i (\log r'_i)^2} = -2\pi \left[\frac{1}{\log r'_i}\right]_0^{\frac{1}{\gamma_0}} = -2\pi \frac{1}{\log \frac{1}{\gamma_0}}. \tag{32}$$

Aus (30), (31) und (32) folgt endlich in der Tat die Beziehung (29). Es sei $\beta(p, q)$ eine auf T, ausser in den Punkten (p_i, q_i), (p'_i, q'_i), nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige positive Funktion. In den Gebieten Θ_i setzen wir

$$\beta(p, q) = \frac{2}{\varrho \, r'^2_i (\log r'_i)^2}. \tag{33}$$

In der Umgebung der übrigen singulären Punkte sollen die Ungleichheitsbeziehungen

$$0 < \lambda' < \beta \, r_i^{-\alpha_i} < \lambda'', \tag{34}$$

unter λ' und λ'' im übrigen beliebige feste Zahlwerte verstanden, bestehen.

Endlich soll

$$\iint\limits_T \beta \, d\omega = 2\pi \left[-\sum_i^{1..m} \alpha_i + 2m'\right] \tag{35}$$

sein.

Es sei

$$\beta_1(p, q) = \beta(p, q) - 2\Delta_2 w_0. \tag{36}$$

In $\Theta_i (i = 1, .. m')$ ist offenbar

$$\beta_1(p, q) = 0. \tag{37}$$

Sodann ist

$$\iint\limits_T \beta_1 \, d\omega = \iint\limits_T \beta \, d\omega - 2 \iint\limits_T \Delta_2 w_0 \, d\omega = \iint\limits_T \beta \, d\omega = 2\pi \left[-\sum_i^{1..m} \alpha_i + 2m'\right]. \tag{38}$$

Wir setzen jetzt

$$(39)\qquad v(p,q) = -\sum_i^{1..m} \alpha_i G(p_i, q_i; p, q) + 2\sum_i^{1..m'} G(p'_i, q'_i; p, q) +$$
$$+ 2 w_0(p,q) - \frac{1}{2\pi}\iint_T G(p,q;\bar p,\bar q)\,\beta_1(\bar p, q)\,d\bar\omega.$$

Das Doppelintegral

$$(40)\qquad I_0 = -\frac{1}{2\pi}\iint_T G(p,q;p,\bar q)\,\beta_1(\bar p,\bar q)\,d\bar\omega$$

ist auf T stetig und hat, ausser etwa in den Punkten (p_i, q_i), stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. In den ausgeschlossenen Punkten werden $\frac{\partial I_0}{\partial p}, \frac{\partial I_0}{\partial q}$ höchstens wie $\frac{1}{r_i^{1-\varepsilon}}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ unendlich. Den Betrachtungen des § 2 zufolge ist

$$(41)\qquad \Delta_2 I_0 = \beta_1 - \frac{1}{\tau}\iint_T \beta_1\,d\omega = \beta_1 - \frac{2\pi}{\tau}\left[-\sum_i^{1..m}\alpha_i + 2m'\right].$$

Die Funktion $v(p,q)$ ist in T, ausser in den Punkten (p_i, q_i), (p'_i, q'_i), nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig.

In diesen Punkten verhält sich $v(p,q)$ wie die gesuchte Lösung $u(p,q)$. Endlich ist

$$(42)\qquad \Delta_2 v = -\frac{2\pi}{\tau}\sum_i^{1..m}\alpha_i + \frac{4\pi m'}{\tau} + 2\Delta_2 w_0 + \beta_1 - \frac{2\pi}{\tau}\left[-\sum_i^{1..m}\alpha_i + 2m'\right] = \beta.$$

§ 4. Zurückführung auf ein Problem der Variationsrechnung und Bestimmung einer ausgezeichneten Folge von Vergleichsfunktionen.

Wir setzen, unter $u(p,q)$ wie in § 1 die gesuchte Lösung der Differentialgleichung (4) verstanden,

$$(43)\qquad u = v + U$$

und erhalten

$$(44)\qquad \Delta_2 U + \beta = k e^v e^U = K e^U.$$

Die Funktion K ist auf T, ausser etwa in den Punkten (p_i, q_i), (p'_i, q'_i), positiv und nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig.

In diesen Punkten verhält sich K entsprechend wie

$$r_i^{\alpha_i} \bar{\gamma}_i(p, q), \; r_i'^{-2} (\log r'_i)^{-2} \bar{\gamma}'_i(p, q),$$

unter γ_i und γ'_i positive beschränkte Funktionen verstanden.

In einer gewissen Umgebung eines jeden der Punkte (p_i, q_i), (p'_i, q'_i) gelten mithin die Ungleichheitsbeziehungen

$$(45) \qquad \begin{aligned} &0 < \lambda^{(3)} < K(p, q)\, r_i^{-\alpha_i} < \lambda^{(4)} && (i = 1, \ldots m), \\ &0 < \lambda^{(3)} < K(p, q)\, r_i'^2 (\log r_i')^2 < \lambda^{(4)} && (i = 1, \ldots m'), \end{aligned}$$

unter $\lambda^{(3)}$, $\lambda^{(4)}$ positive Konstante verstanden.

Aus (33), (34), (35) und (45) ergibt sich die für das folgende wesentliche Ungleichheit

$$(46) \qquad 0 < \lambda^{(5)} < \frac{\beta}{K} < \lambda^{(6)}.$$

Sie gilt für alle nicht singulären Punkte auf T; $\lambda^{(5)}$ und $\lambda^{(6)}$ sind positive Konstante.

Auf dieselbe Differentialgleichung (44) führt, zunächst rein formell betrachtet, das folgende Variationsproblem. *Unter allen auf T beschränkten, mit etwaiger Ausnahme der Punkte (p_i, q_i), (p'_i, q'_i), nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen Funktionen $U(p, q)$, deren* DIRICHLET'*sches Integral $\iint_T \Delta_1 U\, d\omega$ existiert, diejenige zu bestimmen, die das Integral*

$$(47) \qquad I = \iint_T [\Delta_1 U - 2\beta U + 2 K e^U]\, d\omega$$

zum Minimum macht.

Man überzeugt sich zunächst leicht, dass die Werte des Integrals I, wenn wir für U alle möglichen *auf T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen* Funktionen einsetzen, eine endliche untere Grenze d haben. In der Tat ist, unter a einen positiven Zahlwert verstanden, wie eine elementare Minimumsbetrachtung lehrt,

$$(48) \qquad \text{Min}\, [e^U - a U] = a(1 - \log a),$$

daher, ausser in den Punkten (p_i, q_i), (p'_i, q'_i),

$$(49) \qquad 2 K e^U - 2 \beta U = 2 K \left(e^U - \frac{\beta}{K} U\right) \geqq 2 \beta \left(1 - \log \frac{\beta}{K}\right) > 2 \beta (1 - \log \lambda^{(6)})$$

und

$$(50) \qquad \iint\limits_T [\Delta_1 U - 2 \beta U + 2 K e^U] d\omega > 2 (1 - \log \lambda^{(6)}) \iint\limits_T \beta d\omega = d'.$$

Zur wirklichen Bestimmung der unteren Grenze d kann man wie folgt vorgehen. Wir setzen

$$(51) \qquad t_n(p, q) = \frac{c_0}{\sqrt{\tau}} + \sum_i^{1..n} \frac{c_i \varphi_i(p, q)}{\sqrt{\lambda_i}},$$

unter $c_0, c_1, .. c_n$ zunächst noch unbestimmte Parameter verstanden. Es sei

$$(52) \qquad \iint\limits_T [\Delta_1 t_n - 2 \beta t_n + 2 K e^{t_n}] d\omega = Q(c_0, c_1, .. c_n) > d'.$$

Die Funktion $Q(c_0, c_1, .. c_n)$ ist stetig und hat nach (52) eine endliche untere Grenze d'_n. Da alle $Q(c_0, c_1, .. c_n)$ in $Q(c_0, c_1, .. c_{n+1})$ enthalten sind, ist gewiss

$$(53) \qquad d'_{n+1} \leqq d'_n.$$

Die Folge $d'_1 > d'_2 > d'_3 > \ldots$ hat (52) zufolge eine endliche untere Grenze d. Diese ist zugleich die untere Grenze des Integrals I.[1] Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es eine auf T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion

$$(54) \qquad t_*(p, q) = \frac{b_0}{\sqrt{\tau}} + \sum_i^{1..\infty} b_i \frac{\varphi_i(p, q)}{\sqrt{\lambda_i}},$$

so dass

$$(55) \qquad \iint\limits_T [\Delta_1 t_* - 2 \beta t_* + 2 K e^{t_*}] d\omega = \sum_i^{1..\infty} b_i^2 + \iint\limits_T [2 K e^{t_*} - 2 \beta t_*] d\omega < d$$

[1] Die im obigen zur Bestimmung von d benutzte Methode ist einem bekannten Verfahren von W. Ritz nachgebildet. Vgl. W. Ritz, »*Über eine neue Methode in der Variationsrechnung*«, Journal für Mathematik, B. 135, 1909, S. 1 u. ff.

wäre. Da die unendliche Reihe (54) gleichmässig konvergiert, könnte man μ so gross annehmen, dass

$$t_*^{(\mu)}(p, q) = \frac{b_0}{\sqrt{T}} + \sum_i^{1..\mu} b_i \frac{\varphi_i(p, q)}{\sqrt{\lambda_i}}$$

gesetzt, immer noch

$$\iint_T [\Delta_1 t_*^{(\mu)} - 2\beta t_*^{(\mu)} + 2K e^{t_*^{(\mu)}}] d\omega < d < d'_\mu$$

ausfiele. Dies wäre aber im Widerspruch mit der Tatsache, dass d'_μ die untere Grenze aller Werte $Q(c_0, .. c_\mu)$ ist.

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, .. \varepsilon_n, ..$ eine Folge positiver, gegen Null konvergierender Zahlen. Wir nehmen $(n + 1)$ Zahlen $z_{0n}, z_{1n}, .. z_{nn}$ der Ungleichheit

$$Q(z_{0n}, z_{1n}, .. z_{nn}) < d'_n + \varepsilon_n \tag{56}$$

gemäss, sonst aber willkürlich an und setzen

$$Q(z_{0n}, z_{1n}, .. z_{nn}) = d_n, \tag{57}$$

$$\frac{z_{0n}}{\sqrt{T}} + \sum_i^{1..n} \frac{z_{in}}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i(p, q) = Z_n(p, q). \tag{58}$$

Offenbar ist

$$\lim_{n=\infty} d_n = \lim_{n=\infty} \iint_T [\Delta_1 Z_n - 2\beta Z_n + 2K e^{Z_n}] d\omega = d. \tag{59}$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass man von der Folge $Z_n(p, q)$ zu einer anderen Folge von Vergleichsfunktionen $U_n(p, q)$ übergehen kann, die eine zu (59) analoge Beziehung erfüllen und *in ihrer Gesamtheit dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke liegen.*

Betrachten wir den Ausdruck

$$K e^Z - \beta Z = K\left(e^Z - \frac{\beta}{K} Z\right) = K F(Z).$$

Es ist

$$\frac{dF}{dZ} = e^Z - \frac{\beta}{K}.$$

daher

$$\frac{dF}{dZ} > 0 \text{ für } Z > \log\frac{\beta}{K},$$

$$\frac{dF}{dZ} < 0 \text{ für } Z < \log\frac{\beta}{K}.$$

Es sei H die grössere der beiden Zahlen

$$|\log\lambda^{(5)}|, \quad |\log\lambda^{(6)}|.$$

Dann ist gewiss

(60)
$$\frac{dF}{dZ} > 0 \text{ für } Z > H,$$
$$\frac{dF}{dZ} < 0 \text{ für } Z < -H,$$

daher

(61) $$Ke^Z - \beta Z > Ke^H - \beta H \text{ für } Z > H,$$

(62) $$Ke^Z - \beta Z > Ke^{-H} + \beta H \text{ für } Z < -H.$$

Betrachten wir jetzt die Vergleichsfunktion $Z_n(p, q)$. Ist auf T durchweg $Z_n(p, q) > H$, so setzen wir $U_n(p, q) = H$. Es ist dann

(63) $$\iint_T \Delta_1 U_n \, d\omega = 0$$

sowie nach (61)

(64) $$\iint_T (2Ke^{U_n} - 2\beta U_n)\,d\omega = \iint_T 2(Ke^H - \beta H)\,d\omega < \iint_T 2(Ke^{Z_n} - \beta Z_n)\,d\omega,$$

somit

(65) $$\iint_T [\Delta_1 U_n + 2Ke^{U_n} - 2\beta U_n]\,d\omega < d_n.$$

Es sei zweitens $Z_n(p, q)$ nicht durchweg $> H$. Ist dann etwa im Punkte (p', q')

$$Z_n(p, q) > H,$$

so gibt es gewiss ein von einer geschlossenen analytischen Kurve begrenztes, den Punkt (p', q') in seinem Innern enthaltendes Flächenstück T^0, so dass in T^0

$$Z_n(p, q) > H,$$

auf seinem Rande

$$Z_n(p, q) = H$$

ist. Ersetzt man in T^0 die Funktion $Z_n(p, q)$ durch H, so wird wie vorhin das Integral I verkleinert. Wäre $Z_n(p', q') < -H$, so hätte man in T^0 für $Z_n(p, q)$ den Wert $-H$ zu substituieren. Da Z_n regulär analytisch ist, ist die Anzahl der Gebiete T^0 jedenfalls endlich. In allen diesen Gebieten können wir Z_n durch H oder $-H$ ersetzen und erhalten eine stetige, abteilungsweise analytische Vergleichsfunktion, deren partielle Ableitungen erster Ordnung abteilungsweise stetig sind. Durch den bekannten Prozess der »Abrundung der Ecken« gelangt man sodann zu einer auf T regulär analytischen Funktion $U_n(p, q)$, die so beschaffen ist, dass

(66) $$|U_n(p, q)| \leq H,$$

(67) $$\iint\limits_T [\Delta_1 U_n - 2\beta U_n + 2Ke^{U_n}]\, d\omega < d_n$$

ist.

§ 5. Bestimmung einer speziellen Grenzfunktion.

Wir setzen

(68) $$U_n(p, q) = \frac{u_{0n}}{\sqrt{T}} + \sum_i^{1..\infty} \frac{u_{in}}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i(p, q),$$

(69) $$\iint\limits_T [\Delta_1 U_n - 2\beta U_n + 2Ke^{U_n}]\, d\omega = \delta_n.$$

Es ist

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = d,$$

ferner für alle n nach (66)

(70) $$\iint_T \Delta_1 U_n d\omega \leq \delta_n + 2H\iint_T \beta d\omega + 2e^H \iint_T K d\omega < d^* \quad (d^* = \text{Konstante}),$$

somit nach (25) und (68)

(71) $$\sum_i^{1..\infty} u_{in}^2 < d^*,$$

(72) $$|u_{in}| < \sqrt{d^*} \quad (i, n = 1, 2, ..).$$

Andererseits ist nach (66)

(73) $$|u_{0n}| = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left|\iint_T U_n(p, q)\, d\omega\right| \leq H\sqrt{\tau} \quad (n = 1, 2, ..).$$

Mit Hilfe des bekannten Diagonalverfahrens kann man aus $U_n(p, q)$ eine Teilfolge $V_n(p, q)$ $(n = 1, 2, ..)$:

(74) $$V_n(p, q) = \frac{v_{0n}}{\sqrt{\tau}} + \sum_i^{1..\infty} \frac{v_{in}}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i(p, q)$$

aussondern, so dass

(75) $$\lim_{n=\infty} v_{in} = v_i \quad (i = 0, 1, 2, ..)$$

existiert. Offenbar ist

(76) $$|V_n(p, q)| \leq H, \quad \sum_i^{1..\infty} v_{in}^2 < d^*, \quad |v_0| \leq H\sqrt{\tau}.$$

Es ist ferner für alle m

$$\sum_i^{1..m} v_{in}^2 < d^* \quad (n = 1, 2, ...),$$

daher

$$\sum_i^{1..m} v_i^2 \leq d^*$$

und

(77) $$\sum_i^{1..\infty} v_i^2 \leq d^*.$$

Wir setzen

(78) $$\iint\limits_T [\Delta_1 V_n - 2\beta V_n + 2Ke^{V_n}]\,d\omega = \delta'_n.$$

Dann ist

(79) $$\lim_{n=\infty} \delta'_n = d.$$

Betrachten wir jetzt das Doppelintegral

(80) $$I_1^{(n)} = \iint\limits_T G(p_0, q_0;\ p, q)\,K(p, q)\,e^{V_n(p,q)}\,d\omega$$

und beweisen, dass

$$\lim_{n=\infty} I_1^{(n)}$$

in jedem die Punkte (p'_i, q'_i) *nicht enthaltenden Teile des Gebietes* T *existiert und eine daselbst stetige Funktion darstellt.*

Wir schliessen die Punkte (p_i, q_i), (p'_i, q'_i) aus dem Gebiete T durch beliebige geschlossene, doppelpunktlose, einander weder schneidende noch berührende analytische Kurven C_i, C'_i aus. Die von diesen begrenzten kreisförmigen Gebiete seien mit T_i, T'_i bezeichnet. Ihre Flächeninhalte seien τ_i, τ'_i. Wir setzen zur Abkürzung $\sum T_i + \sum T'_i = T_0$. Es ist dann, wenn T^* ein beliebiges die Punkte (p'_i, q'_i) nicht enthaltendes Teilgebiet von T bezeichnet, für alle (p_0, q_0) in T^*

(81) $$I_1^{(n)} = \iint\limits_T G(p_0, q_0;\ p, q)\,K(p, q)\,e^{V_n(p,q)}\,d\omega = \iint\limits_{T_0} + \iint\limits_{T-T_0} = I_2^{(n)} + I_3^{(n)}.$$

Für alle n ist nach (76)

(82) $$|I_2^{(n)}| < e^H \iint\limits_{T_0} |G(p_0, q_0;\ p, q)|\,K(p, q)\,d\omega.$$

Man kann gewiss T_0 so klein wählen, dass für alle (p_0, q_0) in T^* und alle n

(83) $$|I_2^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

wird, unter ε einen beliebig kleinen positiven Wert verstanden.

Es ist ferner

$$(84)\qquad I_3^{(n+\nu)} - I_3^{(n)} = \iint\limits_{T-T_0} G(p_0, q_0;\ p, q)\, K(p, q) \frac{e^{V_{n+\nu}} - e^{V_n}}{V_{n+\nu} - V_n} (V_{n+\nu} - V_n)\, d\omega,$$

somit der SCHWARZ'schen Ungleichheit gemäss

$$(85)\qquad |I_3^{(n+\nu)} - I_3^{(n)}|^2 < \iint\limits_{T-T_0} [G(p_0, q_0;\ p, q)\, K(p, q)\, e^{V_n + \theta(p,q)(V_{n+\nu} - V_n)}]^2 d\omega \iint\limits_{T-T_0} [V_{n+\nu} - V_n]^2 d\omega,$$
$$0 < \theta(p, q) < 1$$

oder a fortiori, wenn man sich das an zweiter Stelle stehende Doppelintegral über T erstreckt denkt, nach (26)

$$(86)\qquad |I_3^{(n+\nu)} - I_3^{(n)}|^2 < e^{2H} \iint\limits_{T-T_0} [G(p_0, q_0;\ p, q)\, K(p, q)]^2 d\omega \left\{ \frac{1}{\tau} [v_{0,n+\nu} - v_{0,n}]^2 + \sum_i^{1..\infty} \frac{1}{\lambda_i} [v_{i,n+\nu} - v_{i,n}]^2 \right\}.$$

Ich behaupte, man kann nach erfolgter Wahl der Kurven C_i, C'_i den Index n so hoch annehmen, dass für alle ν und alle (p_0, q_0) in T^*

$$(87)\qquad |I_3^{(n+\nu)} - I_3^{(n)}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

wird.

Es sei etwa

$$(88)\qquad L = \text{Max}\ e^{2H} \iint\limits_{T-T_0} [G(p_0, q_0;\ p, q)\, K(p, q)]^2 d\omega$$

in T^*. Es ist nun

$$\sigma = \frac{1}{\tau}[v_{0,n+\nu} - v_{0,n}]^2 + \sum_i^{1..\infty} \frac{1}{\lambda_i}[v_{i,n+\nu} - v_{i,n}]^2 = \frac{1}{\tau}[v_{0,n+\nu} - v_{0,n}]^2 + \sum_i^{1..N} + \sum_{i>N} <$$

$$(89)\qquad < \frac{1}{\tau}[v_{0,n+\nu} - v_{0,n}]^2 + \sum_i^{1..N} + \frac{2}{\lambda_{N+1}} \sum_i^{1..\infty} [v_{i,n+\nu}^2 + v_{i,n}^2] < \frac{1}{\tau}[v_{0,n+\nu} - v_{0,n}]^2 + \sum_i^{1..N} \frac{1}{\lambda_i}[v_{i,n+\nu} - v_{i,n}]^2 + \frac{4d^*}{\lambda_{N+1}}.$$

Da

(90) $$\lim_{i=\infty} \frac{1}{\lambda_i} = 0$$

ist, kann man wegen (75) n gewiss so gross wählen, dass für alle r

$$|\sigma| < \frac{\varepsilon^2}{4L}$$

wird. Alsdann ist

(91) $$|I_3^{(n+r)} - I_3^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und nach (81) und (83) für alle (p_0, q_0) in T^*

(92) $$|I_1^{(n+r)} - I_1^{(n)}| < |I_2^{(n)}| + |I_2^{(n+r)}| + |I_3^{(n)} - I_3^{(n+r)}| < \varepsilon.$$

Also konvergiert $I_1^{(n)}$ für alle $(p_0\, q_0)$ in T^* gleichmässig gegen eine in T^* stetige Funktion.

Wir setzen

(93) $$W(p_0, q_0) = \frac{v_0}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{2\pi} \lim_{n=\infty} \iint_T G(p_0, q_0;\ p, q)[K(p, q)\, e^{V_n(p,q)} - \beta(p, q)]\, d\omega.$$

Die Funktion $W(p_0, q_0)$ ist in jedem (p'_i, q'_i) $(i = 1, .. m')$ nicht enthaltenden Teile des Gebietes T stetig. In der Umgebung der Punkte (p'_i, q'_i) lässt sich $W(p_0, q_0)$ in der Form $r_i'^{-\varepsilon} \times$ beschr. Funktion (ε = beliebig kleine positive Zahl) darstellen. Man findet dies, wenn man das Integral (93) in geeigneter Weise abschätzt.[1]

In ganz ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass die Grenzwerte

(94) $$\lim_{n=\infty} \iint_T \beta\, V_n\, d\omega,\ \lim_{n=\infty} \iint_T K\, e^{V_n}\, d\omega,\ \lim_{n=\infty} \iint_T K\, e^{V_n} \varphi_i\, d\omega \quad (i = 1, 2, ..)$$

existieren. Aus (78), (79) und (94) folgt sofort, dass auch

(95) $$\lim_{n=\infty} \iint_T \Delta_1 V_n\, d\omega = \lim_{n=\infty} \sum_i^{1..\infty} v_{in}^2$$

existiert.

[1] Beispiele für derartige Abschätzungen findet man bei Plemelj, *Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1904, S. 337—411, insb. S. 364.

Bestimmen wir jetzt die FOURIER'schen Koeffizienten der Funktion $W(p_0, q_0)$. Nach (11) ist zunächst, wie man leicht sieht,

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\iint\limits_T W(p_0, q_0)\, d\omega_0 = v_0. \tag{96}$$

Es ist ferner für $i \geq 1$

$$\iint\limits_T W(p_0, q_0)\,\varphi_i(p_0, q_0)\, d\omega_0 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{n=\infty}\iint\limits_T \varphi_i(p_0, q_0)\, d\omega_0\left[\iint\limits_T G(p_0, q_0;\ p, q)\{Ke^{V_n} - \beta\}\, d\omega\right] = \tag{97}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{n=\infty}\iint\limits_T (Ke^{V_n} - \beta)\, d\omega\left[\iint\limits_T G(p_0, q_0;\ p, q)\,\varphi_i(p_0, q_0)\, d\omega_0\right].$$

Die Vertauschung der Reihenfolge des Grenzüberganges und der Integration sowie derjenigen der beiden sukzessiven Integrationen ist nach bekannten Sätzen gestattet.[1] Man beachte, dass $I_1^{(n)}$ in T^* gleichmässig konvergiert und in der Umgebung eines jeden der Punkte (p'_i, q'_i) für alle n

$$|I_1^{(n)}| < \text{Const.}\; r_i'^{\,\varepsilon - 1}$$

ist, unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden.

Nach (16) ist mithin

$$\iint\limits_T W(p_0, q_0)\,\varphi_i(p_0, q_0)\, d\omega_0 = -\frac{1}{\lambda_i}\lim_{n=\infty}\iint\limits_T [Ke^{V_n} - \beta]\,\varphi_i\, d\omega. \tag{98}$$

§ 6. Beweis, dass die in § 5 bestimmte Funktion der Differentialgleichung (44) genügt.

Aus (78), (79) und (95) folgt

$$\lim_{n=\infty}\sum_i^{1..\infty} v_{in}^2 + \lim_{n=\infty}\iint\limits_T [2\,Ke^{V_n} - 2\beta V_n]\, d\omega = d. \tag{99}$$

[1] Vgl. z. B. PLEMELJ, a. a. O. S. 362.

Es sei ϱ_0 eine dem absoluten Betrage nach beliebig kleine Zahl und

$$(100)\qquad R_n(p,q) = V_n(p,q) + \varrho_0 \frac{\varphi_l(p,q)}{\sqrt{\lambda_l}} = \frac{v_{0n}}{\sqrt{T}} + \sum_i^{1..\infty} \frac{v_{in}}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i + \varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} \quad (l > 0).$$

Offenbar ist

$$(101)\qquad \iint_T [\Delta_1 R_n + 2 K e^{R_n} - 2\beta R_n] d\omega \geq d$$

oder anders geschrieben

$$(102)\qquad \sum_i^{1..\infty} v_{in}^2 + 2\varrho_0 v_{ln} + \varrho_0^2 v_{ln}^2 + \iint_T \left[2 K e^{\varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}}} e^{V_n} - 2\beta \left(V_n + \varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} \right) \right] d\omega \geq d.$$

Wie in § 5 lässt sich zeigen, dass

$$\lim_{n=\infty} \iint_T K e^{\varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}}} e^{V_n} d\omega$$

existiert. Also kann man in (102) zur Grenze $n = \infty$ übergehen. Man erhält

$$(103)\qquad \lim_{n=\infty} \sum_i^{1..\infty} v_{in}^2 + 2\varrho_0 v_l + \varrho_0^2 v_l^2 + \lim_{n=\infty} \iint_T \left[2 K e^{\varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}}} e^{V_n} - 2\beta \left(V_n + \varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} \right) \right] d\omega \geq d.$$

Aus (103) und (99) ergibt sich

$$(104)\qquad 2\varrho_0 v_l + \varrho_0^2 v_l^2 + \lim_{n=\infty} \iint_T \left[2 K e^{V_n} \left(e^{\varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}}} - 1 \right) - 2\beta \varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} \right] d\omega \geq 0$$

oder

$$(105)\qquad 2\varrho_0 v_l + \varrho_0^2 v_l^2 + \varrho_0 \lim_{n=\infty} \iint_T \left[2 K e^{V_n} \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} - 2\beta \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} \right] d\omega + \varrho_0^2 P(\varrho_0) \geq 0.$$

$P(\varrho_0)$ ist eine nur von ϱ_0 abhängige, für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen ϱ_0 dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Schranke gelegene Grösse. Man findet dies leicht, wenn man beachtet, dass die unendliche Reihe

$$e^{\varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}}} - 1 = \varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} + \frac{1}{2!}\left(\varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}}\right)^2 + \cdots$$

gleichmässig konvergiert und für alle n

$$|V_n| \leq H$$

ist.

Aus (105) folgt, da das Vorzeichen von ϱ_0 beliebig ist, in bekannter Weise

(106) $$v_l = -\lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \iint_T (Ke^{V_n} - \beta)\varphi_l d\omega \qquad (l = 1, 2, ..).$$

Es sei ferner

(107) $$Q_n(p, q) = V_n(p, q) + \frac{\varrho_0}{\sqrt{T}}.$$

Es ist dann

(108) $$\lim_{n=\infty} \sum_i^{1..\infty} v_{in}^2 + \lim_{n=\infty} \iint_T \left[2Ke^{V_n + \frac{\varrho_0}{\sqrt{T}}} - 2\beta\left(V_n + \frac{\varrho_0}{\sqrt{T}}\right)\right] d\omega \geq d.$$

Hieraus und aus (99) folgt wie vorhin

(109) $$\lim_{n=\infty} \iint_T K e^{V_n} d\omega = \iint_T \beta\, d\omega.$$

Aus (98) und (106) schliesst man, dass

(110) $$\iint_T W(p_0, q_0)\varphi_l(p_0, q_0)\, d\omega = \frac{v_l}{\sqrt{\lambda_l}} \qquad (l = 1, 2, ..)$$

ist. *Die Werte*

(111) $$v_0, \frac{v_l}{\sqrt{\lambda_l}} \qquad (l = 1, 2, ..)$$

sind nach (96) *und* (110) FOURIER'*sche Koeffizienten der auf T, ausser etwa in den Punkten* (p'_i, q'_i), *stetigen Funktion* $W(p_0, q_0)$. Da W, wie wir in § 5 gesehen haben, in der Umgebung der Punkte (p'_i, q'_i) höchstens wie $r'^{-\varepsilon}_i$ (ε beliebig klein > 0) unendlich wird, so ist das Doppelintegral $\iint_T W^2 d\omega$ gewiss vorhanden.

Nach (74) und (111) ist

$$(112)\qquad \iint\limits_T (W - V_n)^2 d\omega = \frac{1}{\tau}(v_0 - v_{0n})^2 + \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{(v_i - v_{in})^2}{\lambda_i}.$$

Hieraus folgt aber nach (75), (76) und (77) sofort

$$(113)\qquad \lim_{n=\infty} \iint\limits_T (W - V_n)^2 d\omega = 0.$$

Da für alle n

$$|V_n| \leq H$$

ist, so ist in allen Stetigkeitspunkten der Funktion W sicher

$$(114)\qquad |W| \leq H.$$

Wäre nämlich in einem Stetigkeitspunkte (p^*, q^*) auf T

$$(115)\qquad W(p^*, q^*) > H,$$

so gäbe es auch ein (p^*, q^*) enthaltendes Gebiet, in dem etwa

$$(116)\qquad W(p, q) - H \geq h_0 > 0$$

wäre. Es sei τ^* der Flächeninhalt dieses Gebietes. Dann würde aber für alle n gewiss

$$(117)\qquad \iint\limits_T (W - V_n)^2 d\omega > h_0^2 \tau^*,$$

sein, was nach (113) unmöglich ist.

Die Funktion $W(p, q)$ ist somit auf T *beschränkt* und, ausser höchstens in den Punkten (p'_i, q'_i), stetig.

Man überzeugt sich nunmehr leicht durch eine Betrachtung, die der in § 5 durchgeführten analog ist, dass

$$(118)\qquad \iint\limits_T K e^W d\omega = \lim_{n=\infty} \iint\limits_T K e^{V_n} d\omega, \qquad \iint\limits_T \beta e^W d\omega = \lim_{n=\infty} \iint\limits_T \beta e^{V_n} d\omega,$$

(119)
$$\iint_T (Ke^W - \beta)\varphi_l d\omega = \lim_{n=\infty} \iint_T (Ke^{V_n} - \beta)\varphi_l d\omega = -v\sqrt{\lambda_l} \qquad (l = 1, 2, ..),$$
$$\iint_T (Ke^W - \beta)\, d\omega = 0$$

ist. Es ist nämlich beispielsweise

(120)
$$D_n = \iint_T (Ke^W - \beta)\varphi_l d\omega - \iint_T (Ke^{V_n} - \beta)\varphi_l d\omega = \iint_{T-T_0} K \frac{e^W - e^{V_n}}{W - V_n}(W - V_n)\varphi_l d\omega +$$
$$+ \iint_{T_0} K(e^W - e^{V_n})\varphi_l d\omega = D'_n + D''_n,$$

(121)
$$|D'_n|^2 < \iint_{T-T_0} K^2 e^{2[V_n + \theta_1(p,q)(W - V_n)]} \varphi_l^2 d\omega \iint_{T-T_0} (W - V_n)^2 d\omega <$$
$$< e^{2H} \iint_{T-T_0} K^2 \varphi_l^2 d\omega \iint_T (W - V_n)^2 d\omega, \qquad 0 < \theta_1(p, q) < 1$$

und

(122)
$$|D''_n| < 2e^H \iint_{T_0} K|\varphi_l| d\omega.$$

Man kann nun gewiss den Flächeninhalt von T_0 so klein wählen, dass

$$|D''_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Hierauf wird n so gross, etwa $n > \bar{\lambda}$, angenommen, dass

$$|D'_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

ausfällt. Dies ist nach (113) ohne weiteres möglich. Man erhält so für alle $n > \bar{\lambda}$

(123)
$$|D_n| < \varepsilon, \text{ daher } \lim_{n=\infty} D_n = 0.$$

Es sei jetzt

(124) $$W^*(p_0, q_0) = \frac{v_0}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_T G(p_0, q_0;\, p, q)[K(p, q)\, e^{W(p,q)} - \beta(p, q)]\, d\omega.$$

Die Funktion $W^*(p_0, q_0)$ ist auf T, ausser in den Punkten (p'_i, q'_i), wo sie sich wie $r'^{-\varepsilon} \times$ beschr. Funktion (ε = einer beliebig kleinen positiven Zahl) verhält, stetig. Für die FOURIER'schen Koeffizienten von $W^*(p_0, q_0)$ finden wir in ähnlicher Weise wie vorhin die Werte

(125) $$\frac{1}{\sqrt{\tau}}\iint\limits_T W^*(p_0, q_0)\, d\omega = v_0,$$

(126) $$\iint\limits_T W^*(p_0, q_0)\, \varphi_l(p_0, q_0)\, d\omega = -\frac{1}{\lambda_l}\iint\limits_T (K e^W - \beta)\varphi_l\, d\omega = \frac{v_l}{\sqrt{\lambda_l}} \qquad (l = 1, 2, \ldots).$$

Die auf T, ausser höchstens in den Punkten (p'_i, q'_i), stetigen Funktionen $W(p_0, q_0)$ und $W^*(p_0, q_0)$ haben durchweg gleiche FOURIER'*sche Koeffizienten.*[1] Also ist, wie aus (26) leicht geschlossen werden kann, durchweg

(127) $$W(p_0, q_0) = W^*(p_0, q_0),$$

somit

(128) $$W(p_0, q_0) = \frac{v_0}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_T G(p_0, q_0;\, p, q)[K(p, q)\, e^{W(p,q)} - \beta(p, q)]\, d\omega.$$

Nach bekanten Sätzen (vergl. § 2) hat $W(p, q)$ auf T, ausser etwa in der Umgebung der Punkte (p_i, q_i) und (p'_i, q'_i), stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung und genügt der Differentialgleichung

(129) $$\Delta_2 W = K e^W - \beta - \frac{1}{\tau}\iint\limits_T (K e^W - \beta)\, d\omega.$$

Nach (119) ist daher

(130) $$\Delta_2 W + \beta = K e^W.$$

Die Funktion

(131) $$u = W + v$$

ist eine Lösung unseres Problems.

[1] Die Integrale $\iint\limits_T W^2 d\omega$ und $\iint\limits_T W^{*2} d\omega$ existieren.

§ 7. Eindeutigkeit der Lösung.

Wir nehmen jetzt zunächst $m' = 0$ an, setzen also voraus, dass nur Unstetigkeitspunkte (p_i, q_i) $(i = 1, .. m)$, in deren Umgebung die Lösung $u(p, q)$ sich wie $\alpha_i \log r_i$ $(\alpha_i > -2)$ verhält, vorliegen. Nach bekannten Sätzen sind, wenn $-1 < \alpha_i$ ist, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial p}$, $\frac{\partial W}{\partial q}$ in (p_i, q_i) stetig.

Ist $-2 < \alpha_i < -1$ oder $\alpha_i = -1$, so sind entsprechend die Ausdrücke

$$(132)\qquad \left\{\left|\frac{\partial W}{\partial p}\right| + \left|\frac{\partial W}{\partial q}\right|\right\} r_i^{-\alpha_i - 1} \quad \text{oder} \quad \left\{\left|\frac{\partial W}{\partial p}\right| + \left|\frac{\partial W}{\partial q}\right|\right\} |\log r_i|^{-1}$$

in der Umgebung des Punktes (p_i, q_i) beschränkt.[1]

Es soll jetzt bewiesen werden, dass *die vorhin gefundene Lösung unseres Problems eindeutig ist.* Genauer: es gibt keine von $u(p, q)$ verschiedene, ausser in den Punkten (p_i, q_i), nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u'(p, q)$ der Differentialgleichung (4), die sich in jenen Punkten entsprechend wie $\alpha_i \log r_i$ verhält, wenn überdies vorausgesetzt wird, dass die Funktionen

$$(133)\qquad u'(p, q) - \alpha_i \log r_i = W_i(p, q) \qquad (i = 1, .. m)$$

in der Umgebung der Punkte (p_i, q_i) $(i = 1, .. m)$ stetig sind und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial W_i}{\partial p}$, $\frac{\partial W_i}{\partial q}$ sich daselbst wie $\frac{\partial W}{\partial p}$, $\frac{\partial W}{\partial q}$ verhalten.

Es sei im Gegensatz zu unserer Behauptung $u'(p, q)$ von $u(p, q)$ verschieden. Wir setzen

$$(134)\qquad u(p, q) - u'(p, q) = u''(p, q).$$

$u''(p, q)$ genügt der Differentialgleichung

$$(135)\qquad \Delta_2 u'' = ke^{u'}(e^{u''} - 1) = K''(e^{u''} - 1).$$

In den Punkten (p_i, q_i) ist u'' stetig; die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u''}{\partial p}$, $\frac{\partial u''}{\partial q}$ verhalten sich daselbst wie $r_i^{1+\alpha_i}$, die, ausser höchstens in (p_i, q_i), positive Funktion K'' wie $r_i^{\alpha_i}$.[2] Genauer gesagt, es ist z. B. $K'' r_i^{-\alpha_i}$ in der Umgebung von (p_i, q_i) beschränkt.

Ist die stetige Funktion $u''(p, q)$ nicht identisch gleich Null, so muss sie auf T positives Maximum oder negatives Minimum oder auch beides annehmen.

---

[1] Vgl. die Fussnote auf S. 20.

[2] Wir setzen, um Vorstellungen zu fixieren, $-2 < \alpha_i < -1$ $(i = 1, \dots m)$ voraus.

Es möge etwa in (p^*, q^*) ein positives Maximum liegen und es sei (p^*, q^*) zunächst von $(p_i, q_i)\,(i = 1, \ldots m)$ verschieden. Alsdann ist

$$(136)\qquad \begin{aligned} K''(p^*, q^*)\,(e^{u''(p^*, q^*)} - 1) > 0, \\ \Delta_2 u''(p^*, q^*) \leqq 0, \end{aligned}$$

was wegen (135) nicht möglich ist.

Es bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, dass positives Maximum in einem der ausgeschlossenen Punkte, etwa in (p_1, q_1), eintritt. Wir beschreiben um (p_1, q_1) auf T eine geschlossene, doppelpunktlose, stetig gekrümmte Kurve $\mathfrak{C}$ und bezeichnen das von ihr begrenzte, (p_1, q_1) enthaltende Gebiet mit $\mathfrak{T}$, die zu $\mathfrak{T}$ gehörige, auf $\mathfrak{C}$ verschwindende, in $\mathfrak{T}$ positive Green'sche Funktion der Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$ mit $\mathfrak{G}$. Wir wählen $\mathfrak{C}$ so nahe an (p_1, q_1), dass in $\mathfrak{T}$ durchweg $u''(p, q) > 0$ ausfällt. Nach bekannten Sätzen folgt mit Rücksicht auf das Verhalten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial u''}{\partial p}$, $\frac{\partial u''}{\partial q}$ in (p_1, q_1) die Formel

$$(137)\qquad u''(p, q) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathfrak{T}} K''(\bar{p}, \bar{q})\,(e^{u''(\bar{p}, \bar{q})} - 1)\,\mathfrak{G}(p, q;\, \bar{p}, \bar{q})\,d\bar{\omega} + t''(p, q),$$

unter t'' diejenige in $\mathfrak{T}$ reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$ verstanden, die auf $\mathfrak{C}$ dieselben Werte wie $u''(p, q)$ annimmt.

Da in $\mathfrak{T}$, ausser höchstens in (p_1, q_1),

$$(138)\qquad \begin{aligned} K''(\bar{p}, \bar{q})\,(e^{u''(p, q)} - 1) > 0, \qquad \mathfrak{G}(p, q;\, \bar{p}, \bar{q}) > 0, \\ t''(p, q) < \operatorname{Max} u''(p, q) \text{ auf } \mathfrak{C} \end{aligned}$$

ist, so ist nach (137) gewiss

$$(139)\qquad u''(p_1, q_1) < \operatorname{Max} u''(p, q) \text{ auf } \mathfrak{C},$$

womit der Eindeutigkeitssatz in dem besonderen Falle $m' = 0$ bewiesen ist.

Es ist leicht zu zeigen, dass *die Funktion* $W(p, q)$ *das Minimum des Doppelintegrals* I *realisiert, d. h. dass*

$$\iint\limits_T [\Delta_1 W - 2\beta W + 2Ke^W]\,d\omega = d$$

ist.

Den Sätzen am Schluss des § 2 gemäss ist mit Rücksicht auf (110) zunächst

$$\iint\limits_T \Delta_1 W\,d\omega = \sum_i^{1..\infty} v_i^2 .$$

Es ist ferner für alle μ

$$\sum_i^{1..\mu} v_i^2 = \sum_i^{1..\mu} \lim_{n=\infty} v_{in}^2 = \lim_{n=\infty} \sum_i^{1..\mu} v_{in}^2 \leq \lim_{n=\infty} \sum_i^{1..\infty} v_{in}^2,$$

daher

$$\iint\limits_T \Delta_1 W d\omega = \sum_i^{1..\infty} v_i^2 \leq \lim_{n=\infty} \sum_i^{1..\infty} v_{in}^2.$$

Hieraus sowie aus (99) und (118) folgt

$$I' = \iint\limits_T [\Delta_1 W - 2\beta W + 2Ke^W] d\omega \leq d.$$

Ich behaupte, auf der rechten Seite gilt das Gleichheitszeichen.

Es sei im Gegensatz hierzu $I' < d$. Man kann dann, wie man sich leicht überzeugt, von der Funktion $W(p, q)$ durch geeignete »Abrundung» der in (p_i, q_i) vorliegenden Spitzen zu einer Funktion $W'(p, q)$ übergehen, die auf T durchweg stetig ist und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat, so dass

$$\iint\limits_T [\Delta_1 W' - 2\beta W' + 2Ke^{W'}] d\omega < d$$

ausfällt. Dies ist aber nicht möglich, da ja d die untere Grenze der Werte des Doppelintegrals I für alle auf T nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetigen Funktionen ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Es sei jetzt $m' \neq 0$. Die Funktion $W(p, q)$ ist alsdann auf T beschränkt und, ausser etwa in den Punkten (p'_i, q'_i), stetig.

Sie gestattet ferner die Darstellung

$$(140) \qquad W(p, q) = \text{Const} - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_T G(p, q; \bar{p}, \bar{q}) [K(\bar{p}, \bar{q}) e^{W(\bar{p}, \bar{q})} - \beta(\bar{p}, \bar{q})] d\bar{\omega}.$$

Es sei $\mathfrak{C}$ eine geschlossene, doppelpunktlose, stetig gekrümmte Kurve um einen der Punkte (p'_i, q'_i), etwa um (p'_1, q'_1). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das von $\mathfrak{C}$ begrenzte, (p'_1, q'_1) enthaltende Gebiet $\mathfrak{T}$ weitere singuläre Punkte weder in seinem Innern noch auf dem Rande enthält, und bezeichnen mit $\mathfrak{G}$ wie vorhin die zu $\mathfrak{T}$ gehörige auf $\mathfrak{C}$ verschwindende, in $\mathfrak{T}$ positive Green'sche Funktion der Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$. Wir setzen

(141) $$W(p,q) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_T \mathfrak{G}(p, q;\ \bar{p}, \bar{q})\,[K(\bar{p}, \bar{q})\,e^{W(\bar{p}, \bar{q})} - \beta(\bar{p}, \bar{q})]\,d\omega + I_5 = I_4 + I_5.$$

Man überzeugt sich leicht, dass I_5 in $\mathfrak{T}$ und auf $\mathfrak{C}$ [insbesondere also auch im Punkte (p'_1, q'_1)] stetig ist und in $\mathfrak{T}$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat. Da überdies

(142) $$\Delta_2 I_4 = K e^W - \beta$$

ist, so ist

(143) $$\Delta_2 I_5 = 0.$$

Da I_4 augenscheinlich auf $\mathfrak{C}$ verschwindet, so ist I_5 diejenige in $\mathfrak{T}$ reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$, die auf $\mathfrak{C}$ dieselben Werte wie $W(p, q)$ annimmt.

Den Eindeutigkeitssatz sprechen wir jetzt so aus. Es gibt keine von $u(p, q)$ verschiedene, auf T, ausser in den Punkten (p_i, q_i), (p'_i, q'_i), nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u'(p, q)$ der Differentialgleichung (4), die in der Umgebung dieser Punkte entsprechend wie

(144) $$\alpha_i \log r_i, \quad -2 \log r'_i - 2 \log |\log r'_i|$$

unendlich wird, wenn ferner vorausgesetzt wird, dass

(145) $$u'(p, q) - v(p, q) = W'(p, q)$$

sich in den Punkten (p_i, q_i) in der vorhin auseinandergesetzten Weise verhält, in der Umgebung der Punkte (p'_i, q'_i) beschränkt ist und eine Darstellung von der Form (141) gestattet.

Dies ist, wie man sich ohne Schwierigkeit überzeugt, sicher der Fall, wenn z. B. das Integral

(146) $$\int \left|\frac{\partial}{\partial n} W'(p, q)\right| ds,$$

erstreckt über einen um (p'_i, q'_i) $(i = 1, \ldots m')$ als Mittelpunkt gezeichneten Kreis in der Ebene (p, q), mit dem Radius dieses Kreises zugleich gegen Null konvergiert.

Der Beweis ist höchst einfach. Wir setzen wieder

(147) $$u(p, q) - u'(p, q) = u''(p, q).$$

Wie vorhin findet man, dass $u''(p, q)$ auf T, ausser vielleicht in den Punkten (p'_i, q'_i), weder positives Maximum noch negatives Minimum haben kann. In

der Umgebung der Punkte (p'_i, q'_i) gestattet aber $u''(p, q)$ eine Darstellung von der Form (137). Also ist auch dort positives Maximum oder negatives Minimum unmöglich. Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung definitiv bewiesen.

Alle bisherigen Betrachtungen gelten, wie man unmittelbar sieht, ohne jede Änderung, wenn die unseren Untersuchungen zugrunde liegende Fläche eine endliche Anzahl Windungspunkte hat.

§ 8. Der besondere Fall einer geschlossenen Riemann'schen Fläche.

Herr Picard hat seinen Untersuchungen über die Differentialgleichung $\Delta u = k e^u$ eine zu einer beliebigen algebraischen Funktion gehörige über der (x, y) Ebene ausgebreitete m_2-blättrige Riemann'sche Fläche F zugrunde gelegt.[1] Es seien $(x_1, y_1), \ldots (x_{m_1}, y_{m_1})$ beliebige im Endlichen gelegene Punkte von F,[2] $k(x, y)$ eine auf F beschränkte, im Endlichen nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion. Es wird eine in F, ausser in den Punkten (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots m_1)$ und den der Einfachheit halber als einfach vorauszusetzenden unendlich fernen Punkten, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u_*(x, y)$ der Differentialgleichung

$$\Delta u_* = k e^{u_*} \tag{148}$$

gesucht, die sich in (x_i, y_i) wie

$$\alpha_i \log R_i, \quad R_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \quad (i = 1, \ldots m_1), \quad \alpha_i > -2, \tag{149}$$

in den m_2 unendlich fernen Punkten aber entsprechend wie

$$-\delta_i \log R, \quad R^2 = x^2 + y^2 \quad (i = 1, \ldots m_2), \quad \delta_i > 2 \tag{150}$$

verhält. Es wird hierbei

$$\sum \alpha_i + \sum \delta_i < 0 \tag{151}$$

vorausgesetzt.

Die Bestimmung der Lösung $u_*(x, y)$ lässt sich, wie wir jetzt zeigen wollen, ohne wesentliche Modifikationen nach der in den vorhergehenden Paragraphen auseinandergesetzten Methode durchführen.

[1] Vgl. die auf S. 2 zitierten Arbeiten.

[2] Der Einfachheit halber werden (x_i, y_i) von den Windungspunkten verschieden vorausgesetzt.

Der Einfachheit halber nehmen wir $m_2 = 1$ an, legen somit der Betrachtung die schlichte (x, y)-Ebene zugrunde. In dem unendlich fernen Punkte soll sich die gesuchte Lösung wie $-\delta \log R +$ beschr. Funktion $(\delta > 2)$ verhalten. Es ist ferner

$$\sum \alpha_i + \delta < 0.$$

Es sei T irgendeine einfach zusammenhängende, geschlossene, singularitätenfreie analytische Fläche, deren Punkte auf ein System isothermischer Parameter (p, q) bezogen sind. Die Gebiete F und T denken wir uns aufeinander eindeutig umkehrbar und bis auf den unendlich fernen Punkt konform abgebildet. Es mögen hierbei die Punkte (p_i, q_i) $(i = 1, .. m_1)$ den Punkten (x_i, y_i), der Punkt (p'', q'') dem unendlich fernen Punkte entsprechen. Denkt man sich die Lösung $u_*(x, y)$ der konformen Beziehung gemäss auf die Fläche T verpflanzt und setzt man

$$u_*(x, y) = u(p, q), \tag{152}$$

so findet man, dass die Funktion $u(p, q)$ sich auf T, ausser in den Punkten (p_i, q_i) $(i = 1, .. m_1)$, (p'', q''), nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig verhält und einer Differentialgleichung von der Form

$$\Delta_2 u = k' e^u \tag{153}$$

genügt. Die Funktion k' ist, ausser in (p'', q''), positiv und nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. In der Umgebung des Punktes (p'', q'') kann man

$$k'(p, q) = r''^{-4} \psi'(p, q), \quad r''^2 = (p - p'')^2 + (q - q'')^2 \tag{154}$$

setzen, unter ψ' eine beschränkte positive Funktion verstanden. In der Umgebung der Punkte (p_i, q_i) $(i = 1, .. m_1)$, (p'', q'') verhält sich $u(p, q)$ entsprechend wie

$$\begin{aligned} &\alpha_i \log r_i + \psi'_i(p, q), \quad \alpha_i > -2, \\ &\delta \log r'' + \psi''(p, q), \quad \delta > 2, \end{aligned} \tag{155}$$

unter ψ_i, ψ'' beschränkte Funktionen verstanden.

Es sei $\beta(p, q)$ eine, ausser in den Punkten (p_i, q_i) $(i = 1, .. m_1)$, (p'', q''), positive, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion auf T, die sich in der Umgebung jener Punkte entsprechend wie

(156) $r_i^{\alpha_i} H_i(p, q)$, $r''^{(\delta-4)} H''(p, q)$ (H_i, H'' = positive, beschränkte Funktionen)

verhält und der Beziehung

(157) $$\iint\limits_T \beta\, d\omega = -2\pi\left(\sum \alpha_i + \delta\right)$$

genügt. Es sei weiter $v(p, q)$ eine in T, ausser in den Punkten (p_i, q_i) $(i = 1, \ldots m_1)$, (p'', q''), nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung

(158) $$\Delta_2 v = \beta,$$

die sich in der Umgebung dieser Punkte wie die gesuchte Lösung $u(p, q)$ verhält. Wir setzen

(159) $$u = v + U.$$

Die Funktion U genügt der Differentialgleichung

(160) $$\Delta_2 U + \beta = k' e^v e^U = K e^U.$$

Die Funktion K ist auf T, ausser in den Punkten (p_i, q_i), (p'', q''), positiv und nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. In der Umgebung dieser Punkte verhält sie sich entsprechend wie

(161) $r_i^{\alpha_i} \theta_i(p, q)$, $r''^{(\delta-4)} \theta''(p, q)$ (θ_i, θ'' = positive, beschränkte Funktionen).

Hieraus folgt aber, wie man sofort sieht, dass überall auf T

(162) $$0 < \lambda^{(7)} < \frac{\beta}{K} < \lambda^{(8)}$$

ist, unter $\lambda^{(7)}$ und $\lambda^{(8)}$ gewisse positive Konstante verstanden. Die Beziehung (162) ist der Beziehung (46) in § 4 analog. Die weitere Betrachtung verläuft ganz wie vorhin.

Inhaltsübersicht.

DIE GEOMETRIE DER WIRKLICHKEIT.

Von

J. HJELMSLEV

IN KOPENHAGEN.

Einleitung.

1. Diejenige Formalisierung der Geometrie, die durch die neueren Untersuchungen über die Grundlagen vollendet worden ist, bezeichnet den Abschluss einer mehr als zweitausendjährigen Periode in der Geschichte der Geometrie, eine Periode, deren Programm dadurch gekennzeichnet werden könnte, dass man unter Zugrundelegung möglichst weniger Voraussetzungen (Axiome, Postulate) das Erfahrungsmaterial auf das möglichst wenige beschränke. Die Bestrebungen dieses Programm zu erfüllen haben aber die Folgerung nach sich gezogen, dass die Geometrie der Wirklichkeit, die praktische Geometrie, die Geometrie, welche von den greifbaren Raumverhältnissen handelt, stark zurückgedrängt worden ist. Das in sich so exakte griechische geometrische Lehrgebäude ruhte tatsächlich auf einem illusorischen Grundbegriff, dem Begriff des »mathematischen Punktes», des Punktes »ohne Ausdehnung». Denn die Wirklichkeit kennt keinen solchen Punkt. Und mit den Postulaten, den Aussagen über diesen und andere Grundbegriffe, geht es nicht besser. Sie enthalten alle »transzendentale» Elemente, Elemente, die über die Wirklichkeit, über die Erfahrung weit hinaus gehen. Was man z. B. unter dem Parallelenpostulat (in der Euklidischen Form) zu verstehen hat, ist ganz rätselhaft; erfahrungsgemäss hat es keinen Sinn. Aber vielleicht noch schlimmer geht es mit dem Grundsatz, dass irgend zwei Punkte eine und nur eine gerade Linie bestimmen; jeder praktische Zeichner wird sich doch sehr schnell von der Tatsache überzeugen, dass zwei verschiedene gerade Linien sehr wohl ein beträchtliches Stück gemein haben können. Wo sind denn die geraden Linien zu finden, von welchen man den erwähnten Grundsatz aufrecht erhalten kann, ohne dass man sehr grobe Abweichungen zu befürchten hat?

Sie existieren überhaupt nicht.

Es wird zwar natürlich sein, den Grundsatz anzunehmen, dass zwei Punkte eine eindeutig bestimmte Verbindungsstrecke haben; dass aber die Verlängerung der Strecke über die beiden Punkte hinaus eindeutig bestimmt sein sollte, würde nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Diese Betrachtungen werden dem Leser gewissermassen nicht befremdlich vorkommen. Sie sind teilweise in verschiedener Form in der mathematischen Literatur vertreten. Und doch darf man wohl behaupten können, dass die Frage nach einer Begründung der praktischen Geometrie bisher noch keine vollständig befriedigende Antwort gefunden hat. Obwohl M. Pasch in seinen bekannten »Vorlesungen über neuere Geometrie» die hierher gehörigen Fragen zum vollen Ausdruck bringt und wertvolle Beiträge zu der Lösung derselben liefert, so müssen wir doch die daselbst gegebene Begründung der Geometrie als eine wesentlich theoretische — und zwar in dieser Hinsicht fundamentale — Begründung ansehen, insofern die projektiven Postulate (die Bestimmung der Geraden durch zwei Punkte und die der Ebene durch drei Punkte; die Existenz der Schnittlinie zweier Ebenen, die einen Punkt gemein haben) an die Spitze gestellt werden.

Im ersten Abschnitte der folgenden Arbeit soll nun ein neuer Beitrag zur empirischen Begründung der Elementargeometrie gegeben werden.

2. Heutzutage können wir wohl mit gewissem Recht behaupten, dass wir im Gegensatz zum Altertum den mathematischen Punktbegriff besitzen, insofern wir uns auf den modernen Zahlbegriff stützen können. Dass aber dieser Punktbegriff vom Punktbegriff der Wirklichkeit sehr verschieden ist, hat sich durch viele Untersuchungen deutlich erkennen lassen; die moderne theoretische Geometrie umfasst so weitgehende Begriffsbildungen, z. B. innerhalb der Kurvenlehre, dass dieselben nur in verhältnismässig beschränktem Masse auf die Wirklichkeit reale Anwendung finden können. Diese Tatsachen sind zuerst von F. Klein ausführlich erörtert worden. In seinen Vorlesungen über die Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie (Leipzig 1902) wird durchgehend auf die Wirklichkeit Rücksicht genommen. Nun ist aber die Behandlung dieses Bereichs eine sehr schwierige. Es ist tatsächlich so, dass nicht nur die praktischen, sondern auch die theoretischen Grundlagen der Infinitesimalgeometrie noch sehr wenig bearbeitet sind. Diejenige Differentialgeometrie, über die wir augenblicklich verfügen, erstreckt sich nicht wesentlich über die regulären analytischen Gebilde hinaus. Nur ein kleines Beispiel zur Orientierung!

In den meisten Lehrbüchern findet man den folgenden Beweis für den Satz, dass die Normale eines Punktes (x, y) der Kurve $y = f(x)$ (wo $f(x)$ unbeschränkt differenzierbar vorausgesetzt wird) die Evolute in dem entsprechenden Mittel-

punkt (ξ, η) des Schmiegungskreises berührt: Aus den Gleichungen

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

findet man

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

woraus man dann das genannte Resultat folgert. An dem Fall, wo

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dx} = 0,$$

geht man aber dabei stillschweigend vorüber. Wenn diese Bedingungen eintreten, gilt der Beweis nicht mehr; und es ist nun tatsächlich hier nicht nur von einer Lücke des Beweises, sondern vielmehr von einer Lücke des Satzes selbst die Rede. Wenn nämlich alle Derivierten von ξ und η Null werden, so braucht die Evolute gar keine Tangente zu haben, und in diesem Falle muss die Gültigkeit unseres Satzes natürlich aufhören. Dass dieser Fall nur in einzelnen Punkten eintreten kann, wird man nicht behaupten können; die »Ausnahmepunkte« können, wenn $f(x)$ nicht als regulär und analytisch vorausgesetzt wird, eine perfekte (obwohl nirgends dichte) Punktmenge auf der Kurve bilden.[1]

Es ist, wie oft hervorgehoben worden, vielleicht natürlich, dass die Funktionen, welche wir in der Praxis verwenden, als unbeschränkt differenzierbar vorausgesetzt werden; dass sie aber analytisch und regulär sein sollen, dafür liegen keine zwingenden Gründe vor. Es wird aber dann eine wichtige Frage, wie wir unseren Bereich abgrenzen müssen, wenn wir auf natürliche Weise den Forderungen der Wirklichkeit und gleichzeitig natürlich auch denen der exakten Darstellung Genüge leisten sollen. Dieses doppelte Ziel wollen wir in den letzten Abschnitten unserer Arbeit verfolgen, indem wir versuchen, einen Beitrag zu den Grundlagen der Kurvenlehre zu liefern.

Ohne dass wir mit Rücksicht auf die erkenntnistheoretisch-mathematische Literatur, welche an unsere Fragen Anknüpfung hat, auf besondere Erörterungen oder Vergleichungen eingehen wollen, müssen wir ausser den Arbeiten von M. Pasch und F. Klein noch die bekannten naturphilosophischen Arbeiten von H. Poincaré

[1] Vgl. J. Hjelmslev: Differentialgeometri og Differentialregning. Nyt Tidsskrift f. Matematik. 23. (1912), S. 1—17.

nennen (La Valeur de la Science, Paris 1905; La Science et l'Hypotèse, Paris 1906; Science et Méthode, Paris 1908); allen diesen Arbeiten verdanken wir vielfache Anregung.

1. Die Elementargeometrie.

3. Was ist *eine wirkliche Ebene?* Diese Frage beantwortet man, indem man zusieht, wie man in der Praxis, in den Maschinenfabriken, die Ebenen herstellt. Man benützt eine sogenannte Richtplatte, eine Normalebene, nach welcher man durch geeignete Bearbeitung die herzustellenden ebenen Flächen zurichtet. Wie erhält man aber derartige Richtplatten? Sie werden je drei und drei hergestellt. Man nimmt drei Eisenplatten, welche annähernd ebene Flächen darstellen; dann bearbeitet man sie nach und nach durch Schaben so lange, bis jede derselben schliesslich mit jeder der anderen genau aufeinander passt.[1] Dieser selbstkontrollierende Vorgang gibt uns die einzige genaue Erklärung davon, was wir auf der wirklichen Welt unter einer Ebene zu verstehen haben.

4. Ein Körper mit zwei ebenen Flächen, welche längs einer Kante aneinander stossen, heisst ein Keil. Wir wollen nun erklären, was wir unter einem *Normalkeil* verstehen. Die Normalkeile sind Keile, die wir uns je drei und drei derart hergestellt denken, dass irgend zwei von den drei Keilen einander ausfüllen können, d. h., sie können auf eine Ebene so gelegt werden, dass jeder der beiden Keile eine Fläche in dieser Ebene hat, während sie einander längs ihrer beiden anderen Flächen berühren. Wenn diese Bedingung für je zwei von den drei Keilen erfüllt ist, so nennen wir jeden der Keile einen Normalkeil. Die Ebenen eines Normalkeils heissen *senkrecht zu einander*, und die hier angegebene selbstkontrollierende Herstellungsweise von Normalkeilen enthält die einzige genaue Erklärung des Aufeinandersenkrechtstehens von zwei Ebenen.

Die Kante eines Normalkeils heisst eine *gerade Linie* oder eine Gerade.

5. Wir gehen nun zur Definition einer *Normalecke* über. Unter einer Normalecke verstehen wir einen Körper mit drei ebenen Flächen, welche paarweise zu einander senkrecht sind und längs 3 Kanten zusammenstossen, welche wiederum aneinanderstossen und dabei eine Spitze bilden. Je zwei dieser Kanten heissen *senkrecht zu einander*. Die Spitze der Ecke nennen wir einen *Punkt*.

Betreffend die Existenz der Normalecke haben wir uns nichts Weiteres vorzunehmen als auf ihre genaue maschinentechnische Herstellung hinzuweisen.

6. Andere Idealformen für Ebenen, gerade Linien und rechte Winkel als

[1] Vgl. Karmarsch-Fischer: Mechanische Technologie, Bd. I. Leipzig 1888, S. 677.

die oben beschriebenen existieren nicht. *Alle Ebenen, gerade Linien und rechte Winkel sind Nachbildungen von den genannten maschinentechnischen Idealformen.* Naturlich dürfen unsere Erklärungen nicht als Definitionen im logischen Sinne aufgefasst werden; sie sollen nur dazu dienen, die genannten Gegenstände der Wirklichkeit praktisch genau zu beschreiben. Wirkliche Dinge lassen sich überhaupt nicht logisch definieren.

7. Die in der Praxis am häufigsten benützte Nachbildung unserer Idealebene, ist die Zeichenebene, welche durch das auf dem Reissbrett ausgespannte Zeichenpapier dargestellt wird. Bei dieser Darstellung ermitteln wir durch Zeichnung mittels eines Lineals unsere geraden Linien, indem wir bei der Zeichnung gerade eine treue Nachbildung der Kante des Lineals, also der Kante eines Normalkeils, herzustellen versuchen. Einen Punkt ermitteln wir durch die Zirkelspitze oder durch Kreuzung zweier zu einander senkrechten Geraden.

Indem wir nun zunächst unsere Untersuchungen auf die *Geometrie der Zeichenebene* beschränken, schreiten wir an die Begründung dieser Geometrie.

Und diese Begründung gelingt auf einmal mit Hilfe einer einzigen Erfahrungstatsache, der Existenz des *quadrierten Papiers:* Auf diesem Papier finden wir zwei Reihen zu einander senkrechte Gerade, welche einander in kongruente Massstäbe einteilen; jede Reihe teilt die Ebene (das Papier) in kongruente Streifen ein und teilt auch jede auf das Papier eingezeichnete schräge Gerade in gleich grosse Stücke. Diese unmittelbar in die Augen fallenden Eigenschaften lassen sich mit Hilfe eines Stücks Durchzeichnungspapiers oder einer Platte aus Glas oder Zelluloid, auf welche ein gleichartiges Quadratnetz eingeritzt ist, genau beschreiben und ablesen.

Das Durchzeichnungspapier (oder die durchsichtige Platte) mit dem Quadratnetz nennen wir eine *Massebene.*

Wir haben nun die Mittel in der Hand, die geometrische Proportionslehre innerhalb der Zeichenebene zu begründen. Hat man nämlich in dieser Ebene zwei rechtwinklige Dreiecke, ABC und AB_1C_1, deren Hypotenusen, AB und AB_1 auf dieselbe gerade Linie fallen, während die Katheten, AC und AC_1, auf eine andere gerade Linie fallen, und legt man die Massebene auf die Figur, so dass eine der Geraden des Quadratnetzes auf AC fällt (Fig. 1), so lässt sich sofort ablesen, dass die Proportion

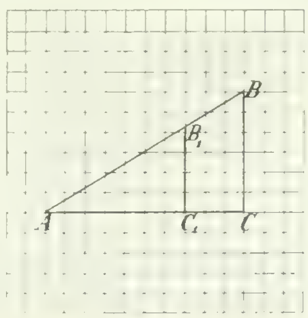


Fig. 1

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$$

mit einer gewissen Annäherung gültig sein wird. Die Annäherung wird von der Feinheit der Darstellung abhängen, und kann in jedem einzelnen Fall durch Angabe einer gewissen oberen Schranke der Unsicherheit ausgedrückt werden.

Hiernach kann man aber alle die gewöhnlichen metrischen Sätze über rechtwinklige Dreiecke, insbesondere den pythagoräischen Lehrsatz, herleiten, indem man alle Sätze als näherungsweise gültige Resultate erhält. Dass man dann auch die analytische Geometrie, in einer ähnlichen praktischen Form, erhalten kann, ist sofort ersichtlich.

Die Begründung unserer praktischen Geometrie ist hiermit vollendet. Dass man nachher aus *Ökonomie der Sprache* die unsere Sätze immer begleitenden, beschränkenden Worte »mit einer gewissen Annäherung» u. dgl. auslassen, oder genauer darunter verstehen wird, folgt von selbst; und man gelangt dadurch zu einem Lehrgebäude, welches dem Wortlaut nach mit der formalen Euklidischen Geometrie vollständig zusammenfällt.

Die formale Euklidische Geometrie wird also nur als eine bequem abgerundete Formulierung der Resultate der praktischen Geometrie hervortreten. Diese Formulierung an sich zu studieren, und dabei die innere logische Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der formalen Sätze zu diskutieren, wird dann eine rein logische Aufgabe, welche an sich als unabhängig von dem ursprünglichen, empirischen Inhalt der Sätze anzusehen ist, und diese Aufgabe leitet nunmehr zu allen denjenigen Untersuchungen, die bisher unter den Namen von Grundlagen der Geometrie zusammengefasst worden sind.

8. Aus der Geometrie der Zeichenebene, oder vielmehr der Geometrie unserer maschinentechnischen Ebene, können wir die praktische Raumgeometrie ableiten, indem wir an unsere Definitionen von Normalkeilen und Normalecken anknüpfen. In dieser Hinsicht müssen wir doch noch eine Tatsache der Erfahrung entnehmen, welche darauf hinausläuft, dass *wenn ein Normalkeil und eine Normalecke auf dieselbe Ebene ε gestellt werden, derart, dass jedes von ihnen eine Fläche in der Ebene ε hat, während die Spitze der Ecke auf die Kante des Keils fällt, dann wird diejenige Kante der Ecke, welche nicht in ε liegt, in der zu ε senkrechten Fläche des Keils enthalten sein.*

Mit Hilfe dieser Tatsache und unter Berücksichtigung unserer oben entwickelten ebenen, praktischen Geometrie wird man dann unschwer die praktische analytische Raumgeometrie aufbauen können.

9. Was wir bisher erreicht haben, ist nur die praktische Geometrie innerhalb kleinerer Wahrnehmungsgebiete, wo wir voraussetzen können, dass unsere maschinentechnischen Definitionen direkte Bedeutung haben. Durch Zusammen-

setzung derartiger Bereiche bildet man grössere Bereiche, und erreicht solcherweise alles, was man mit direkten Messmethoden beherrschen kann.

Die Geometrie der indirekten Messungen lässt sich aber auch in sehr einfacher Weise begründen. Jede indirekte Messung beruht nämlich auf konventioneller Erweiterung der direkten Messungsmethoden. Wollen wir z. B. von dem Abstand zweier Sterne sprechen, so müssen wir eine konventionelle Messungsmethode festsetzen, und wir wählen dann die möglichst natürliche, die nämlich, dass wir die Geometrie, welche wir für unsere direkten Messungen gültig gefunden haben, auch für die erweiterten Messungen gelten lassen, indem wir hierdurch nur zwischen dem zu messenden Abstand (dem Abstand im Himmelsraum) und den direkt messbaren Dingen (Abständen auf der Erde und Gesichtswinkeln) eine konventionelle Verbindung herstellen.

Und wie es mit den grossen, nicht direkt messbaren Abständen, geht, so auch mit den kleinen; man definiert ihre Masszahlen in konventioneller Übereinstimmung mit der Geometrie, welche innerhalb der für direkte Messung zugänglichen Wahrnehmungsbereiche Gültigkeit hat.

10. Auf diese Weise gelangt man schliesslich zur *arithmetischen Geometrie* als das für alle Messungen natürliche Hilfsmittel. Der arithmetische Raum wird als Mannigfaltigkeit arithmetischer Zahlentripeln (x, y, z), »Punkte», definiert, indem x, y, z beliebige arithmetische Zahlen bedeuten. »Gerade Linien» und »Ebenen» werden in bekannter Weise durch Gleichungen ersten Grades definiert. Der »Abstand» zweier Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) wird durch die Zahl $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ definiert.

11. Wenn wir eine genaue Vergleichung zwischen der vorstehenden Begründung der Geometrie und dem gewöhnlichen Euklidischen System anstellen wollten, so könnte man darauf denken, eine logische Analyse des ganzen benützten Erfahrungsmaterials vorzunehmen. Die vollständige Durchführung dieser Analyse halten wir doch für minder wichtig, und beschränken uns darauf, die folgenden Tatsachen hervorzuheben.

In unserm praktischen System gibt es keine Voraussetzungen betreffend die Möglichkeit der Verlängerung von Geraden und Ebenen, kein Parallelenaxiom, keine eigentlichen projektiven Axiome (über die Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte oder einer Ebene durch drei Punkte; über die Existenz der Schnittlinie zweier Ebenen, welche einen Punkt gemein haben). Und es war eben unser Ziel, diese Axiome wegen ihrer praktischen Ungenauigkeit durch andere zu ersetzen, welche den Ansprüchen der Wirklichkeit besser entsprechen. Die neuen Axiome, die in dieser Hinsicht benützt werden könnten, sind im wesentlichen die folgenden:

1) In der Ebene:

Durch jeden Punkt lässt sich eine und nur eine Gerade senkrecht zu einer gegebenen Geraden ziehen.

In jedem Viereck mit 3 rechten Winkeln muss der vierte Winkel auch ein rechter sein.

2) Im Raume:

Durch jeden Punkt geht eine und nur eine Gerade (bezw. Ebene), welche senkrecht zu einer gegebenen Ebene (bezw. Geraden) ist.

Durch jede Gerade geht eine und nur eine Ebene, welche senkrecht zu einer durch die Gerade hindurchgehende vorgelegte Ebene ist.

Wenn eine Gerade g und eine Ebene ε beide zu derselben Ebene senkrecht sind und durch einen gemeinsamen Punkt dieser Ebene hindurchgehen, so ist g in ε enthalten.

Bei der Begründung der Proportionslehre können wir uns das Verhältnis zweier Strecken durch den Kettenbruchalgorithmus definiert denken.

Schliesslich heben wir aber hervor, dass *unser praktisches System gerade in seiner ursprünglichen Form den möglichst einfachen Ausdruck findet. Eine genaue logische Analyse in einzelne Axiome nach dem Euklidischen Muster wird sich immer als schwerfällig und unnatürlich erweisen.*

2. Grundbegriffe der praktischen Infinitesimalgeometrie.

12. In der theoretischen ebenen Geometrie wird eine ebene Kurve definiert als eine Menge von Punkten (x, y), deren Koordinaten x, y durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

dargestellt werden, wobei $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ eindeutige reelle, stetige Funktionen der reellen veränderlichen t bedeuten, welche einem gegebenen Intervall (a, b) angehört. Die Halbtangente rechts (bezw. links) im Punkte t wird als Grenzlage des Halbstrahls definiert, der von dem Punkte t ausgeht und den Punkt $t + \Delta t$ enthält, indem Δt abnehmend (bezw. zunehmend) gegen Null konvergiert. Die Existenz einer derartigen Halbtangente ist nicht durch die gegebenen Bedingungen sichergestellt, hängt aber von der näheren Beschaffenheit der Funktionen φ und ψ ab.

Mit den praktischen (wirklich vorkommenden, etwa gezeichneten) Kurven ist es ganz anders. Eine praktische Kurve wird von einem wirklichen Punkt, z. B. der Spitze eines Bleistifts, beschrieben; die Kurve lässt sich immer in eine

endliche Anzahl geradliniger Stücke zerlegen, was in mannigfacher Weise geschehen kann; die Lage der Teilpunkte spielt dabei keine wesentliche Rolle, wenn nur die Teilstücke hinreichend klein sind. Eine praktische Kurve kann also immer als Polygon mit endlicher Seitenzahl aufgefasst werden; die Spitzen des Polygons haben aber keine vorausbestimmte Lage, was damit zusammenhängt, dass die geraden Linien, die als Seiten des Polygons gelten, sich so unmerkbar aneinander reihen, dass je zwei aufeinanderfolgende dieser Linien nicht nur einen einzelnen Punkt, sondern eine ganze Strecke gemein haben.

Als Halbtangente eines praktischen Kurvenbogens MN in dem Punkt M müssen wir den von M ausgehenden Halbstrahl ansehen, welcher eine möglichst lange von M ausgehende Strecke mit der Kurve gemein hat. Um aber den Anschluss an die oben gegebene Definition der Tangente einer theoretischen Kurve zu erreichen, können wir sagen, dass wir auch bei der praktischen Kurve die Halbtangente als Grenzlage eines von M ausgehenden Halbstrahls MM_1 auffassen können, nur so, dass wenn M_1 bei der Bewegung nach M hin eine gewisse Lage erreicht hat, der Halbstrahl MM_1 dann ganz von selbst alle die folgenden Lagen enthalten wird, dergestalt, dass die Grenzlage schon so praktisch erreicht wird.

13. Denken wir uns eine praktische Kurve (etwa eine gezeichnete Kurve) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem in der praktischen Ebene (der Zeichenebene) durch die Gleichung $y = f(x)$ definiert, wo $f(x)$ eine beliebige stetige Funktion ist, so wird diese praktische Kurve immer bestimmte Tangenten (rechts und links) haben. Es handelt sich nämlich darum, für jedes x eine Konstante A zu bestimmen, derart, dass dasjenige Intervall $(0, k)$, $k > 0$ bezw. $k < 0$, innerhalb dessen jeder Wert h der folgenden Ungleichung

$$|f(x+h) - f(x) - Ah| < \varepsilon$$

genügt, so gross wie möglich wird, wobei ε die Schwelle der Genauigkeit der vorliegenden Darstellung bedeutet.

Diese Aufgabe ist immer lösbar, auch wenn $f(x)$ nicht differenzierbar ist, und zumal kann man sagen, dass wenn $f(x)$ auch differenzierbar ist, wird man doch nicht immer annäherungsweise $A = f'(x)$ setzen können.

Ist $f(x)$ differenzierbar und $f'(x)$ monoton (z. B. wachsend), so wird $y = f(x)$ in der arithmetischen Ebene einen theoretischen konvexen Bogen darstellen, dessen konkave Seite nach der positiven Seite der y-Koordinaten gekehrt ist, und wenn wir durch den Punkt $(x, y - \varepsilon)$ eine Tangente an diese Kurve ziehen, so wird die Richtung dieser Tangente denjenigen Wert A bestimmen, welcher der oben aufgestellten Ungleichung genügt.

14. Der oben erreichte Anschluss der Definition der praktischen Tangente

an die Definition der theoretischen Tangente (vgl. 12) ist von der grössten Wichtigkeit. Vor allem muss man sich davor hüten, die Tangente als eine Gerade zu betrachten, welche zwei möglichst dicht aneinanderliegende Kurvenpunkte verbindet; zwei derartige Punkte bestimmen in der Tat eine Gerade sehr schlecht; würde man sich für einen Augenblick die Kurve mit Ausnahme der beiden Punkte weggenommen, und dann eine Gerade durch die Punkte hindurchgelegt denken, so ergibt sich sofort, dass bei der Zurückführung der Kurve in ihre ursprüngliche Lage die Möglichkeit besteht, dass die gefundene Verbindungsgerade der beiden Punkte eine beträchtliche Abweichung von der wirklichen Tangente aufweisen könnte.

15. Der Schmiegungskreis in einem Punkte M einer theoretischen Kurve wird definiert als die Grenzlage eines veränderlichen Kreises, der die Kurve in M berührt und ausserdem einen beweglichen, sich dem Punkte M unbegrenzt nähernden Punkt M_1 der Kurve enthält. Es sei M_1P das von M_1 auf die Tangente m in M gefällte Lot, und es schneide die Gerade M_1P den genannten veränderlichen Kreis zum zweiten Mal in dem Punkte M_2, so wird der Durchmesser 2ϱ des Schmiegungskreises:

$$2\varrho = \lim PM_2 = \lim \frac{(MP)^2}{PM_1}.$$

Die Existenz dieses Grenzwerts wird natürlich von der Definition der Kurve bedingt.

Bei den praktischen Kurven wird sich die Sache anders gestalten: Als Schmiegungskreis eines praktischen Kurvenbogens MN in dem Punkte M müssen wir den Kreis ansehen, welcher einen möglichst langen von M ausgehenden Bogen mit der Kurve gemein hat. Auch hier erreichen wir aber sofort den Anschluss an die theoretische Definition, wenn wir den nach M konvergierenden Punkt M_1 nur so weit führen, dass der Kreis, welcher die Kurve in M berührt und durch M_1 geht, den ganzen Kurvenbogen MM_1 enthält. Man wird bei dieser Auffassung des Grenzbegriffes auch für die praktischen Kurven die oben gegebene Formel für den Durchmesser des Schmiegungskreises anwenden können; natürlich wird das Resultat, wie bei allen praktischen Massbestimmungen, mit einer gewissen Unsicherheit behaftet.

Eine ähnliche Auffassung des praktischen Grenzbegriffs wird man überall verwenden können um dabei aus theoretischen Untersuchungen praktisch brauchbare Resultate herzuleiten.

16. Ähnliche Betrachtungen hinsichtlich der praktischen Bestimmung des Schmiegungskreises, wie die hinsichtlich der praktischen Bestimmung der Tangente früher angeführten (13), wird man leicht formulieren können. Es wird aber

sofort ersichtlich, dass die direkte Durchführung solcher Bestimmungen schon für die Tangente sehr schwierig wird, und es wird sich von selbst empfehlen, für unsere praktischen Kurven mathematische Ausdrücke ($y = f(x)$) aufzusuchen, wo man mit hinreichender Genauigkeit bei der Bestimmung der praktischen Tangente, des praktischen Schmiegungskreises u. s. w. durch die gewöhnlichen Methoden der Differenzialrechnung brauchbare Resultate erhalten kann. Die theoretische Abschätzung der auf diesem Weg erzielten Genauigkeit wird doch im allgemeinen beträchtliche Schwierigkeiten darbieten. Die praktische Abschätzung hingegen wird man in jedem einzelnen Fall rein empirisch erhalten können. Wir wollen hierfür ein einfaches Beispiel geben.

In der Zeichenebene sei eine Parabel durch ihre Leitlinie l und ihren Brennpunkt F vorgelegt; in dem Scheitel A der Parabel bestimmen wir den »theoretischen» Schmiegungskreis und finden als solchen einen Kreis, dessen Radius gleich dem Abstand des Punktes F von l ist. Dieser Schmiegungskreis werde nun gezeichnet. Es handelt sich dann darum, einen möglichst langen Bogen AB dieses Kreises zu finden, welcher als Bogen unserer Parabel gelten kann, und dies wird man rein experimentell ausführen, indem man durch direktes Probieren mit dem Stechzirkel den Punkt B als den von A auf dem Kreise am weitesten entfernten Punkt ermittelt, dessen Abstände von F und l gleich gross werden.

In anderen Fällen wird man ähnliche Methoden erfinden können; es wird dabei von Wichtigkeit sein, eine einfache experimentelle Darstellung der in Rede stehenden Kurve zu haben. Solche Darstellungen, welche in dieser Hinsicht rasch und genau ans Ziel führen, dürften ein interessantes Kapitel der praktischen Geometrie ausmachen.[1]

17. Unsere praktische Auffassung der Kurven als Polygone mit vielen dicht aufeinanderfolgenden Seiten könnte vielleicht auf den Gedanken leiten, dass man nunmehr die ganze theoretische Infinitesimalgeometrie in der Praxis entbehren könnte, indem man die Kurvenlehre auf eine Lehre von Polygonen, d. h. auf rein elementargeometrische Fragen beschränken könnte. Dies ist doch keineswegs der Fall.

Zunächst bedeutet auch hier die Theorie eine durchaus wesentliche Ökonomie für die Praxis. Und bei näherer Überlegung wird sich ergeben, dass beinahe alle Betrachtungen, die sich als notwendig für die Behandlung der theoretischen Kurven herausgestellt haben, auch in angepasster Form für praktische Kurven unentbehrlich sind. Wir wollen hierfür gleich ein Beispiel einschalten.

[1] Vgl. des Verfassers: *Geometriske Eksperimenter*, Köbenhavn 1913. Deutsche Ausgabe in Vorbereitung.

18. Eine konvexe Kurve r rollt auf der Geraden f. Der Berührungspunkt O ist der augenblickliche Drehpol, und die Normalen der bei der Rollbewegung beschriebenen Bahnkurven gehen im Augenblick durch O. Diese Tatsache wird gewöhnlich dadurch veranschaulicht, dass man die Kurve durch ein Polygon ersetzt, wobei die Rollbewegung durch eine Reihe von aufeinanderfolgenden Drehungen ersetzt wird. Kann nun diese Betrachtung unmittelbar als Beweis verwertet werden? Praktische Kurven haben wir ja tatsächlich oben als Polygone erklärt, und es scheint sonach für sie alles in Ordnung zu sein. Es ist aber nicht so. Die Tangente der Bahn eines Punktes P darf man nämlich, wie oben hervorgehoben, nicht ohne weiters als Verbindungsgerade von benachbarten Punkten ansehen. Sowohl für praktische als theoretische Kurven müssen wir andere Beweismittel suchen; und wir können in der Tat in beiden Fällen dieselben Betrachtungen verwenden, nur so, dass wir für die praktischen Kurven die Grenzprozesse im oben erklärten praktischen Sinne verstehen. Der Beweis soll hier in seiner theoretischen Form gegeben werden (vgl. Fig. 2).

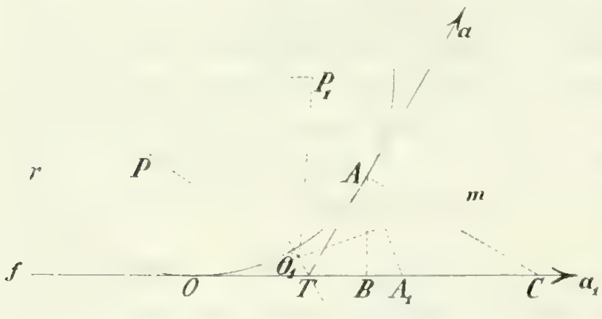


Fig. 2.

Lassen wir r so weit auf f weiter rollen, bis der Punkt A von r in den Punkt A_1 von f fällt ($OA_1 = \widehat{OA}$). Die Halbtangente a in A (für den Umlaufssinn OA) kommt dann mit dem Halbstrahl a_1 von f zur Deckung. Für die beiden Figuren, Aa und A_1a_1, ergibt sich nun ein Rotationspol O_1, der als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m von AA_1 und der Halbierungslinie h des Winkels OTA (Nachbarwinkels von (aa_1)) entsteht. Ein beliebiger Punkt P wird dann bei der Rollbewegung in einen Punkt P_1 fallen, derart, dass das Dreieck PO_1P_1 gleichschenklig ist mit dem Scheitelwinkel $PO_1P_1 = (aa_1)$. Wenn nun A nach O konvergiert, so, behaupten wir, konvergieren die Linien h und m nach der Normalen und der Tangente der Kurve r in O, und ihr Schnittpunkt konvergiert nach O, so dass die Grenzlage des Halbstrahls PP_1 senkrecht zu PO wird, d. h., O wird Momentanpol der Bewegung. Dass h nach der Normalen in O konvergiert, folgt daraus, dass T nach O und der Winkel (aa_1) gegen Null konvergiert; dass m nach der Tangente konvergiert, folgt daraus, dass wenn $AB \perp f$ und $AC \perp a$ errichtet werden, der Punkt A_1 innerhalb der Strecke BC fallen muss, und da die beiden Geraden, AB und AC, nach der Normalen in O kon-

vergieren, so wird AA_1 ebenfalls nach dieser Linie konvergieren, woraus sofort folgt, dass m gegen die Tangente konvergiert.

Der Beweis ist hiermit für theoretische Kurven vollendet, und für praktische Kurven kann man ihn auch verwerten, indem wir, wie oben genannt, nur die Grenzprozesse in der praktischen Form zu nehmen haben.

3. Über den praktischen Bereich der Infinitesimalgeometrie.

19. Wie schon in der Einleitung erwähnt, müssen wir es als unbefriedigend ansehen, wenn man die Untersuchungen der Infinitesimalgeometrie auf analytische, reguläre Gebilde beschränken würde. Es ist aber noch eine offene Frage, wie wir dann unseren Bereich abgrenzen müssen, und wir beabsichtigen freilich nicht hier auf diese Frage eine Antwort in abgeschlossener Form zu geben. Wir wollen uns vielmehr darauf beschränken, die sehr naheliegende und übrigens wohlbekannte Regel aufzustellen, dass jede in der Wirklichkeit vorkommende, mathematische Abhängigkeit abteilungsweise stetig und abteilungsweise monoton ist. Wenn wir diese Bedingung bei jedem einzelnen Problem zur Erlangung einer praktischen Abgrenzung der Untersuchung passend heranziehen, so werden die infinitesimalgeometrischen Untersuchungen unmittelbar den Anwendungen angepasst werden können. Gleichzeitig wird man doch natürlich jedesmal dafür sorgen, dass der theoretischen Tragweite der Untersuchungen nicht unnötige Beschränkungen auferlegt wird.

Unter diesen Gesichtspunkten gehen wir nun dazu über, einen Ausblick über die grundlegenden Fragen der Kurvenlehre zu geben.

4. Ebene Kurven.

20. Wir gehen von dem allgemeinsten Kurvenbegriff in einem beschränkten Teil der Ebene aus, welcher durch die Parameterdarstellung gegeben ist

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t).$$

Wir verlangen nun zunächst, dass die stetigen Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ abteilungsweise monoton (und ohne Invariabilitätszüge)[1] sein sollen; weiter verlangen wir, dass das Verhältnis (oder der reziproke Wert des Verhältnisses)

[1] Wenn wir im folgenden die Worte »abteilungsweise monoton« brauchen, so soll immer darunter verstanden sein, dass der Fall der Unveränderlichkeit ausgeschlossen wird.

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{\psi(t)-\psi(t_0)}$$

für jeden Wert von t_0, in der Umgebung von t_0, und für $t \neq t_0$, eine abteilungsweise stetige und monotone Funktion von t definieren soll. Hieraus folgert man dann das Vorhandensein einer bestimmten Halbtangente, rechts bezw. links, in jedem Punkt der gegebenen Kurve.

Setzen wir ferner voraus, dass die Richtung der, z. B. rechtsseitigen, Halbtangente abteilungsweise stetig und monoton variiert, wenn der Punkt die Kurve monoton durchläuft, so wird sich sofort ergeben, dass unsere Kurve aus einer endlichen Anzahl konvexer Bögen, deren jeder ohne Knick ist, besteht. Hierzu braucht man nur den etwas einfacheren Satz zu zeigen, dass ein Bogen, dessen rechtsseitige Halbtangente monoton und stetig variierende Richtung hat, und dessen Totalkrümmung $< \pi$ ausfällt, ein konvexer Bogen sein muss, und diese Tatsache wird man einfach daraus schliessen können, dass keine gerade Linie mit dem Bogen mehr als zwei Punkte gemein haben kann; die Existenz von drei Schnittpunkten M, N, P (welche in dieser Ordnung auf dem Bogen aufeinander folgen) würde nämlich den Umstand nach sich ziehen, dass die beiden Bögen MN und NP je einen Punkt enthielten, dessen Tangente zur Geraden MNP parallel wäre, und das wird unmöglich sein, weil die Totalkrümmung $< \pi$ vorausgesetzt wurde.

21. Eine Kurve mit den angeführten Eigenschaften und ohne Knick nennen wir eine *einfache Kurve*. Es wird wichtig sein, Hilfsmittel auszubilden, durch welche man untersuchen kann, in wie weit irgend eine durch ihre Parameterdarstellung ($x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$) vorgelegte Kurve einfach ist oder nicht. In dieser Hinsicht wollen wir zunächst auf den folgenden Satz aufmerksam machen.

Wenn eine ebene Kurve, welche in einem beschränkten Gebiete der Ebene liegt, in jedem ihrer Punkte M eine bestimmte Tangente und (die Endpunkte ausgenommen) zwei bestimmte Halbtangenten mit entgegengesetzten Richtungen aufweist, und wenn die Richtung der Tangente abteilungsweise monoton variiert, wenn M die Kurve monoton durchläuft, so wird die Kurve einfach sein.

Um dies zu beweisen braucht man nach der vorangehenden Untersuchung nur zu zeigen, dass die Tangente in M stetig mit M variiert, und diese Tatsache wird daraus gefolgert, dass die Tangente in M nicht mehr als eine Grenzlage haben kann, wenn M sich einem bestimmten Punkt P der Kurve nähert; es müsste denn möglich sein, eine monotone Reihe $M_1\ M_2\ M_3 \cdots$ mit dem Grenzpunkt P auf der Kurve zu wählen, derart, dass die Richtungen der diesen Punkten entsprechenden Tangenten $m_1\ m_2\ m_3 \cdots$ unendlich oft hin und her schwankten.

22. Aus diesem Satze lässt sich nun weiter der folgende Satz ableiten.

Wenn eine ebene Kurve, welche in einem beschränkten Gebiete der Ebene liegt, durch die Parametergleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ *dargestellt ist, wo wenigstens eine der Funktionen abteilungsweise monoton ist, und wenn die Kurve in jedem Punkt M eine eindeutig bestimmte Tangente besitzt, deren Richtung abteilungsweise monoton variiert, wenn M die Kurve monoton durchläuft, dann wird die Kurve eine einfache Kurve sein.*

Wenn jeder Punkt eine bestimmte Tangente besitzt, können zwei Möglichkeiten eintreffen (die Endpunkten der Kurve ausgenommen): entweder hat der Punkt zwei entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten, oder die Halbtangenten rechts und links des Punktes fallen zusammen. Im letztgenannten Fall sagen wir, dass die Kurve in dem Punkte eine Spitze hat. Dieser Fall kann nun höchstens in einer endlichen Anzahl von Punkten eintreten. Nach Voraussetzung ist nämlich $x = \varphi(t)$ (bezw. $y = \psi(t)$) eine abteilungsweise monotone Funktion, und infolgedessen wird sofort der Fall ausgeschlossen, wo die Kurve unendlich viele Spitzen aufweist, deren Tangenten nicht zur Y-Achse parallel sind; es bleibt dann noch zu untersuchen, ob die Kurve einen Bogen b enthalten könnte, welcher unendlich viele Spitzen besitzt, deren Tangenten zur Y-Achse parallel sind; man sieht aber sofort, dass dies unserer Voraussetzung über die abteilungsweise monotone Variation der Tangentenrichtung unserer Kurve widersprechen würde.

Die vorgelegte Kurve hat sonach höchstens eine endliche Anzahl von Spitzen, und sie lässt sich dann in eine endliche Anzahl Bögen zerlegen, deren jeder ohne Spitzen ist; hieraus folgt nach 21 unmittelbar, dass unsere Kurve eine einfache Kurve ist.

23. Wir gehen nun dazu über, den folgenden allgemeineren Satz zu beweisen:

Wenn eine ebene Kurve, welche in einem beschränkten Teil der Ebene liegt, mittels Zentralprojektion von einem gewissen Punkte O aus auf eine gewisse gerade Linie g (welche nicht durch O hindurchgeht) in eine abteilungsweise monotone Punktreihe projiziert wird, und wenn die Kurve in jedem Punkt M eine bestimmte Tangente besitzt, deren Richtung abteilungsweise monoton variiert, wenn M die Kurve monoton durchläuft, so wird die Kurve eine einfache Kurve sein. Es wird also u. a. hieraus folgen, dass die Kurve mittels Zentralprojektion von einem beliebigen Punkt O_1 aus auf eine beliebige gerade Linie g_1 (welche nicht durch O_1 hindurchgeht) in eine abteilungsweise monotone Punktreihe projiziert wird, und dass die Tangentenfolge der Kurve von jeder beliebigen Geraden der Ebene, welche mit keiner Tangente zusammenfällt, in einer abteilungsweise monotonen Punktreihe geschnitten wird.

Der Satz wird wie im vorigen Falle auf die Tatsache zurückgeführt, dass die Kurve höchstens eine endliche Anzahl von Spitzen aufweisen kann. Zunächst leuchtet ein, dass höchstens eine endliche Anzahl von Spitzen vorhanden sein können, deren Tangenten nicht durch O gehen; es bleibt dann noch zu untersuchen, ob die Kurve unendlich viele Spitzen enthalten kann, deren Tangenten durch O laufen. Nach der projektiven Verallgemeinerung einer bekannten Untersuchung von König[1] liegen die Spitzen jedenfalls nirgends dicht auf der Kurve, denn hieraus würde folgen, dass es auf jedem Teil der Kurve einen Punkt gäbe, dessen Tangente eine willkürlich vorgeschriebene Richtung hätte, was unserer Voraussetzung über die abteilungsweise monotone Variation der Tangentenrichtung unserer Kurve widersprechen würde. Es sei nun S eine Häufungsstelle der Spitzen. In der Umgebung von S wird man dann auf der Kurve unendlich viele einfache Bögen, deren jeder ohne Spitzen ist, abgrenzen können, derart, dass die Tangenten der Endpunkte eines jeden dieser Bögen durch O laufen. Hieraus würde aber folgen, dass man an die Kurve unendlich viele Tangenten parallel zu einer beliebigen von OS verschiedenen Richtung ziehen könnte, und das widerspricht unserer Voraussetzung über die abteilungsweise monotone Variation der Tangentenrichtung.

Es hat sich also herausgestellt, dass die Kurve höchstens eine endliche Anzahl von Spitzen enthalten kann. Sie lässt sich demnach in eine endliche Anzahl von Bögen zerlegen, deren jeder ohne Spitzen ist, und ist somit nach 21 eine einfache Kurve.

24. Wir können nun leicht unseren Bereich durch projektive Transformation erweitern, und indem wir dann die ganze projektive Ebene in Betracht nehmen und in derselben eine einfache Kurve definieren als eine Kurve, welche in jedem Punkt eine bestimmte Tangente aufweist und ausserdem der Bedingung genügt, dass sie sich aus einer endlichen Anzahl konvexer Bögen zusammensetzen lässt, welche freilich nicht notwendig in einem beschränkten Teil der Ebene liegen, sondern vielmehr sich ins unendliche erstrecken können, werden wir aus 23 sofort den folgenden Satz herleiten können:

Wenn eine ebene Kurve 1) auf eine gewisse feste Gerade g in einer abteilungsweise monotone Punktreihe projiziert wird, und 2) in jedem Punkt M eine eindeutig bestimmte Tangente hat, deren Schnittpunkt mit einer gewissen festen Geraden g_1 sich abteilungsweise monoton bewegt, wenn M die Kurve monoton durchläuft, dann wird die Kurve eine einfache Kurve sein.

Die Projektion auf die Gerade g kann eine beliebige Parallelprojektion oder

[1] Vgl. U. Dini: Grundlagen für eine Theorie der Funktion einer veränderlichen reellen Grösse. Leipzig 1892, S. 301—304.

Zentralprojektion sein. Die Gerade g_1 entspricht in dem vorhergehenden Satz der unendlich fernen Geraden, deren Schnittpunkte mit den Tangenten ja die Richtungen der Tangenten bestimmen. Es wäre also eigentlich vorauszusetzen, dass die Gerade g_1 die vorgelegte Kurve nicht schneidet. Man sieht aber sofort, dass diese Beschränkung ohne Belang ist; dass g_1 mit keiner Tangente der Kurve zusammenfallen darf, ist selbstverständlich.

Es folgt nun auch, dass die einfachen Kurven, wie wir sie hier definiert haben, den bekannten von Staudt'schen Sätzen, welche von A. Kneser[1] als Grundlagen einer Kurvendefinition benutzt worden sind, Genüge leisten.

Anmerkung. Du Bois-Reymond hat als *gewöhnliche* solche Funktionen bezeichnet, welche stetig und differenzierbar sind und ausserdem der Bedingung genügen, dass sie abteilungsweise monoton sind gegen jede als Abszissenachse gedachte Richtung.[2] Die einer derartigen Funktion $f(x)$ entsprechende Kurve $y = f(x)$ lässt sich nicht notwendig aus einer endlichen Anzahl konvexer Bögen zusammensetzen und wird also nicht notwendig eine einfache Kurve.

Beispiel:

$$y = \int_0^x e^{-\frac{1}{x^2}} \sin^2 \frac{1}{x} \, dx.$$

25. Auf die gewonnenen Resultate wenden wir nun das Dualitätsprinzip an, indem wir ein *einfaches Geradensystem* in der Ebene definieren als ein System von geraden Linien, welche durch eindeutige und stetige Abbildung eines reellen Punktintervalls (a, b) erzeugt werden können und ausserdem den folgenden Bedingungen genügen:

1. Das Geradensystem wird von einer gewissen festen Geraden g in einer abteilungsweise monotonen Punktreihe geschnitten.

2. Jede Gerade des Systems besitzt einen eindeutig bestimmten *Charakteristikpunkt*, d. h. einen Punkt, welcher als Grenzlage des Schnittpunktes der Geraden mit den Nachbargeraden bestimmt wird.

3. Die Projektion der nach dem Intervall (a, b) geordneten Menge der Charakteristikpunkte auf eine gewisse feste Gerade g_1 bildet eine abteilungsweise monotone Punktreihe. (Es wird z. B. genügen, wenn die x-Koordinate des Charakteristikpunktes abteilungsweise monoton variiert.)

Die Tangenten einer einfachen Kurve bilden sonach ein einfaches Geradensystem.

[1] A. Kneser: Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumkurven, Math. Ann. 34. Bd., S. 205.

[2] Crelle's Journal 79. Bd., S. 32. Vgl. auch Encyklopädie d. math. Wiss., II. S. 22.

Es gilt aber dann auch der Satz:

Die Geraden eines einfachen Geradensystems sind Tangenten einer einfachen Kurve, welche als Ort der Charakteristikpunkte des Geradensystems erzeugt wird.

26. Wir definieren eine *Normkurve* als eine einfache Kurve, deren Normalen ein einfaches Geradensystem bilden. Da indessen die Richtung der Normalen einer einfachen Kurve abteilungsweise monoton variiert, so ergibt sich, dass *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine einfache Kurve als Normkurve ausfällt, dadurch ausgedrückt wird, dass der Charakteristikpunkt* (ξ, η) *der Normalen existiert, und dass seine Abszisse (bezw. Ordinate) abteilungsweise monoton variiert.*

Wenn also die in der Einleitung genannten Gleichungen

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

die Werte ξ, η als derartige Funktionen von x bestimmen, von welchen wir wissen, dass wenigstens eine als abteilungsweise monotone Funktion ausfällt, dann wird die hierdurch bestimmte Evolute eine einfache Kurve sein, welche von den Normalen der ursprünglichen Kurve berührt wird. Wir können somit ins besondere den folgenden Satz aussprechen:

Es sei $y = f(x)$ eine zweimal differenzierbare Funktion, für welche $f''(x)$ endlich und stetig und niemals gleich Null ausfällt; es sei ferner bekannt, dass einer der beiden Ausdrücke

$$\xi = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\eta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

eine abteilungsweise monotone Funktion von x definiert, so wird man hieraus schliessen können, dass die Evolute der Kurve $y = f(x)$ eine einfache Kurve ist, welche von den Normalen der Kurve $y = f(x)$ berührt wird.

Die aus den Lehrbüchern bekannten Sätze über den Schmiegungskreis als

Grenzlage eines Kreises durch drei veränderliche Punkte der Kurve u. dgl., über die Lage des Schmiegungskreises bezüglich der Kurve, und über die Evolutenlänge, lassen sich nun ohne Schwierigkeit für Normkurven zeigen. In bezug auf diese Einzelheiten können wir uns auf einen Hinweis zur Darstellenden Geometrie des Verfassers (Leipzig 1914)[1] beschränken, wo diese Dinge auf wesentlich denselben Grundlagen in elementarer Darstellung behandelt sind (vgl. namentlich 7. Kapitel).

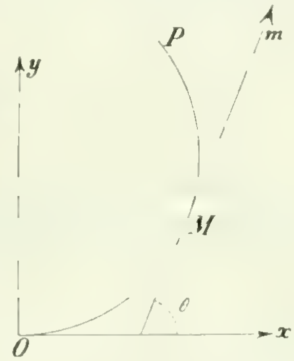


Fig. 3.

27. Ein einfacher konvexer Bogen OP (Fig. 3) wird am einfachsten durch seine natürliche Gleichung dargestellt; darunter versteht man die Gleichung

$$\theta = \theta(s),$$

welche für einen beliebigen Punkt M des Bogens zwischen der Bogenlänge $s = \widehat{OM}$ und dem Winkel (xm) besteht, wobei x und m die dem Umlauf OP entsprechenden vorwärts zeigenden Halbtangenten in O und M bedeuten. Die Bogenlänge s wird numerisch gerechnet, und den Winkel (xm) rechnen wir mit einem Vorzeichen, das mit einem im voraus fest gewählten Umlaufssinn der Ebene übereinstimmt. Da der Bogen als konvex und ohne Knick vorausgesetzt ist, wird die Funktion $\theta(s)$ stetig und monoton, und man hat ausserdem $\theta(0) = 0$.

In dem rechtwinkligen Koordinatensystem (x, y) mit dem Anfangspunkt O, $\left((x\,y) = +\frac{\pi}{2}\right)$, wird der Punkt M durch die folgenden Koordinaten x, y dargestellt:

$$x = \int_0^s \cos\theta(s)\,ds,$$

$$y = \int_0^s \sin\theta(s)\,ds.$$

Ist die Kurve eine Normkurve, so existiert die Derivierte $\frac{d\theta}{ds}$ und wird ausserdem eine stetige und abteilungsweise monotone Funktion. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind.[2]

28. Als weitere Anwendung unserer allgemeinen Regel über die in der Wirklichkeit vorkommenden Abhängigkeiten (19) als Grundlage einer praktischen Abgrenzung der infinitesimalgeometrischen Untersuchungen geben wir den Beweis und die Abgrenzung des folgenden *Fundamentalsatzes aus der Theorie der Rollkurven:*

[1] Wird im folgenden mit D. G. bezeichnet.

[2] Vgl. D. G., 7. Kap.

Wenn eine gegebene einfache konvexe Kurve r auf einer anderen einfachen konvexen Kurve f rollt, so fällt der Momentanpol der Bewegung nach dem Berührungspunkt O der beiden Kurven.

Die gemeinsame rechtsseitige Halbtangente in O sei mit x bezeichnet (vgl. Fig. 4), und die natürlichen Gleichungen von x und O aus (im obigen erklärten Sinne) seien

$$\theta = \theta(s),$$

$$\theta_1 = \theta_1(s),$$

wobei s die gleichgrossen Bogenlängen $\widehat{OA}$ und $\widehat{OA_1}$ bedeutet, während θ, θ_1 die Winkel (xa) bezw. (xa_1) darstellen. Wir wollen nun gleich voraussetzen, dass die

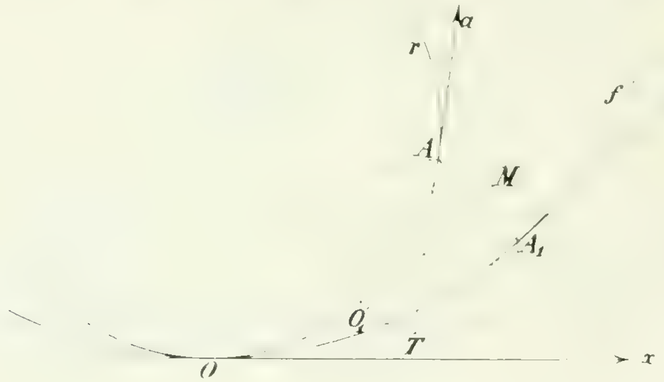


Fig. 4.

Funktion $\theta(s) - \theta_1(s)$ abteilungsweise monoton ist (und dabei wie immer ohne Invariabilitätszüge), also in der Umgebung von $s = 0$ durchweg monoton.

Lassen wir r so weit auf f weiter rollen, bis der Punkt A von r in den Punkt A_1 von f fällt ($\widehat{OA_1} = \widehat{OA}$). Die Halbtangente a in A (für den Umlaufssinn OA) kommt dann mit der Halbtangente a_1 in A_1 zur Deckung. Für die beiden Figuren Aa und A_1a_1 ergibt sich nun ein Rotationspol O_1, der in den Mittelpunkt des Kreisbogens ATA_1 fallen muss (T ist der Schnittpunkt der beiden Tangenten in A und A_1). O_1 ist dem Mittelpunkt M des kleinen Bogens AA_1 des Kreises diametral gegenüberliegend. Wenn A (und A_1) nach O konvergiert, wird auch M nach O konvergieren, und es ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass O_1 nach O konvergieren soll, dass der Durchmesser des Kreises gegen Null konvergiert.

Die Koordinaten x, y und x_1, y_1 der beiden Punkte A und A_1 werden, wenn s_0 die Bogenlänge $\widehat{OA}$ bedeutet:

$$x = \int_0^{s_0} \cos\theta(s)\,ds,$$

$$y = \int_0^{s_0} \sin\theta(s)\,ds,$$

$$x_1 = \int_0^{s_0} \cos\theta_1(s)\,ds,$$

$$y_1 = \int_0^{s_0} \sin\theta_1(s)\,ds.$$

und der Durchmesser des Kreises ATA_1 wird durch

$$2\varrho = \frac{AA_1}{\sin|\theta - \theta_1|}$$

ausgedrückt.

Nun ist ersichtlich, dass die Grösse 2ϱ dann und nur dann gegen Null konvergiert, wenn es jede der beiden Grössen

$$\frac{|x - x_1|}{\sin|\theta - \theta_1|}, \quad \frac{|y - y_1|}{\sin|\theta - \theta_1|}$$

tut, und die Bedingungen hierfür sind:

$$\lim \frac{x - x_1}{\sin(\theta - \theta_1)} = \lim_{s_0 \to 0} \frac{\int_0^{s_0} (\cos\theta(s) - \cos\theta_1(s))\,ds}{\sin(\theta - \theta_1)} = 0.$$

$$\lim \frac{y - y_1}{\sin(\theta - \theta_1)} = \lim_{s_0 \to 0} \frac{\int_0^{s_0} (\sin\theta(s) - \sin\theta_1(s))\,ds}{\sin(\theta - \theta_1)} = 0.$$

Da nun $\theta(s) - \theta_1(s)$ in der Umgebung von $s = 0$ eine durchweg monotone Funktion ist, so wird auch die Funktion $\sin\frac{\theta(s) - \theta_1(s)}{2}$ in dieser Umgebung monoton. Man hat deshalb:

$$\left| \int_0^{s_0} (\cos\theta(s) - \cos\theta_1(s))\, ds \right| < 2\, s_0 \sin \frac{|\theta(s_0) - \theta_1(s_0)|}{2},$$

und

$$\left| \int_0^{s_0} (\sin\theta(s) - \sin\theta_1(s))\, ds \right| < 2\, s_0 \sin \frac{|\theta(s_0) - \theta_1(s_0)|}{2},$$

und die obengenannten Grenzwerte werden dann wirklich den Wert Null haben. Also:

Wenn $\theta(s) - \theta_1(s)$ abteilungsweise monoton (und ohne Invariabilitätszüge) ist, so wird die Bewegung einen bestimmten Momentanpol haben, und dieser Momentanpol fällt nach O.

29. Unter derselben Voraussetzung wird man leicht zeigen können, dass wenn A bei der Rollbewegung sich A_1 nähert, wird der Halbstrahl A_1A gegen die Normale in A_1 konvergieren. Setzen wir weiter voraus, dass die Funktion $\theta(s) - \theta_1(s)$ abteilungsweise monoton und differenzierbar ist, so lässt sich zeigen, dass die bei der Rollbewegung erzeugten Bahnkurven bestimmte Krümmungskreise haben, und dass man die bekannte EULER-SAVARY'sche Relation zu ihrer Bestimmung verwenden kann, wenn nur die in dieser Relation vorkommende Differenz der Krümmungen der beiden Kurven r und f durch die Derivierte von $\theta(s) - \theta_1(s)$ ersetzt werde.[1]

Schliesslich soll noch darauf hingewiesen werden, dass wir durch die vorhergehenden Methoden auch den Weg nach weitergehenden Untersuchungen über die Fundamentalsätze der Kinematik angegeben haben. Es ist z. B. leicht, unsere Untersuchungen über den Fundamentalsatz der Rollbewegung auszudehnen, so dass man den allgemeineren Fall behandelt, wo $\theta(s)$ und $\theta_1(s)$ Funktionen mit beschränkter Variation bedeuten. Wir haben uns aber hier auf die durch die praktischen Anwendungen natürliche Abgrenzung beschränkt.

5. Raumkurven.

30. Was die Raumkurven anbetrifft, wollen wir zunächst voraussetzen, dass die Kurve in einem beschränkten Teil des Raumes enthalten ist, und dass jeder Punkt der Kurve eine eindeutig bestimmte Tangente hat. Unter dem Richtungskegel der Kurve verstehen wir dann einen Kegel, dessen Seitenlinien zu den

[1] Dies wird durch die in D. G., Kap. 7, 189—190, verwendeten Methoden sofort ersichtlich.

Tangenten der Kurve parallel laufen. Die Kurve soll nun eine *einfache Raumkurve* heissen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Kein Teil der Kurve darf eben (oder geradlinig) sein.

2. Der Richtungskegel ist ein einfacher Kegel, d. h., er muss eine Leitkurve besitzen, welche in dem früher angegebenen Sinne eine einfache ebene Kurve ist.

3. Es gibt eine gewisse Gerade g, derart, dass die Projektion der Kurve auf g von einer anderen gewissen Geraden g_1 aus eine abteilungsweise monotone Punktreihe auf g bildet. (Es wird z. B. hinreichen, wenn eine der rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes, welcher die Kurve monoton durchläuft, abteilungsweise monoton variiert.)

Da jeder Punkt der Kurve eine bestimmte Tangente hat, können nur zwei Möglichkeiten eintreten (die Endpunkte der Kurve ausgenommen): entweder hat der Punkt zwei entgegengesetzte Halbtangenten, oder die Halbtangenten rechts und links des Punktes fallen zusammen. Im letztgenannten Falle sagen wir, dass die Kurve in dem Punkte eine Spitze hat. Wir wollen nun zeigen, dass eine einfache Raumkurve nicht unendlich viele Spitzen aufweisen kann. Wären nämlich unendlich viele Spitzen vorhanden, dann müssten ihre Tangenten (mit Ausnahme höchstens einer endlichen Anzahl) wegen der Bedingung 3 die Gerade g_1 schneiden. Durch Projektion von einem unendlich fernen Punkte aus, welcher auf g_1 liegt, würde dann aus der gegebenen Raumkurve eine ebene Kurve entstehen, welche unendlich viele Spitzen hätte, und trotzdem die in dem früher bewiesenen Satz (24) genannten Bedingungen erfüllen würde. Dies ist aber unmöglich, und es hat sich so herausgestellt, dass eine einfache Raumkurve, wie wir sie oben definiert haben, höchstens eine endliche Anzahl von Spitzen enthalten kann. Die Kurve lässt sich sonach in eine endliche Anzahl von Bögen zerlegen, deren jeder den folgenden Bedingungen genügt: Jeder Punkt des Bogens (die Endpunkte ausgenommen) hat zwei entgegengesetzt gerichtete Halbtangenten; der Richtungskegel des Bogens ist konvex, d. h., er hat eine ebene konvexe Leitkurve. Einen solchen Bogen im Raume nennen wir im folgenden einen *Elementarbogen*.

31. Jeder Elementarbogen hat höchstens zwei Tangenten, welche zu einer gegebenen Ebene parallel sind; denn auf dem Richtungskegel gibt es höchstens zwei Seitenlinien, die der Ebene parallel sind. So kann man erkennen, dass eine Ebene nicht 4 Punkte P, Q, R, S, mit dem Bogen gemein haben kann, denn sonst müsste jeder der Bögen PQ, QR, RS (wenn P, Q, R, S einander in dieser Reihenfolge auf dem Bogen folgen) mindestens einen Punkt enthalten, dessen Tangente der Ebene parallel wäre (dieser wäre nämlich der Punkt, der auf dem betrachteten Bogen von der Ebene den grösstmöglichen Abstand hat). Folglich: *Ein Elementarbogen im Raume hat höchstens drei Punkte mit einer Ebene gemein.*

32. Die Schmiegungsebene in einem Punkte M wird definiert als die Grenzlage, welcher eine Ebene zustrebt, wenn sie beständig die Tangente m in M enthält und noch durch einen anderen Punkt N des Bogens geht, der nach M konvergiert. Dass die Schmiegungsebene für jeden Punkt M eines Elementarbogens existiert und eindeutig bestimmt ist, erkennt man, wie folgt: Der Bogen MN muss einen Punkt P enthalten, dessen Tangente p der Ebene mN parallel ist. Der Richtungskegel enthält zwei Seitenlinien m_1 und p_1, die zu m und p parallel sind, die Ebene mN ist deshalb der Ebene $m_1 p_1$ parallel. Wenn nun N nach M konvergiert, konvergiert auch P nach M, und gleichzeitig konvergiert p_1 nach m_1, so dass die Ebene $m_1 p_1$ nach der Tangentialebene des Kegels längs m_1 konvergiert. Hieraus folgt nun: *Jeder Punkt eines Elementarbogens hat eine bestimmte Schmiegungsebene, welche der Tangentialebene des Richtungskegels längs der dem Punkte entsprechenden Seitenlinie parallel ist.*

Eine Ebene, die drei beliebige Punkte A, B, C des Bogens enthält, ist zwei Tangenten p und q, einer an den Bogen AB, der anderen an den Bogen BC parallel. Hieraus schliesst man nun leicht:

Wenn drei veränderliche Punkte A, B, C eines Elementarbogens nach demselben Punkte M konvergieren, muss die Ebene ABC notwendigerweise nach der Schmiegungsebene in M konvergieren.

Diese Resultate lassen sich nun leicht für beliebige einfache Raumkurven verwerten.

33. Mit Hilfe des Richtungskegels untersucht man leicht die Parallelprojektion eines Elementarbogens und gelangt zu dem folgenden Resultat:

Durch Parallelprojektion eines Elementarbogens b im Raume entsteht eine einfache ebene Kurve b'. Hat b eine Tangente, die ein Projektionsstrahl ist, so hat b' in dem entsprechenden Punkte eine Spitze erster Art, und die Tangente in dieser Spitze ist die Spur der Schmiegungsebene. Ist eine Schmiegungsebene eine projizierende Ebene, ohne dass die zugehörige Tangente ein Projektionsstrahl ist, so wird der dem Berührungspunkt entsprechende Punkt von b' ein Wendepunkt.[1]

Die Schnittlinie der Schmiegungsebene in einem Punkte A und der Schmiegungsebene in einem anderen Punkte B konvergiert nach der Tangente in A, wenn B nach A konvergiert.[2] Dieser Satz gilt dann natürlich für jede beliebige einfache Raumkurve.

Weiter lässt sich zeigen, dass *ein ebener Schnitt der Tangentenfläche eines Elementarbogens, also auch einer beliebigen, einfachen Raumkurve, eine einfache, ebene Kurve ist.*[3]

[1] Vgl. D. G. 259.
[2] Vgl. D. G. 260.
[3] Vgl. D. G. 263

Indem wir schliesslich unsere Definition der einfachen Raumkurven erweitern, derart, dass auch Kurven, welche sich ins unendliche erstrecken, in Betracht genommen werden, folgt dann sofort, dass *eine perspektive Transformation eine beliebige einfache Kurve in eine einfache Kurve überführt.*

34. Durch projektive Transformation wird man ferner aus unserer ursprünglichen Definition der einfachen Raumkurven den folgenden Satz erhalten:

Eine Raumkurve ist dann und nur dann einfach, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *Kein Teil der Kurve ist eben (oder geradlinig).*
2. *Es gibt eine Gerade g, derart, dass eine Projektion der Kurve auf diese Gerade existiert, welche abteilungsweise monoton ausfällt.*
3. *Jeder Punkt der Kurve hat eine eindeutig bestimmte Tangente.*
4. *Es gibt eine Ebene, welche die Tangentenfläche der Raumkurve in einer einfachen ebenen Kurve schneidet.*

Es sei noch bemerkt, dass jede einfache Raumkurve den von Staudt'schen Sätzen, welche von A. Kneser als Kurvendefinition benutzt worden sind,[1] Genüge leisten.

35. Es sei eine reelle stetige Funktion $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x in einem gewissen Intervall (a, b) vorgelegt. Für einen bestimmten Wert x wollen wir dann als *Grenzquotienten* der Funktion im Punkte x jeden Grenzwert

$$\lim_{i \to x} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i}$$

bezeichnen, wo die Reihe $x_1, x_2, \dots x_i, \dots\dots$ eine Fundamentalreihe mit dem Grenzpunkte x bedeutet. Für jede derartige Fundamentalreihe gibt es wenigstens einen Grenzquotienten. Wenn $x_1, x_2, x_3, \dots$ alle auf der rechten (bezw. linken) Seite von x liegen, so spricht man von rechtsseitigen (bezw. linksseitigen) Grenzquotienten.

Hilfssatz I. Wenn für eine reelle stetige Funktion $f(x)$ in jedem inneren Punkte des Intervalls (a, b) einer ihrer rechtsseitigen Grenzquotienten gleich Null ausfällt, dann hat die Funktion in dem betrachteten Intervall stets denselben Wert.

Der Satz wird folgendermassen bewiesen. Wenn die Kurve $y = f(x)$ nicht mit einer geraden Linie parallel zur x-Achse zusammenfiele, so behaupten wir, dass man einen Wert x finden könnte, wo kein rechtsseitiger Grenzquotient gleich Null sein könnte. Dies leuchtet unmittelbar ein, wenn die Kurve eine schräge gerade Linie oder ein konvexer Bogen ist, und für die anderen Fälle werden die folgenden Überlegungen ausreichen: Man kann immer eine nicht zur x-Achse

[1] Math. Annalen, 34. Bd., S. 209.

parallele Gerade g finden, welche 3 Punkte A, B, C mit der Kurve gemein hat, derart, dass die Bögen AB und BC nicht auf derselben Seite der Geraden g liegen. Es lässt sich hiernach auf jedem dieser Bögen einen Punkt M bezw. N auffinden, dessen Abstand von g ein Maximum wird. Diejenigen Geraden m und n, welche durch M und N parallel zu g gezogen werden können, müssen dann den ganzen Bogen $AMBNC$ einschliessen, und es werden deswegen die Punkte M und N nicht beide die Bedingung erfüllen können, einen rechtsseitigen Grenzquotienten gleich Null zu besitzen.

Hilfssatz II. Wenn für eine gegebene stetige Funktion $f(x)$ jedem Punkt x des Intervalls (a, b) ein rechtsseitiger Grenzquotient $\varphi(x)$ entspricht, derart, dass die Funktion $\varphi(x)$ stetig wird, so ist $f(x)$ differenzierbar, und es ist $f'(x) = \varphi(x)$.

Zum Beweis hat man nur den vorigen Hilfssatz I auf die Funktion $f(x) - \int_a^x \varphi(x)\,dx$ anzuwenden.

Es sei nun eine beliebige ebene Jordankurve AB mit den Endpunkten A, B vorgelegt. Für einen beliebigen Punkt M der Kurve, welcher von A und B verschieden ist, wollen wir als *Grenzrichtung* der Kurve im Punkte M jeden Halbstrahl bezeichnen, welcher als Grenzlage eines Halbstrahls $MM_{i(i \to \infty)}$ entsteht, indem $M_1, M_2, \ldots M_i \ldots$ eine Fundamentalreihe auf der Kurve mit dem Grenzpunkt M bezeichnen. Wenn $M_1 M_2 \ldots$ auf der Kurve auf derselben Seite von M liegen, sprechen wir von einer rechtsseitigen (bezw. linksseitigen) Grenzrichtung, indem wir nach Willkür den einen Umlaufssinn als den rechtsseitigen, den andern als den linksseitigen bezeichnen.

Aus dem Hilfssatz II ergibt sich nun durch projektive Transformation der

Hilfssatz III. Wenn es für eine ebene Jordankurve, welche mit jedem Strahl eines bestimmten gegebenen Strahlenbüschels höchstens einen Punkt gemein hat, möglich ist, zu jedem ihrer Punkte P (die Endpunkte ausgenommen) eine rechtsseitige dem Strahlenbüschel nicht angehörige Grenzrichtung p anzugeben, derart, dass die Richtung p stetig mit P variiert, so hat die Kurve in jedem Punkte P eine bestimmte Tangente, und diese Tangente ist p.

36. Wir gehen nun daran, den folgenden Hauptsatz zu beweisen:

Wenn eine Raumkurve k in jedem Punkt eine bestimmte Tangente und eine bestimmte, mit dem Punkte stetig variierende Schmiegungsebene hat; wenn ausserdem eine Projektion der Kurve auf eine Ebene ε existiert, welche eine einfache ebene Kurve k_1 ist, während keine Schmiegungsebene eine projizierende Ebene ist, und wenn schliesslich eine Gerade g vorhanden ist, welche von der Folge der Schmiegungsebenen in einer abteilungsweise monotonen Punktreihe geschnitten wird, so muss die Kurve k eine einfache Raumkurve sein.

Wir können uns offenbar auf den Fall beschränken, wo die Projektion auf die Ebene ε eine Parallelprojektion ist, und wo die Gerade g unendlich fern ist; ferner wird es ausreichen, den Fall zu erledigen, wo die ebene Kurve k_1 ein konvexer Bogen ist, dessen Totalkrümmung $< \pi$. Wir wählen auf k einen bestimmten Umlaufssinn als den rechtsseitigen und haben dann in der Projektion k_1 einen entsprechenden (rechtsseitigen) Umlaufssinn. Keine Schmiegungsebene ist eine projizierende Ebene, und es wird dann auch keine Tangente von k ein Projektionsstrahl sein können. Die rechtsseitigen Halbtangenten von k werden in rechtsseitige Halbtangenten von k_1 projiziert. Keine zwei Halbtangenten von k können parallel sein, es müssten denn ihre Projektionen auch parallel sein.

In jedem Punkt A von k haben wir eine bestimmte Schmiegungsebene α als Grenzlage einer Ebene, welche durch die Tangente a in A und durch einen Punkt B von k hindurchgeht, welcher nach A konvergiert; und es ist dabei ohne Belang, von welcher Seite B sich A nähert; da nun die Projektion k_1 konvex vorausgesetzt ist, und die Schmiegungsebene keine projizierende Ebene sein kann, so wird ersichtlich, dass die Halbebene, welche von der Tangente a begrenzt wird und den Punkt B enthält, bei dem genannten Grenzübergang eine eindeutig bestimmte Grenzlage α_1 erreichen muss. Diese Halbebene α_1 nennen wir die *Schmiegungshalbebene* in A. Der Bogen AB auf k enthält wenigstens einen Punkt M (zwischen A und B), dessen Tangente zur Ebene aB parallel läuft, und wenn wir uns B auf der Kurve k auf der rechten Seite von A angenommen denken, so wird die Halbebene, welche von der Tangente a begrenzt wird und einen Halbstrahl enthält, welcher der rechtsseitigen Halbtangente m_1 in M gleichgerichtet ist, nach der Schmiegungshalbebene konvergieren, wenn B nach A konvergiert; dies ergibt sich unmittelbar durch Betrachtung der Projektion k_1. Aus diesen Tatsachen können wir nun gleich die folgenden Eigenschaften des Richtungskegels ableiten, indem wir uns auf den Mantel dieses Kegels beschränken, dessen Seitenlinien den rechtsseitigen Halbtangenten von k parallel laufen: 1) Der Kegel hat keine Doppelseitenlinien; 2) die Projektionen seiner Seitenlinien auf die Ebene ε bilden einen monoton verlaufenden Strahlenbüschel in dieser Ebene; 3) jeder Seitenlinie a' (parallel zur rechtsseitigen Halbtangente a_1 eines Punktes A der Raumkurve; vgl. die Bezeichnungen oben) entspricht eine bestimmte Fundamentalreihe von Seitenlinien $m'_1, m'_2 \ldots.$ mit der Grenzlinie a', derart, dass die Halbebene, welche von a' begrenzt wird und m_i' enthält, nach einer Grenzlage konvergiert, welche zur Schmiegungshalbebene der Kurve k in A parallel ist. Schneidet man also unseren Richtungskegel mit einer Ebene, und wendet man auf die Schnittkurve den früher bewiesenen Hilfssatz III an, so ergibt sich, dass der Richtungskegel längs jeder Seitenlinie eine bestimmte Tangentialebene besitzt,

welche zur Schmiegungsebene der Kurve k in dem entsprechenden Punkte parallel ist und in zwei entgegengesetzte Tangentialhalbebenen zerfällt, eine rechtsseitige und eine linksseitige.

Wir gehen nun dazu über, die letzte unserer Voraussetzungen über die Kurve zu benützen, nämlich die Bedingung, dass eine Gerade g existiert, welche von der Folge der Schmiegungsebenen in einer abteilungsweise monotonen Punkreihe geschnitten wird. Ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, können wir, wie schon bemerkt, annehmen, dass die Gerade g unendlich fern ist. Es leuchtet dann ein, dass wir zu den bereits gefundenen Eigenschaften des Richtungskegels auch diese hinzufügen können, dass die Folge der Tangentialebenen des Kegels von der Geraden g in einer abteilungsweise monotonen Punktreihe geschnitten wird. Und hieraus folgert man dann weiter, dass der Richttungskegel ein einfacher Kegel ist. Hiermit ist dann der Beweis unseres Hauptsatzes vollständig erledigt.

37. Auf die vorhergehenden Resultate über einfache Raumkurven wollen wir im folgenden das Dualitätsprinzip anwenden, indem wir definieren:

Ein *stetiges Ebenensystem* (das eindeutige und stetige Bild eines linearen Punktintervalls, durch dessen Punkte die Ordnung der Ebenen im System angegeben wird) heisst *einfach*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Das Ebenensystem enthält keine stetige Folge, die durch dieselbe Gerade oder durch denselben Punkt geht.

2. Es gibt eine Gerade g, welche das Ebenensystem in einer abteilungsweise monotonen Punktreihe schneidet.

3. Für jede Ebene des Systems existiert eine bestimmte Charakteristiklinie, welche als eindeutige Grenzlage der Schnittlinie der Ebene mit einer Nachbarebene erzeugt wird

4. Es gibt eine Ebene ε und einen Punkt O, derart, dass von O aus die Charakteristiklinien auf ε in ein einfaches Geradensystem projiziert werden.

Man wird nun aus den vorhergehenden Resultaten sofort schliessen können, dass die Schmiegungsebenen einer einfachen Raumkurve ein einfaches Ebenensystem bilden; nach dem Dualitätsprinzip wird es aber dann auch umgekehrt gelten, dass *jedes einfache Ebenensystem aus Schmiegungsebenen einer einfachen Raumkurve k bestehen muss.* Jede Ebene ε des Systems hat einen Charakteristikpunkt, welcher als Grenzlage des gemeinsamen Punktes von 3 Ebenen des Systems entsteht, welche alle gegen ε konvergieren (von derselben Seite); dieselbe Grenzlage wird von dem Schnittpunkte der Charakteristiklinie der Ebene ε und einer Nachbarebene erreicht, welche gegen ε konvergiert. Die Charakteristikpunkte bilden die obengenannte Kurve k.

38. Um zu erkennen, ob ein vorgelegtes Ebenensystem einfach ist, wird es sehr wichtig sein, den folgenden Satz zu haben:

Ein stetiges Ebenensystem ist einfach, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. *Jede Ebene ε des Systems besitzt eine bestimmte Charakteristiklinie k, die als eindeutige Grenzlage der Schnittlinie der Ebene ε mit einer Ebene ε_1 entsteht, wenn ε_1 nach ε konvergiert.*

2. *Die Ebene ε besitzt ausserdem einen bestimmten Charakteristikpunkt K, der als eindeutige Grenzlage des Schnittpunktes von k und ε_1 entsteht, wenn ε_1 nach ε konvergiert.*

3. *Der Charakteristikpunkt K variiert stetig mit ε, und wenigstens eine seiner rechtwinkligen Koordinaten variiert abteilungsweise monoton.*

4. *Es gibt eine Ebene, welche das vorgelegte System in einem einfachen ebenen Geradensystem schneidet, und welche keinen Charakteristikpunkt enthält.*

Der Satz ergibt sich ohne weiteres durch Anwendung des Dualitätsprinzips auf den früher bewiesenen Hauptsatz (36) über einfache Raumkurven.

39. Unter einer *Normkurve* im Raume verstehen wir eine einfache Kurve, deren Normalebenen ein einfaches Ebenensystem bilden. Wir behandeln nur Normkurven, welche in einem beschränkten Teil des Raumes liegen; die Untersuchungen können aber leicht auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden.

Da die Normalebenen einer einfachen Kurve immer den Tangentialebenen eines einfachen Kegels parallel sind, so werden die Bedingungen dafür, dass die Normalebenen ein einfaches Ebenensystem bilden nach 37 darauf beschränkt werden können, dass 1) jede Normalebene der Kurve eine bestimmte Charakteristiklinie, die *Krümmungsachse* in dem entsprechenden Punkte der Kurve, hat; 2) die Projektionen der Krümmungsachsen auf eine Ebene (z. B. eine Koordinatenebene) ein stetiges Geradensystem mit bestimmten Charakteristikpunkten bilden, deren eine Koordinate abteilungsweise monoton variiert.

Noch einfacher ausgedrückt können wir nach dem vorhergehenden Satz (38) die Bedingungen in folgende Form bringen:

Eine einfache Kurve im Raume ist dann und nur dann eine Normkurve, wenn

1. *jede Normalebene eines Punktes P der Kurve eine bestimmte Charakteristiklinie und einen bestimmten Charakteristikpunkt K hat;*

2. *der Charakteristikpunkt K stetig mit P variiert, und eine seiner rechtwinkligen Koordinaten abteilungsweise monoton variiert.*

Dieser Satz wird bei den gewöhnlichen analytischen Darstellungen sofort zur Anwendung kommen können.

40. Den geometrischen Ort des Charakteristikpunktes nennen wir die Polkurve der gegebenen Kurve. Da die Polkurve einfach ist, kann man sie in eine

endliche Anzahl Bögen zerlegen, deren jeder höchstens 3 Schmiegungsebenen durch denselben Punkt haben. Einem solchen Bogen der Polkurve entspreche nun ein Bogen b auf der ursprünglichen Kurve. Es leuchtet ein, dass b von einer beliebigen Kugel in höchstens 4 Punkten geschnitten wird; denn das Vorhandensein von 5 gemeinsamen Punkten würde bedingen, dass man durch den Mittelpunkt der Kugel 4 Normalebenen an die Kurve b legen könnte. Ferner ist ersichtlich, dass eine Kugel durch 4 veränderliche Punkte des Bogens b, welche alle derselben Grenzlage M zustreben, sich einer eindeutig bestimmten Grenzlage nähern muss, der Schmiegungskugel in M, deren Mittelpunkt nach dem M entsprechenden Punkte auf der Polkurve fällt. Ebenfalls werden die Existenz des Schmiegungskreises und dessen wesentlichste Eigenschaften leicht bewiesen.

6. Die Abwickelung der Tangentenfläche einer einfachen Raumkurve.

41. Dass die Tangentenfläche einer einfachen Raumkurve auf eine Ebene abwickelbar ist, folgt aus einem allgemeineren Satz von H. Lebesgue,[1] nach welchem die Tangentenfläche einer Raumkurve dann und nur dann abwickelbar ist, wenn es ihr Richtungskegel ist.

Hier wollen wir nur auf die Konstruktion der Abwickelung hinweisen. Einem beliebigen Punkt P der gegebenen Raumkurve AB entspricht eine bestimmte Bogenlänge $s = \widehat{AP}$ und eine (rechtsseitige) Halbtangente, deren Richtung durch die entsprechende Seitenlinie m_1 des Richtungskegels dargestellt wird. Jedem Wert von s entspricht sonach eine Seitenlinie m_1 des (rechtsseitigen) Richtungskegels. Man breitet nun diesen Kegel in die Ebene aus, und m_1 wird dann in einen bestimmten Halbstrahl m'_1 überführt. Jedem Wert von s entspricht sonach eine bestimmte Richtung m'_1 in der Ebene, und nun konstruieren wir mit Hilfe dieser Beziehung eine ebene Kurve, die wir uns von einem beweglichen Punkte M durchlaufen denken, derart, dass wenn der von M zurückgelegte Weg die Länge s hat, die M ensprechende vorwärtszeigende Halbtangente gerade die Richtung m'_1 hat. Die so hergestellte Kurve bildet mit ihren Tangenten zusammen die Abwickelung der gegebenen Fläche. Sie ist eine einfache Kurve.

42. Wenn wir in der Abwickelung eine beliebige gerade Linie l auswählen und zur Tangentenfläche zurückgehen, wird l in eine geodätische Kurve auf dieser Fläche verwandelt. Da der Richtungskegel dieser Kurve offenbar durch Rollen einer Ebene auf dem Richtungskegel der ursprünglichen Kurve entsteht, wird sie notwendig eine einfache Kurve.

[1] H. Lebesgue: Intégrale, Longueur, Aire. Thèse. Milan 1902, p. 103—107.

Wenn eine Ebene ε auf der Tangentenfläche rollt, werden ihre geraden Linien alle in geodätische Kurven überführt, und während der Rollbewegung sind sie Tangenten dieser Kurven. Hierdurch zeigt sich, dass jeder Punkt der Ebene ε eine Kurve beschreibt, deren Tangente senkrecht zu allen geraden Linien der Ebene ist, also senkrecht zu dieser Ebene selbst.

Umgekehrt, wenn die Fläche auf einer Ebene ε rollt, wird jeder mit der Fläche fest verknüpfte Punkt (ausserhalb der Berührungserzeugenden), dessen augenblickliche Lage in ε fällt, eine Kurve beschreiben, deren Tangente senkrecht zu ε ist. Hierdurch wird es wiederum möglich zu zeigen, dass *jeder Punkt M im Raume, welcher mit der Fläche während der Rollbewegung fest verbunden ist, eine Kurve beschreibt, deren Normalebene in M durch die Erzeugende e, längs welcher die Fläche die Ebene ε augenblicklich berührt, hindurchgeht.*

Um dies zu zeigen, betrachten wir eine andere Erzeugende e_1 auf der Fläche, welche durch die Rollbewegung in die Gerade e_2 der Ebene ε überführt wird. Die Tangentialebene ε_1 längs e_1 wird gleichzeitig in ε überführt. Durch den Schnittpunkt P von ε_1 mit e ziehen wir nun eine Gerade a, derart, dass ε_1 durch Rotation um einen gewissen Winkel α um a in ε überführt werden kann, während e_1 bei derselben Rotation eine Lage erreicht, welche parallel zu e_2 läuft; es wird dann möglich sein, die in Rede stehende Rollbewegung aus dieser Rotation und einer nachfolgenden Parallelverschiebung in eine zu ε parallele Richtung zusammenzusetzen.

Fassen wir nun diese Verhältnisse ins Auge, wie sie sich bei dem Grenzübergang von e_1 nach e gestalten, so sehen wir, dass die Rotationsachse a, welche durch den Punkt P geht, sich der Erzeugenden e nähert; lassen wir nämlich den Richtungskegel der Fläche auf der Ebene ε rollen, indem er in der Anfangslage diese Ebene längs der zu e parallelen Seitenlinie e' berührt, so wird man den Kegel in die Lage, in welcher die zu e_1 parallele Seitenlinie e'_1 in die Ebene hinein gelangt, durch eine Rotation um eine zu a parallele Achse a' überführen können und diese Achse a' konvergiert nach e', wenn e'_1 sich e' nähert (vgl. 18); ferner wird der Punkt P einer bestimmten Grenzlage auf der Rückkehrkante zustreben (37).

Für einen beliebigen Punkt M im Raume, welcher mit unserer abwickelbaren Fläche fest verbunden ist, während diese auf der Ebene ε rollt, werden wir nun eine folgende Lage M_1 finden können, wenn wir den Punkt M, erstens um a durch den Rotationswinkel α herumdrehen, und nachher die entsprechende Parallelverschiebung t vollziehen. Nun ist es klar, dass das Verhältnis $\frac{t}{\alpha}$ gegen Null konvergieren muss. Wir wissen nämlich aus den vorhergehenden Unter-

suchungen, dass die Punkte, deren augenblickliche Lagen in ε fallen (ausserhalb e) Kurven beschreiben, deren Tangenten senkrecht auf ε stehen, und hieraus folgert man, dass $\lim \frac{t}{\alpha} = 0$, wenn e_1 nach e konvergiert. Aus diesem Umstande schliesst man dann wiederum, dass die Grenzlage der Geraden MM_1 senkrecht auf der Ebene eM stehen muss, und hiermit ist unser Satz bewiesen.

43. Schliesslich bemerken wir noch, dass man aus den vorhergehenden Entwicklungen sofort ersehen wird, dass die Planevolventen einer einfachen Kurve immer Normkurven sind. Die Filarevolventen einer einfachen Kurve hingegen sind nicht einmal immer einfach. Es gilt aber der Satz:

Wenn einer Normkurve k die Bedingung auferlegt wird, dass eine ihrer Filarevolventen eine Normkurve sein soll, so werden alle ihre Filarevolventen Normkurven, und die rektifizierenden Ebenen der Kurve k bilden ein einfaches Ebenensystem.

Unsere Kurve wird dann den bei den Anwendungen gewöhnlich stillschweigend vorausgesetzten Eigenschaften hinsichtlich Krümmung und Torsion genügen, und unsere Untersuchungen erhalten hiermit einen gewissen Abschluss.

Schlusswort.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich unschwer auf Kurven in mehrdimensionalen Räumen ausdehnen. Um aber dieses in allgemeinster Form durchführen zu können und um überhaupt die Begriffsbildungen der monotonen Gebilde beherrschen zu können, wird es sich als nützlich erweisen, eine allgemeine Theorie der monotonen Fundamentalreihen in höheren Räumen auszubilden. In einer folgenden Arbeit beabsichtigen wir dieser Theorie etwas näher zu treten.[1]

[1] Vgl. die inzwischen erschienene Abhandlung des Verfassers: *Introduction à la théorie des suites monotones.* Bulletin de l'Académie royale de Danemark, 1914, S. 1—74.

ZUR THEORIE DER RIEMANN'SCHEN ZETAFUNKTION IM KRITISCHEN STREIFEN.

Von

HARALD BOHR

in Kopenhagen.

Einleitung.

Die Riemann'sche Zetafunktion $\zeta(s)$ der komplexen unabhängigen Variablen $s = \sigma + it$ ist bekanntlich eine in der ganzen Ebene, bis auf den einzigen Pol $s = 1$, reguläre analytische Funktion, welche der Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{s\pi}{2} \Gamma(s) \zeta(s)$$

genügt. Diese Funktionalgleichung erlaubt die Untersuchung der Zetafunktion auf die Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ zu beschränken; in der Tat, wenn man die Zetafunktion für $\sigma > \frac{1}{2}$ beherrscht, lässt sie sich mittels der Funktionalgleichung, welche ja die Werte von Zeta in den beiden Punkten s und $1 - s$ verbindet, in der übriggebliebenen Halbebene $\sigma < \frac{1}{2}$ studieren.

In der Halbebene $\sigma > 1$ ist $\zeta(s)$ durch das Euler'sche Produkt

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}}$$

dargestellt, wo p_n die n^{te} Primzahl bedeutet; es ist also speziell $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > 1$. Von dieser Produktdarstellung ausgehend habe ich in einigen früheren Abhandlungen durch eine arithmetisch-analytische Methode, welche auf die Theorie der

Diophantischen Approximationen basiert ist, das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ studiert und u. a. den folgenden Satz bewiesen:[1] *Es nimmt* $\zeta(s)$, *bei jedem* $\delta > 0$, *im Streifen* $1 < \sigma < 1 + \delta$ *jeden Wert ausser Null an, sogar unendlich oft.*

Es war schon seit langem ein Problem in der Theorie der Riemann'schen Zetafunktion die Bedeutung des Euler'schen Produktes für das analytische Studium von $\zeta(s)$, und speziell zur Untersuchung des Wertevorrates von $\zeta(s)$, auch für solche Gebiete der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ zu erkennen, welche *links* von der Geraden $\sigma = 1$ gelegen sind — obwohl das Produkt in keinem Punkte $s = \sigma + it$ mit $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ konvergiert.

In zwei Abhandlungen der neuesten Zeit[2] ist es gelungen, dies Problem anzugreifen, und zwar mit wesentlichem Erfolg. Ein weiteres Beitrag wird in der vorliegenden Abhandlung gegeben. Die Möglichkeit sowohl in den beiden zitierten wie auch in der vorliegenden Arbeit, die Euler'sche Produktformel zur Untersuchung von $\zeta(s)$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ verwenden zu können, beruht auf einer recht bemerkenswerten Tatsache, die übrigens leicht aus einem von Herrn Schnee herrührenden Mittelwertsatz in der Theorie der Dirichlet'schen Reihen abgeleitet werden kann, und die, allgemein gesprochen, folgendermassen ausgedrückt werden kann: Das Euler'sche Produkt konvergiert wohl in keinem Punkte s des Streifens $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, d. h. bei festem in diesem Streifen gelegenem s strebt $\prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s})^{-1}$ mit wachsendem N keinem bestimmten endlichen von Null verschiedenen Grenzwerte zu; trotzdem konvergiert aber das Produkt $\prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s})^{-1}$, wenn mann kein festes s sondern das ganze unendliche Gebiet $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ ins Auge fasst, im Grossen und Ganzen gegen die Grenzfunktion $\zeta(s)$; genau ausgedrückt (in der Form, in welcher diese Tatsache in der letzten der beiden zitierten Abhandlungen benutzt wird, welche das Verhalten auf einer festen Geraden $\sigma = \sigma_0$ des Streifens $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ behandelt): Es sei σ_0 eine Zahl im Intervalle $\frac{1}{2} < \sigma < 1$

[1] H. Bohr: *Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$.* (Göttinger Nachrichten 1911). Der Leser braucht übrigens für das Verständnis der vorliegenden Abhandlung weder die hier zitierte, noch die späterhin zu zitierenden Arbeiten über die Zetafunktion zu kennen.

[2] H. Bohr und E. Landau: *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de* Riemann (C. R. Paris. 1914). H. Bohr und R. Courant: *Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die* Riemann'*sche Zetafunktion* (Crelles Journal, 1914).

und $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ beliebig gegeben; dann gibt es dazu ein $N_0 = N_0(\sigma_0, \varepsilon, \delta)$ mit folgender Eigenschaft: bei jedem festen $N \geqq N_0$ ist für alle hinreichend grosse T die Summe der Längen der Intervallen der reellen Variablen t zwischen $-T$ und $+T$, für die

$$\left| \frac{\zeta(\sigma_0 + it)}{\prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-(\sigma_0 + it)})^{-1}} - 1 \right| < \varepsilon$$

ist, dividiert mit der Gesamtlänge $2T$, grösser als $1 - \delta$.

Bevor ich dazu übergehe, das Ergebnis der vorliegenden Abhandlung kurz auseinanderzusetzen, werde ich zunächst zu Orientierung die Resultate der beiden oben zitierten Abhandlungen kurz erwähnen.

Die erste Abhandlung, welche von Herrn LANDAU und mir herrührt, behandelt das Problem der Nullstellen der Zetafunktion. In einer früher verfassten gemeinsamen Arbeit[1] hatten wir den Satz bewiesen: *Es bezeichne, bei festem* $\delta > 0$, $N(T)$ *die Anzahl der Nullstellen von* $\zeta(s)$ *im Gebiete* $\sigma > \frac{1}{2} + \delta$, $-T < t < T$; *dann ist für unendlich wachsendes* T

$$N(T) = O(T).^{2} \tag{1}$$

Nur wegen der besonderen Wichtigkeit der Nullstellen von $\zeta(s)$ hatten wir in dieser Abhandlung unsere Methode auf die Abschätzung der Anzahl der Wurzeln von $\zeta(s) = 0$ beschränkt und sie nicht allgemein zur Abschätzung der An-

[1] H. BOHR und E. LANDAU: *Ein Satz über* DIRICHLET'*sche Reihen mit Anwendung auf die ζ-Funktion und die L-Funktionen* (Palermo Rendiconti, 1914).

[2] Damit hatten wir, unter Berücksichtigung bekannter Tatsachen, speziell gezeigt: *Die dem Streifen* $0 < \sigma < 1$ *gehörigen Nullstellen von* $\zeta(s)$ *liegen meist in nächster Nähe der Geraden* $\sigma = \frac{1}{2}$; d. h. wenn $\varphi(T)$ bezw. $\psi(T)$ die Anzahl derjenigen Nullstellen von $\zeta(s)$ im Rechtecke $0 < \sigma < 1$, $-T < t < T$ bezeichnet, welche dem schmalen Streifen $\frac{1}{2} - \delta < \sigma < \frac{1}{2} + \delta$ angehören bezw. nicht angehören, so gilt bei jedem $\delta > 0$ die Gleichung

$$\lim_{T=\infty} \frac{\psi(T)}{\varphi(T)} = 0.$$

Dieser letzte Satz ist das eine zweier Resultaten, durch welche es in der neuesten Zeit gelungen ist, dem RIEMANN'schen Problem der Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Streifen $0 < \sigma < 1$ wesentlich näher heranzurücken. Das andere Resultat ist die von Herrn HARDY (*Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de* RIEMANN, C. R. Paris 1914) gemachte Entdeckung, *dass auf der Geraden* $\sigma = \frac{1}{2}$ *unendlich viele Nullstellen von* $\zeta(s)$ *gelegen sind.*

zahl $N_a(T)$ der Wurzeln von $\zeta(s) = a$ in demselben Gebiete $\sigma > \frac{1}{2} + \delta$, $-T < t < T$ verwendet; wörtlich dieselbe Methode ergibt *bei jedem komplexen a das entsprechende Resultat:*

(2) $$N_a(T) = O(T).$$

In der später verfassten Note in den Comptes rendus konnten wir, für die Anzahl der Nullstellen, unser früheres Ergebnis $N(T) = O(T)$ durch das weitergehende Resultat $N(T) = o(T)$ ersetzen, d. h. die Relation

$$\limsup_{T=\infty} \frac{N(T)}{T} < \infty$$

dahin verschärfen, *dass sogar*

(3) $$\lim_{T=\infty} \frac{N(T)}{T} = 0$$

ist. Die Methode, welche uns dieses letzte Resultat ergibt, beruht, wie oben erwähnt, auf die Idee der Verwendung des divergenten EULER'schen Produktes für den Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$; sie ist prinzipiell nur zur Abschätzung der Anzahl der Nullstellen — und nicht wie die frühere Methode auch zur Abschätzung der Anzahl der a-Stellen — verwendbar.

In der zweiten der oben zitierten Abhandlungen, welche von Herrn COURANT und mir herrührt, untersuchen wir die Werte, welche $\zeta(s)$ auf vertikalen im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$ gelegenen Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt. Wir beweisen durch eine Generalisation meiner früheren für die Halbebene $\sigma > 1$ ausgearbeiteten arithmetischen Methode den Satz:

Satz I: Es liegen bei jedem festen σ_0 des Intervalles $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$ die Werte, welche $\zeta(s)$ auf der vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, in der ganzen ζ-Ebene überall dicht.

Dieser Satz, welcher das intrikate Verhalten von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen in prägnanter Weise zum Ausdruck bringt, enthält speziell, das $\zeta(s)$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ jeden komplexen Wert beliebig nahe kommt; er liefert aber keine bestimmte Aufklärung über die Werte, welche $\zeta(s)$ in diesem Streifen tatsächlich annimmt, d. h. der Satz erlaubt für keinen einzigen Wert zu entscheiden, ob er im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ angenommen wird oder nicht. Über die Frage der Werte von $\zeta(s)$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ war es vor einigen Jahren Herrn LANDAU und mir

gelungen, unter Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung über die Nullstellen von $\zeta(s)$, *d. h. unter der Annahme* $\zeta(s) \neq 0$ *für* $\sigma > \frac{1}{2}$, das recht bemerkenswerte Resultat zu erschliessen,[1] dass $\zeta(s)$ in jedem vertikalen Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ mit $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$ sämtliche von Null verschiedenen Werte annimmt. Auf sicherem Boden, d. h. ohne Annahme der RIEMANN'schen Hypothese, war aber bis jetzt über den Wertevorrat von $\zeta(s)$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ sehr wenig bekannt.

Ich beweise nunmehr in der vorliegenden Abhandlung, von der EULER'schen Produktformel ausgehend und in wesentlicher Anknüpfung an die von Herrn COURANT und mir ausgearbeiteten arithmetischen Methode, dass die obige Aussage über die Werte von $\zeta(s)$, welche von Herrn LANDAU und mir als eine Folgerung der RIEMANN'schen Hypothese gewonnen wurde, unabhängig von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser Hypothese wahr ist, d. h. ich beweise den Satz:

Satz II: Es sei $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$. *Dann nimmt* $\zeta(s)$ *im Streifen* $\alpha < \sigma < \beta$ *jeden von Null verschiedenen Wert an, sogar unendlich oft.*

Es ist zu beachten, dass während dieser Satz über den Wertevorrat $W_{\alpha,\beta}$ von $\zeta(s)$ im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ unter Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Hypothese ein endgültiges Resultat liefert, nämlich: es wird jeden Wert $a \neq 0$ unendlich oft, den Wert 0 dagegen gar nicht angenommen, erlaubt der Satz, wenn keine Hypothese über die Nullstellen hineingezogen wird, nicht den Wertevorrat $W_{\alpha,\beta}$ vollständig zu bestimmen; er besagt nur: $W_{\alpha,\beta}$ enthält gewiss jeden von Null verschiedenen Wert, lässt aber die Frage offen, ob die Menge $W_{\alpha,\beta}$ aus den sämtlichen Werten überhaupt, oder aber aus den sämtlichen Werten mit Ausnahme von Null besteht. Es scheint vorläufig, als ob die Untersuchungsmethode bei der Entscheidung dieser letzten Frage, d. h. bei der Entscheidung des fundamentalen RIEMANN'schen Problems, ob $\zeta(s)$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ tatsächlich Nullstellen besitzt oder nicht, prinzipiell versagt.

Über das Problem der a-Stellen bei von Null verschiedenem a erlaubt aber die Methode der vorliegenden Abhandlung nicht nur den Existenzsatz II auf sicherem Boden zu stellen, sondern auch den folgenden viel weitergehenden Satz zu beweisen:

Satz III: Es sei $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$ *und* $a \neq 0$; *es bezeichne* $M_{a,\alpha,\beta}(T)$ *die Anzahl der a-Stellen von* $\zeta(s)$ *im Rechteck* $\alpha < \sigma < \beta$, $-T < t < T$. *Dann ist*

[1] H. BOHR und E. LANDAU: *Beiträge zur Theorie der* RIEMANN'*schen Zetafunktion* (Math. Annalen, 1913).

$$\liminf_{T=\infty} \frac{M_{a,\alpha,\beta}(T)}{T} > 0,$$

d. h. es gibt eine positive Konstante $k = k(a,\alpha,\beta)$ *derart, dass für alle hinreichend grosse* T

(4) $$M_{a,\alpha,\beta}(T) > kT$$

ist.

Durch diesen Satz ist es gelungen, die »wahre Grössenordnung» der Funktion $M_{a,\alpha,\beta}(T)$ festzustellen; denn, wie aus der von Herrn LANDAU und mir bewiesenen Relation (2) unmittelbar folgt, gibt es andererseits eine positive Konstante $K = K(a,\alpha,\beta)$ derart, *dass für alle hinreichend grosse* T

$$M_{a,\alpha,\beta}(T) < KT$$

ist.

Es bezeichne, stets für $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$, $M_{0,\alpha,\beta}(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ im Rechteck $\alpha < \sigma < \beta$, $-T < t < T$; dann ist nach der Relation (3)

$$\lim_{T=\infty} \frac{M_{0,\alpha,\beta}(T)}{T} = 0.$$

Unter Berücksichtigung dieser letzten Gleichung ergibt sich aus (4) das sehr bemerkenswerte Resultat: *Es ist bei jedem* $a \neq 0$

$$\lim_{T=\infty} \frac{M_{0,\alpha,\beta}(T)}{M_{a,\alpha,\beta}(T)} = 0;$$

d. h. ungenau ausgedrückt: die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$, wenn es überhaupt solche gibt, ist jedenfalls von kleinerer Grössenordnung als die Anzahl der a-Stellen bei beliebig gegebenem $a \neq 0$. Es ist hiermit zum ersten Male festgestellt, *dass für die Werte von* $\zeta(s)$ *im Streifen* $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ *die Zahl Null, mag sie in der Wertmenge enthalten sein oder nicht, eine allen übrigen Zahlen gegenüber besondere Rolle spielt.*

Bei den folgenden Untersuchungen werde ich mich nicht auf den Beweis der soeben erwähnten Resultate über $\zeta(s)$ beschränken, sondern dieselbe sogleich in einer etwas allgemeineren Form beweisen, die ich erhalte, indem ich einerseits die Resultate für den Halbstreifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, $t > 0$ statt für den ganzen Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ ableite, und andererseits — was wesentlicher ist — die Funktion $\log \zeta(s)$

statt $\zeta(s)$ selbst studiere. Bevor ich die somit erhaltenen verallgemeinerten Resultate kurz angebe, ist zunächst zu erklären, was dabei unter $\log \zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ zu verstehen ist: Es bezeichne, wie durchweg im folgenden, G dasjenige einfach zusammenhängende Gebiet, das aus der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ entsteht, wenn erstens das reelle im Punkte $s = 1$ ausmündenden Intervall $\frac{1}{2} < s \leq 1$ und zweitens, bei jeder eventuellen der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ angehörigen Nullstelle $\sigma_0 + i t_0$ von $\zeta(s)$, die horizontale Strecke $\frac{1}{2} < \sigma \leq \sigma_0$, $t = t_0$ entfernt wird. In diesem Gebiete G zerfällt der Logarithmus von $\zeta(s)$ in unendlich vielen eindeutigen regulären Zweigen; unter $\log \zeta(s)$ soll derjenige in G reguläre Zweig verstanden werden, welcher für reelle $s > 1$ reell ist. Für die somit in G definierte Funktion $\log \zeta(s)$ werde ich alsdann die beiden folgenden Sätze A und B beweisen, von denen der erste eine Generalisation des von Herrn COURANT und mir bewiesenen Satzes I bildet, während der zweite den Satz III und somit à fortiori den Satz II als speziellen Fall enthält.

Satz A: *Es sei σ_0 eine feste Zahl des Intervalles $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$; dann liegen die Werte, welche $\log \zeta(s)$ in denjenigen Punkten der Halbgeraden $\sigma = \sigma_0$, $t > 0$ annimmt, die dem Gebiete G angehören, in der ganzen Ebene überall dicht.*

Satz B: *Es sei $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$ und a eine beliebige komplexe Zahl* (Null nicht ausgeschlossen). *Es bezeichne $L_{a,\alpha,\beta}(T)$ die Anzahl der Wurzeln von $\log \zeta(s) = a$ in demjenigen Teil des Gebietes G, der dem Rechtecke $\alpha < \sigma < \beta$, $0 < t < T$ angehört. Dann ist*

$$\liminf_{T=\infty} \frac{L_{a,\alpha,\beta}(T)}{T} > 0,$$

d. h. es gibt eine positive Konstante $C = C(a, \alpha, \beta)$ derart, dass für alle hinreichend grosse T

$$L_{a,\alpha,\beta}(T) > C\,T$$

ist.

In diesem letzten Satze ist speziell enthalten, *dass $\log \zeta(s)$ in jedem Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ mit $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$ jeden komplexen Wert unendlich oft annimmt.* Dies Resultat ist, selbst unter Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Hypothese ein neues; in der Tat, die funktionentheoretische Methode von Herrn LANDAU und mir, durch welche wir unter Benutzung der RIEMANN'schen Hypothese

bewiesen haben, dass $\zeta(s)$ im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ jeden Wert ausser Null annimmt, ist unfähig, das schärfere Resultat: es nimmt $\log \zeta(s)$ im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ jeden Wert an, zu ergeben.

Die obige im Gebiete G definierte reguläre Funktion $\log \zeta(s)$ ist, wie aus der EULER'schen Produktformel unmittelbar folgt, in der Halbebene $\sigma > 1$ durch die Reihe

$$\log \zeta(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s})$$

dargestellt, wo für einen x mit positivem reellem Teil $\operatorname{Log} x$ stets den Hauptwert bezeichnen soll, d. h. denjenigen Wert, dessen imaginäre Teil zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegen ist. Ich schreibe nun, bei festem $N \geqq 1$, nicht nur in der Halbebene $\sigma > 1$, sondern im ganzen Gebiete G

$$\log \zeta(s) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s}) + R_N(s);$$

hierbei bedeutet also $R_N(s)$ diejenige in G reguläre Funktion, welche in der Halbebene $\sigma > 1$ durch die Reihe

$$R_N(s) = -\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s})$$

definiert ist.

Die folgende Untersuchung von $\log \zeta(s)$ zerfällt nunmehr in drei Paragraphen.

In § 1 wird das Verhalten des »Restes» $R_N(s)$ mit Hilfe der SCHNEE'schen Mittelwertsatzes untersucht; es wird hierbei nicht etwa der Rest $R_N(s)$ bei fest gehaltenem s für unendlich wachsendes N abgeschätzt, sondern es wird gezeigt (vergl. die obigen Bemerkungen über den »Rest» des EULER'schen Produktes), dass bei festem sehr grossem N der Rest $R_N(s)$ in den meisten Gebieten des unendlichen Streifens $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ sehr klein ist.

In § 2 bezw. § 3 wird zunächst mit Hinblick auf den Beweis des Satzes A bezw. B, der »Anfang»

$$F_N(s) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s})$$

durch die arithmetische Methode, in der generalisierten, sich auf die Idee der geometrischen Wahrscheinlichkeit stützenden Form untersucht. Schliesslich werden, in denselben Paragraphen 2 und 3, unter Heranziehung des Resultates von § 1, die Beweise der beiden Hauptsätze A und B vollendet.

§ 1.

Abschätzung des Restes.

Der Ausgangspunkt der Untersuchungen dieses Paragraphen bildet der folgende Satz, welcher einen Spezialfall des sogenannten SCHNEE'schen Mittelwertsatzes in der Theorie der DIRICHLET'schen Reihen, in einer von Herrn LANDAU und mir unerheblich verallgemeinerten Form darstellt.[1]

Hilfssatz 1. Es sei die Dirichletsche Reihe $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ *für* $\sigma>0$ *konvergent,* $\frac{1}{2}<\sigma_1<1$ *und* $\sigma_2>1$. *Dann ist gleichmässig für* $\sigma_1\leq\sigma\leq\sigma_2$

$$\lim_{T=\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma+it)|^2\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Aus diesem Satze folgt sofort das

Corollar: Es ist

$$\lim_{T=\infty}\frac{1}{2T}\int\int_{\substack{\sigma_1\leq\sigma\leq\sigma_2\\ -T\leq t\leq T}}|f(\sigma+it)|^2\,d\sigma\,dt=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}\,d\sigma\leq(\sigma_2-\sigma_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma_1}}. \tag{5}$$

Durch Anwendung dieser letzten Ungleichung auf die Zetafunktion werde ich zunächst den folgenden Satz beweisen, welcher implizit schon in der in der Einleitung zitierten C. R.-Note von Herrn LANDAU und mir enthalten ist, und dessen Beweis ich dieser Note entnehme.

Hilfssatz 2. Es sei $\frac{1}{2}<\sigma_1<\frac{3}{4}$, $\sigma_2>2$ *und* $\varepsilon>0$. *Dann gibt es dazu eine Zahl* $N_0=N_0(\sigma_1,\sigma_2,\varepsilon)$ *mit folgender Eigenschaft: Bei jedem* $N\geq N_0$ *gilt für alle hinreichend grosse* T, *d. h. für* $T\geq T_0=T_0(N)$ *die Ungleichung*

[1] H. BOHR und E. LANDAU: *Ein Satz über Dirichletsche Reihen ... l. c.*

$$\iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ 1 \leqq t \leqq T}} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma \, dt < \varepsilon T,$$

wobei $\zeta_N(s)$ *die Funktion*

$$\zeta_N(s) = \zeta(s) \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s})$$

bezeichnet.

Beweis: Es ist bei festem N die Funktion $\zeta_N(s)$ eine in der ganzen Ebene bis auf den einzigen Pol $s = 1$ $\left(\text{mit dem Residuum } \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-1})\right)$ reguläre Funktion, welche für $\sigma > 1$ durch das Restprodukt

$$\zeta_N(s) = \zeta(s) \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s}) = \prod_{n=N+1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1}$$

dargestellt wird. Um den SCHNEE'schen Mittelwertsatz zur Abschätzung von $\zeta_N(s) - 1$ zu verwenden, betrachte ich zunächst, statt der Funktion $\zeta_N(s) - 1$ selbst, die ganze transzendente Funktion $(\zeta_N(s) - 1)(1 - 2^{1-s})$, welche für $\sigma > 0$ durch eine konvergente DIRICHLET'sche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ darstellbar ist. (Dies folgt z. B. unmittelbar daraus, dass die Funktion $(\zeta_N(s) - 1)(1 - 2^{1-s})$ gleich

$$\left\{\zeta(s) \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s}) - 1\right\} (1 - 2^{1-s}) = \{\zeta(s)(1 - 2^{1-s})\} \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s}) - (1 - 2^{1-s})$$

ist, also bis auf zwei Gliedern als das Produkt einer für $\sigma > 0$ konvergenten DIRICHLET'schen Reihe $\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} \cdots$ und einer aus nur endlich vielen Gliedern bestehenden DIRICHLET'schen Reihe erscheint.) Aus der Definition von $\zeta_N(s)$ folgt sofort, dass die Koeffizienten a_n der Reihe $(\zeta_N(s) - 1)(1 - 2^{1-s}) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ den Bedingungen

$$\begin{cases} a_n = 0 & \text{für } n < p_{N+1} \\ |a_n| \leqq 2 & \text{für } n \geqq p_{N+1} \end{cases}$$

genügen. Angewandt auf die Funktion $(\zeta_N(s) - 1)(1 - 2^{1-s})$ ergibt die Ungleichung (5) die Relation

$$\lim_{T=\infty}\frac{1}{2T}\iint\limits_{\substack{\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2\\ -T\leqq t\leqq T}}|(\zeta_N(s)-1)(1-2^{1-s})|^2 d\sigma dt \leqq (\sigma_2-\sigma_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma_1}} \leqq (\sigma_2-\sigma_1)\sum_{n=p_{N+1}}^{\infty}\frac{4}{n^{2\sigma_1}} = \varepsilon_N,$$

wo (bei festen σ_1, σ_2) $\varepsilon_N \to 0$ für $N \to \infty$.

Es ist also für alle hinreichend grosse T, d. h. für $T \geqq T_0 = T_0(N) (> 1)$

$$\iint\limits_{\substack{\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2\\ -T\leqq t\leqq T}}|(\zeta_N(s)-1)(1-2^{1-s})|^2 d\sigma dt < 3\varepsilon_N T.$$

Nunmehr soll unter dem Integralzeichen der hineingebrachte Hilfsfaktor $(1-2^{1-s})$ wieder weggeschafft werden. Zu diesem Zwecke konstruiere ich zunächst die Kreisen Γ_ν $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ mit dem Radius $\frac{1}{9}$ um die Nullstellen von $1-2^{1-s}$, d. h. um die Zahlen

$$z_\nu = 1 + \frac{2\pi\nu i}{\operatorname{Log} 2} \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

In der ganzen Ebene ausserhalb dieser Kreisen ist offenbar

$$|1-2^{1-s}| > c,$$

wo c eine positive absolute Konstante bedeutet. Hieraus folgt für $T \geqq T_0$, wenn nur über dasjenige Gebiet $H(T)$ integriert wird, welches aus dem ausserhalb der Kreisen Γ_ν gelegenen Teil des Rechteckes $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $-T \leqq t \leqq T$ besteht, die Ungleichung

(6) $$\iint\limits_{H(T)}|\zeta_N(s)-1|^2 d\sigma dt < \frac{3\varepsilon_N}{c^2}T.$$

Es handelt sich jetz darum, die kleinen ausgeschnittenen Kreise Γ_ν (mit $\nu \neq 0$) dem Integrationsgebiet wieder hinzuzufügen. Um die hierzu nötige Abschätzung des Doppelintegrals über den Kreis Γ_ν vorzunehmen, kann man sich des folgenden kleinen Kunstgriffes bedienen. Da $\zeta_N(s)$ in den Kreisen $|s-z_\nu| < 1$ $(\nu \neq 0)$ regulär ist, gilt bei jedem $\nu \neq 0$ die Ungleichung

$$\iint\limits_{|s-z_\nu|<\frac{1}{9}}|\zeta_N(s)-1|^2 d\sigma dt < \iint\limits_{\frac{1}{9}\leq|s-z_\nu|<\frac{2}{9}}|\zeta_N(s)-1|^2 d\sigma dt.$$

(Denn wenn die nicht konstante Funktion $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ für $|s| < R$ regulär ist, gilt bekanntlich für $0 < r < R$ die Relation

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

also für $0 < r_1 < r_2 < R$ die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} |f(r_1 e^{i\theta})|^2 d\theta < \int_0^{2\pi} |f(r_2 e^{i\theta})|^2 d\theta.)$$

Durch Summation Σ' über diejenigen $\nu \neq 0$, für welche der Kreis Γ_ν dem Rechteck $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $-T \leqq t \leqq T$ ganz oder teilweise angehört, folgt für $T \geqq T_0$

(7) $$\sum{}' \iint\limits_{|s - z_\nu| \leqq \frac{1}{9}} |\zeta_N(s) - 1|^2 d\sigma dt < \sum{}' \iint\limits_{\frac{1}{9} \leqq |s - z_\nu| \leqq \frac{2}{9}} |\zeta_N(s) - 1|^2 d\sigma dt$$

$$< \iint\limits_{H(T+1)} |\zeta_N(s) - 1|^2 d\sigma dt < \frac{3\varepsilon_N}{c^2}(T + 1).$$

Es ergibt sich somit für $T \geqq T_0$ durch Addition der beiden Ungleichungen (6) und (7), dass das Doppelintegral von $|\zeta_N(s) - 1|^2$ erstreckt über das ganze Rechteck $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $-T \leqq t \leqq T$ nur mit Ausnahme des kleinen Kreises $|s - 1| \leqq \frac{1}{9}$ um den Pol $s = 1$ kleiner ist als

$$\frac{3\varepsilon_N}{c^2}T + \frac{3\varepsilon_N}{c^2}(T + 1) = \frac{3\varepsilon_N}{c^2}(2T + 1) < \frac{9\varepsilon_N}{c^2}T;$$

also gilt à fortiori, für $T \geqq T_0$, die Ungleichung

$$\iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ 1 \leqq t \leqq T}} |\zeta_N(s) - 1|^2 d\sigma dt < \frac{9\varepsilon_N}{c^2}T.$$

Ich wähle nun, wegen $\varepsilon_N \to 0$, die Zahl N_0 so gross, dass für $N \geqq N_0$ die Ungleichung $\frac{9\varepsilon_N}{c^2} < \varepsilon$ besteht. Dann ist für dieses N_0 (nebst den obigen Zahlen $T_0(N)$ für $N \geqq N_0$) die Bedingungen des Hilfssatzes offenbar erfüllt.

Es sei wie oben $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \frac{3}{4}$, $\sigma_2 > 2$ feste Zahlen, und es sei $N \geq 1$ eine beliebige ganze Zahl; dann definiere ich für $\tau \geq 2$ eine stetige Funktion $\varphi_N(\tau)$ der reellen Variablen τ durch die Gleichung

$$\varphi_N(\tau) = \iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \\ \tau - 1 \leq t \leq \tau + 1}} |\zeta_N(s) - 1|^2 d\sigma\, dt.$$

Wegen der für $T > 2$ giltigen Ungleichung

$$\int_2^T \varphi_N(\tau)\, d\tau < 2 \iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \\ 1 \leq t \leq T+1}} |\zeta_N(s) - 1|^2 d\sigma\, dt$$

folgt sofort aus dem Hilfssatze 2 das

Corollar: Es sei $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \frac{3}{4}$, $\sigma_2 > 2$ *und* $\varepsilon > 0$. *Dann gibt es dazu eine Zahl* $N_1 = N_1(\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon)$ *mit folgender Eigenschaft: Bei jedem* $N \geq N_1$ *ist für alle hinreichend grosse* T, *d. h. für* $T \geq T_1 = T_1(N)$

$$\int_2^T \varphi_N(\tau)\, d\tau < \varepsilon T. \tag{8}$$

Für das folgende wird es von Bedeutung sein nicht nur das Integral von $\varphi_N(\tau)$ sondern auch die Funktion $\varphi_N(\tau)$ selbst abzuschätzen. Dies geschieht durch den folgenden, aus der obigen Ungleichung (8) fast unmittelbar abzuleitenden Hilfssatz 3, welcher in unpräziser Formulierung aussagt: bei sehr grossen N ist für unendlich wachsendes τ die Funktion $\varphi_N(\tau)$ fast immer sehr klein. In diesem Hilfssatze tritt, obwohl nur in impliziter Form, der Begriff der *Wahrscheinlichkeit* auf, welcher für die ganze Untersuchungsmethode der vorliegenden Abhandlung (sowie schon der mit Herrn Courant gemeinsam verfassten Abhandlung) eine wesentliche Rolle spielt, und dessen Einführung in den Kreis der Betrachtungen es zuerst ermöglicht, bei den Beweisen der Sätze A und B die Untersuchung des »Restes» $R_N(s)$ einerseits und die des »Anfanges» $F_N(s)$ andererseits aneinander zu knüpfen, d. h. diese beiden zunächst getrennten Untersuchungen zu einer gemeinsamen Untersuchung der Funktion $\log \zeta(s) = F_N(s) + R_N(s)$ zu vereinigen.

Hilfssatz 3: Es habe bei festen $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \frac{3}{4}$, $\sigma_2 > 2$ *und einem* $N \geqq 1$ *die Funktion* $\varphi_N(\tau)$ *die obige Bedeutung, d. h. es sei für* $\tau \geqq 2$

$$\varphi_N(\tau) = \iint\limits_{\substack{\sigma_1 < \sigma < \sigma_2 \\ \tau - 1 < t < \tau + 1}} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma \, dt$$

gesetzt. Es seien ferner $0 < \varepsilon_1 < 1$ *und* $0 < \varepsilon_2 < 1$ *beliebig gegeben. Dann gibt es ein* $N = N'(\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *derart, dass bei jedem* $N \geqq N'$ *für alle hinreichend grosse* T, *d. h. für* $T \geqq T' = T'(N)$ *die Strecke* $2 \leqq \tau \leqq T$ *eine endliche Anzahl von Intervallen enthält, von denen keine zwei einen inneren Punkt gemeinsam haben, und welche die beiden folgenden Eigenschaften besitzen: Es ist die Summe der Längen der Intervallen* $> (1 - \varepsilon_2) T$ *und für jeden inneren Punkt* τ *einer dieser Intervallen gilt die Ungleichung*

$$\varphi_N(\tau) < \varepsilon_1 .$$

Beweis: Ich bestimme nach dem obigen Corollar ein N' derart, dass bei jedem $N \geqq N'$ für $T \geqq T' = T'(N)$ die Ungleichung

$$\int_2^T \varphi_N(\tau)\, d\tau < \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4}(T - 2) \tag{9}$$

besteht; hierbei soll ausserdem, für alle $N \geqq N'$, die Zahl $T' = T'(N)$ so gross gewählt sein, dass sie der Ungleichung $\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{2}\right)(T' - 2) > (1 - \varepsilon_2) T'$ genügt. Dieses N' und diese Zahlen $T'(N)$ $(N \geqq N')$ werden alsdann die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllen. In der Tat, es sei $N \geqq N'$, $T \geqq T'(N)$ und, auf Grund der Definition des bestimmten Integrals, die Zahlen $2 = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_m < x_{m+1} = T$ so gewählt, dass

$$\sum_{\nu=0}^{m} (x_{\nu+1} - x_\nu) \max_{x_\nu \leqq \tau \leqq x_{\nu+1}} \varphi_N(\tau) - \int_2^T \varphi_N(\tau) d\tau < \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4}(T - 2)$$

ist, also wegen (9)

$$\sum_{\nu=0}^{m} (x_{\nu+1} - x_\nu) \max_{x_\nu \leqq \tau \leqq x_{\nu+1}} \varphi_N(\tau) < \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2}(T - 2)$$

ist. Da auf der ganzen Strecke $2 \leqq \tau \leqq T$ die Funktion $\varphi_N(\tau)$ positiv ist, muss hierbei die Summe der Längen derjenigen Intervallen $(x_\nu, x_{\nu+1})$, für welche

$\underset{x_\nu \leqq \tau \leqq x_{\nu+1}}{\text{Max}} \varphi_N(\tau) \geqq \varepsilon_1$ ist, kleiner sein als $\frac{\varepsilon_2}{2}(T-2)$. Es erfüllt somit die Menge aller übrigen Intervallen $(x_\nu, x_{\nu+1})$ die Bedingungen des Satzes; denn sie haben eine Gesamtlänge $> \left(1-\frac{\varepsilon_2}{2}\right)(T-2) > (1-\varepsilon_2)T$, und es gilt für jedes in diesen Intervallen gelegene τ die Ungleichung

$$\varphi_N(\tau) < \varepsilon_1.$$

Damit ist der Hilfssatz 3 bewiesen.

Um späterhin (d. h. beim Beweise des Hilfssatzes 5) von der gefundenen Abschätzung des Integrals $\varphi_N(\tau) = \int\int |\zeta_N(s) - 1|^2 d\sigma dt$ zu einer Abschätzung der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion $|\zeta_N(s) - 1|$ selbst zu gelangen, bediene ich mich einer einfachen funktionentheoretischen Bemerkung, die ich aber wegen eines späteren Gebrauchs (in § 3) als besonderen Hilfssatz formuliere.

Hilfssatz 4: Es seien in der s-Ebene C und C' zwei geschlossene Kurven (bei den Anwendungen stets Kreise oder Rechtecke), *von denen C ganz innerhalb C' gelegen ist. Es sei ferner $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es eine, nur von C, C' und ε abhängige Zahl $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Jede innerhalb C' reguläre Funktion $f(s)$, welche die Bedingung*

$$\int\int_{C'} |f(s)|^2 d\sigma dt < \delta$$

erfüllt, genügt für alle s innerhalb oder auf der Kurve C der Ungleichung

$$|f(s)| < \varepsilon.$$

Bemerkung: Wenn bei festem $\varepsilon > 0$ die Existenz eines solchen $\delta = \delta(C, C')$ nachgewiesen ist, wird dies δ offenbar von einer Translation der Figur C, C' nicht abhängen.

Beweis: Es sei $2\varrho > 0$ die kürzeste Entfernung eines Punktes auf C zu einem Punkte auf C', also für jedes innerhalb oder auf C gelegenen s_1 der Kreis $|s - s_1| \leqq \varrho$ ganz im Inneren von C' enthalten; dann behaupte ich: die Zahl $\delta = \pi\varrho^2\varepsilon^2$ hat die verlangte Eigenschaft. In der Tat, es sei $f(s)$ regulär innerhalb C', die Ungleichung

$$\int\int_{C'} |f(s)|^2 d\sigma dt < \delta$$

erfüllt, und s_1 ein beliebiger Punkt innerhalb oder auf C. Dann folgt, nach einer schon oben verwendeten Schlussweise

$$|f(s_1)|^2 \leqq \frac{1}{\pi\varrho^2}\int\int\limits_{|s-s_1|\leqq\rho} |f(s)|^2 d\sigma dt \leqq \frac{1}{\pi\varrho^2}\int\int\limits_{C'} |f(s)|^2 d\sigma dt < \frac{1}{\pi\varrho^2}\cdot\delta = \varepsilon^2$$

also

$$|f(s_1)| < \varepsilon \qquad \text{q. e. d.}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich nunmehr zur Abschätzung des Restgliedes in der Formel für $\log \zeta(s)$ über, d. h. zur Abschätzung der im Gebiete G (vergl. S. 73) regulären Funktion $R_N(s)$, welche für $\sigma > 1$ durch die Reihe

$$(10) \qquad R_N(s) = -\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s})$$

dargestellt wird. Ich beweise diesbezüglich den folgenden, für den späteren Gebrauch angepassten Satz, welcher das Ziel dieses Paragraphen bildet.

Hilfssatz 5: Es sei $\frac{1}{2} < \sigma' < 1$, $0 < \varepsilon' < 1$, $0 < \varepsilon'' < 1$. *Dann gibt es eine Zahl* $N^* = N^*(\sigma', \varepsilon', \varepsilon'')$ *mit folgender Eigenschaft: Bei jedem* $N \geqq N^*$ *enthält für alle hinreichend grosse* T, *d. h. für* $T \geqq T^* = T^*(N)$ *die Strecke* $2 \leqq \tau \leqq T$ *eine endliche Anzahl Intervallen, von denen keine zwei einen inneren Punkt gemeinsam haben, deren Gesamtlänge* $> (1 - \varepsilon'')T$ *ist, und so, dass bei jedem im Inneren einer dieser Intervallen gelegenen* τ *erstens der horizontale Halbstreifen* $\sigma \geqq \sigma'$, $\tau - \frac{1}{2} \leqq t \leqq \tau + \frac{1}{2}$ *ganz dem Gebiete* G *angehört, und zweitens für alle in diesem Halbstreifen gelegenen* s *die Ungleichung*

$$|R_N(s)| < \varepsilon'$$

besteht.

Beweis: Aus (10) folgt sofort, dass gleichmässig für alle $N \geqq 1$ und alle $-\infty < t < \infty$

$$\lim_{\sigma = +\infty} R_N(s) = 0$$

ist; es sei auf Grund dieser Bemerkung $\sigma'' > 1$ so gewählt, dass bei jedem $N \geqq 1$ in der ganzen Halbebene $\sigma \geqq \sigma''$

$$|R_N(s)| < \varepsilon'$$

ist. Es ist hernach der Nachweis (für ein $N \geqq 1$ und ein $\tau \geqq 2$), dass der Halbstreifen $\sigma \geqq \sigma'$, $\tau - \frac{1}{2} \leqq t \leqq \tau + \frac{1}{2}$ dem Gebiete G angehört, und dass in diesem Halbstreifen $|R_N(s)| < \varepsilon'$ ist, damit gleichbedeutend zu zeigen: Es gehört das Recht-

eck R: $\left(\sigma' \leqq \sigma \leqq \sigma'', \tau - \frac{1}{2} \leqq t \leqq \tau + \frac{1}{2}\right)$ dem Gebiete G an, und es besteht im ganzen Rechtecke R die Ungleichung $|R_N(s)| < \varepsilon'$.

Ich werde nunmehr zeigen, dass diese beiden letzten Bedingungen für das Rechteck R erfüllt sind, wenn im ganzen Rechtecke R (inkl. Rand) die Ungleichung

$$(11) \qquad |\zeta_N(s) - 1| < \frac{\varepsilon'}{2} \left(< \frac{1}{2}\right)$$

besteht, wobei $\zeta_N(s)$ die obige Funktion $\zeta_N(s) = \zeta(s) \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s})$ bedeutet. In der Tat, aus (11) folgt zunächst, dass $\zeta_N(s) \neq 0$, d. h. $\zeta(s) \neq 0$, im Rechtecke R, also dass das Rechteck R dem Gebiete G angehört. Ferner ergibt sich aus (11), als eine leicht zu ziehende Folgerung, dass im Rechtecke R der imaginäre Teil von $R_N(s)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegen ist, also dass in R die Relation

$$R_N(s) = \operatorname{Log} \zeta_N(s)$$

besteht, wo $\operatorname{Log} x$ wie immer den Hauptwert bedeutet; denn auf der rechten Seite des Rechteckes (wo $\sigma = \sigma''$ ist) gilt, nach der Bestimmung von σ'', die Ungleichung $|R_N(s)| < \varepsilon' < 1$; also ist dort gewiss der imaginäre Teil von $R_N(s)$ absolut genommen $< \frac{\pi}{2}$, und da, nach (11), die Funktion $\zeta_N(s) = e^{R_N(s)}$ im ganzen Rechteck R einen positiven reellen Teil besitzt, muss der imaginäre Teil der in R regulären Funktion $R_N(s)$ im ganzen Rechtecke R zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ bleiben. Aus der somit in R bewiesenen Relation

$$R_N(s) = \operatorname{Log} \zeta_N(s) = \operatorname{Log}(1 + (\zeta_N(s) - 1))$$

folgt aber sofort, durch nochmaligen Gebrauch von (11), die Ungleichung

$$|R_N(s)| < 2 |\zeta_N(s) - 1| < \varepsilon'.$$

Es darf folglich beim Beweise des Hilfssatzes (5) die beiden an einem Intervallpunkt $\tau > 2$ gestellten Bedingungen durch die eine Forderung ersetzt werden: Es soll $\zeta_N(s)$ im Rechtecke $\sigma' \leqq \sigma \leqq \sigma''$, $\tau - \frac{1}{2} \leqq t \leqq \tau + \frac{1}{2}$ der Ungleichung

$$|\zeta_N(s) - 1| < \frac{\varepsilon'}{2}$$

genügen.

Es sei nunmehr $\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma' + \frac{1}{2}\right)$, $\sigma_2 = 2\sigma''$ gesetzt, also $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \frac{3}{4}$, $\sigma_2 > 2$ und das obige Rechteck $R: \left(\sigma' \leq \sigma \leq \sigma'', \tau - \frac{1}{2} \leq t \leq \tau + \frac{1}{2}\right)$ ganz im Inneren des Rechteckes $R': (\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2,\ \tau - 1 \leq t \leq \tau + 1)$ enthalten. Da, für $\tau \geq 2$, die Funktion $\zeta_N(s) - 1$ im Rechtecke R' regulär ist, so ergibt der Hilfssatz 4 die Existenz eines $\delta = \delta(\varepsilon', R, R') = \delta(\varepsilon', \sigma', \sigma'')$ mit folgender Eigenschaft: Wenn

$$\iint\limits_{R'} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma\, dt < \delta$$

ist, so gilt im ganzen Rechtecke R (inkl. Rand) die Ungleichung

$$|\zeta_N(s) - 1| < \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Es ist somit der Beweis des Hilfssatzes 5 darauf zurückgeführt zu zeigen: Bei hinreichend grossen N (d. h. für $N \geq N^*$) und für alle hinreichend grosse T (d. h. für $T \geq T^*(N)$) liegt auf der Strecke $2 \leq \tau \leq T$ eine endliche Anzahl Intervallen, von denen keine zwei einen gemeinsamen inneren Punkt besitzen, deren Gesamtlänge $> (1 - \varepsilon'')T$ ist und deren innere Punkte τ die Bedingung

$$\varphi_N(\tau) = \iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \\ \tau - 1 \leq t \leq \tau + 1}} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma\, dt < \delta$$

erfüllen. Die Existenz eines solchen N^* nebst Zahlen $T^* = T^*(N)$ $(N \geq N^*)$ ist aber gerade, was im Hilfssatze 3 bewiesen wurde.

Der Hilfssatz 5 wird erst in § 3 beim Beweise des Satzes B in vollem Umfange verwendet. Für den Beweis des Satzes A in § 2, welcher das Verhalten von $\log \zeta(s)$ auf einer festen Geraden $\sigma = \sigma_0$ behandelt, wird das folgende Corollar genügen.

Corollar: Es sei σ_0 eine feste Zahl im Intervalle $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ und $0 < \varepsilon' < 1$, $0 < \varepsilon'' < 1$. Dann gibt es eine Zahl N^* mit folgender Eigenschaft: Bei jedem $N \geq N^*$ enthält für alle hinreichend grosse T, d. h. für $T \geq T^* = T^*(N)$, die Strecke $2 \leq \tau \leq T$ eine endliche Anzahl von Intervallen, von denen keine zwei einen inneren Punkt gemeinsam haben, deren Gesamtlänge $> (1 - \varepsilon'')\,T$ ist und so dass bei jedem im Inneren einer dieser Intervallen gelegenen τ der Punkt $\sigma_0 + i\tau$ dem Gebiete G angehört und die Ungleichung

$$|R_N(\sigma_0 + i\tau)| < \varepsilon'$$

befriedigt.

§ 2.

Beweis des Satzes A.

Im vorliegenden Paragraph wird das Verhalten von $\log \zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$ untersucht, wobei σ_0, wie durchweg im ganzen Paragraphen, eine beliebige, fest gewählte Zahl des Intervalles $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ bezeichnet.

Ich studiere zunächst mittels der arithmetischen Methode den »Anfang» von $\log \zeta(\sigma_0 + it)$

$$F_N(\sigma_0 + it) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-(\sigma_0 + it)}\right)$$

d. h., wenn zur Abkürzung

$$\begin{cases} r_n = p_n^{-\sigma_0} \\ \lambda_n = -\dfrac{\operatorname{Log} p_n}{2\pi} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

gesetzt wird, die Funktion

$$(12) \qquad F_N(\sigma_0 + it) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - r_n e^{2\pi i(t\lambda_n)}\right).$$

Hierbei ist, wie ich für die folgenden Anwendungen sogleich hervorhebe, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n$$

divergent, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2$$

dagegen konvergent.

Den Ausgangspunkt der folgenden arithmetischen Untersuchung des Anfanges $F_N(\sigma_0 + it)$ bildet die Theorie der Diophantischen Approximationen, vor allem der folgende von Kronecker herrührende Satz:

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_N$ linear unabhängige Zahlen, d. h. es bestehe keine Relation $c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + \cdots + c_N \lambda_N = 0$ mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden c_n; es seien ferner $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_N$ beliebige reelle Zahlen. Dann gibt es zu jedem positiven ε ein positives t und dazu gehörige ganze Zahlen $g_1, g_2, \cdots g_N$, so dass die N Ungleichungen

$$|t\lambda_n - \varphi_n - g_n| < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \cdots N)$$

sämtlich erfüllt sind.

Geometrisch sagt dieser Satz aus, dass im N-dimensionalen Einheitswürfel Q die Menge A aller Punkte P_t $(0 < t < \infty)$, die aus den Punkten $(t\lambda_1, t\lambda_2, \cdots t\lambda_N)$ durch Reduktion der Koordinaten modulo 1 entstehen, *überall dicht liegt.*

Der KRONECKER'sche Satz lässt sich dahin verallgemeinern — und diese Verallgemeinerung, deren prinzipielle Bedeutung für das Studium der Zetafunktion zum ersten Mal in der oben zitierten, mit Herrn COURANT gemeinsam verfassten Abhandlung erkannt ist, hat auch für die vorliegende Abhandlung eine ausschlaggebende Bedeutung — dass die Punktmenge A aller Punkte P_t im Einheitswürfel Q nicht nur überall dicht liegt, sondern auch, dass sie dort »*überall gleich dicht*« liegt; d. h. es gilt der folgende

Hilfssatz 6:[1] *Es seien die reelle Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_N$ *linear unabhängig. Es sei im N-dimensionalen Einheitswürfel* Q $(0 \leq y_n < 1)$ $(n = 1, 2, \cdots N)$ *ein parallel den Achsen orientiertes Parallelepipedon* $\Omega : \bar{y}_n < y_n < \bar{y}_n + d_n$ *mit dem Rauminhalt* $d_1 d_2 \cdots d_N$ *gegeben. Es bedeute* $E = E(\Omega, T)$ *die Menge aller Werte* t *im Intervalle* $0 < t < T$, *für die der aus* $(t\lambda_1, t\lambda_2, \cdots t\lambda_N)$ *durch Reduktion der Koordinaten modulo* 1 *entstehende Punkt* P_t *dem Parallelepipedon* Ω *angehört. Dann besteht bei jedem* $T > 0$ *die Menge* E *aus den inneren Punkten einer endlichen Anzahl von Intervallen. Bezeichnet* $L(T)$ *die Summe der Längen dieser Intervalle, so ist*

$$\lim_{T=\infty} \frac{L(T)}{T} = d_1 d_2 \cdots d_N,$$

d. h. der Quotient $\frac{L(T)}{T}$ *strebt für unendlich wachsendes* T *gegen den Rauminhalt des Parallelepipedon* Ω.

In der vorliegenden, sowie in den früheren arithmetischen Untersuchungen der Zetafunktion wird der KRONECKER'sche Satz auf die Amplituden der Zahlen p_n^{-s} $(n = 1, 2, \cdots N)$, d. h. (wenn durch 2π dividiert wird) auf die in dem Ausdrucke (12) vorkommenden Grössen

[1] Die in diesem Satze enthaltene Gleichmässigkeitseigenschaft der Punktmenge A ist für beliebiges N zum ersten Mal von Herrn H. WEYL in einem Vortrage in der Math. Gesellsch. in Göttingen (Juli 1913) explizit ausgesprochen. Herr WEYL gab dort einen neuen Beweis des KRONECKER'schen Satzes, der gleichzeitig die überall gleichmässige Dichte der Punktmenge A in Evidenz setzte. Die WEYL'sche Beweismethode (veröffentlicht in der Abhandlung: *Über ein Problem aus dem Gebiet der Diophantischen Approximationen*, Göttinger Nachrichten, 1914) hat sich für die Behandlung anderer Probleme in der Theorie der Diophantischen Approximationen von Wichtigkeit gezeigt. Wenn es sich aber nur um den verallgemeinerten KRONECKER'schen Satz des Textes handelt, kann man, wie ich nach dem WEYL'schen Vortrage bemerkt habe, den Beweis mit Hilfe des KRONECKER'schen Satzes selbst leicht erbringen (vergl. BOHR-COURANT, l. c.)

$$t\lambda_n = t\left(-\frac{\operatorname{Log} p_n}{2\pi}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots N)$$

angewendet. Die Möglichkeit dieser Verwendung des KRONECKER'schen Satzes beruht darauf, *dass die Zahlen* Log p_n $(n = 1, 2, \cdots N)$, auf Grund der eindeutigen Zerlegbarkeit einer ganzen positiven Zahl in Primfaktoren *linear unabhängig sind.*

Der KRONECKER'sche Satz ergibt, allgemein gesprochen, dass die obigen Zahlen $t\lambda_n$ $(n = 1, 2, \cdots N)$, obwohl sie ja in Wirklichkeit Funktionen nur des einen Parameters t sind, sich (modulo 1) fast ganz benehmen, als wären sie *von einander unabhängige* Variable.

Betrachten wir daher zunächst, statt der Funktion

$$F_N(\sigma_0 + it) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - r_n e^{2\pi i (t\lambda_n)}\right),$$

die Funktion der N reellen *unabhängigen* Variablen $y_1, y_2, \cdots y_N$

$$S_N(y_1, y_2, \cdots y_N) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - r_n e^{2\pi i y_n}\right).$$

Nach dem Studium dieser Funktion werden wir alsdann mit Hilfe des KRONECKER'schen Satzes auf die Eigenschaften der Funktion $F_N(\sigma_0 + it)$ zurückschliessen können.

Es bezeichne in der komplexen S_N-Ebene Σ_N die Menge aller Werte, welche $S_N(y_1, y_2, \cdots y_N)$ annimmt, wenn die Variablen $y_1, y_2, \cdots y_N$ unabhängig von einander sämtliche reelle Werte, oder was auf dasselbe herauskommt, sämtliche Werte $0 \leq y_n < 1$ durchlaufen. Hierbei durchläuft $r_n e^{2\pi i y_n}$ einen Kreis mit dem Mittelpunkte Null und dem Radius $r_n < 1$. Wenn aber eine komplexe Zahl x_n einen Kreis $|x_n| = r_n < 1$ durchläuft, so durchläuft $-\operatorname{Log}(1 - x_n)$ eine geschlossene konvexe Kurve Γ_n, die den Nullpunkt im Inneren enthält.[1] Es ist somit Σ_N einfach die Punktmenge, welche durch »Addition» der N konvexen Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_N$ entsteht, d. h. es ist Σ_N die Menge aller Punkte $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N$, wo γ_n $(n = 1, 2, \cdots N)$

[1] Die einfachste Weise, um die Konvexität dieser Kurve Γ_n einzusehen, darf wohl die folgende sein (vergl. BOHR-COURANT, l. c. pag 264, Note): Es genügt zu zeigen, dass der Winkel, den die Tangente an die Bildkurve $y = -\operatorname{Log}(1 - x)$ mit der Abszissenachse der y-Ebene bildet, sich monoton ändert, wenn x den Kreis $x = re^{i\theta}$ $(r < 1)$ im positiven Sinne durchläuft. Dieser Winkel ist aber gleich der Amplitude von $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{1-x} re^{i\theta} i = \frac{ix}{1-x}$, und es ist also nur zu zeigen, dass die Amplitude von $\frac{ix}{1-x}$ sich monoton ändert; das aber folgt unmittelbar daraus, dass, wenn x den Kreis $|x| = r$ durchläuft, $\frac{ix}{1-x}$ ebenfalls einen Kreis durchläuft, und zwar einen solchen, der den Nullpunkt im Inneren enthält.

einen beliebigen Punkt auf Γ_n bedeutet. Für eine solche geometrische Addition konvexer Kurven (auf die ich schon bei der Untersuchung von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ geführt wurde) gilt, wie ich an anderem Orte[1] bewiesen habe, der folgende Satz:

Es sei $\Gamma_n (n = 1, 2, \cdots N)$ eine geschlossene konvexe Kurve, die den Nullpunkt im Inneren enthält, und es bezeichne Σ_N die durch geometrische Addition entstehende Punktmenge $\Sigma_N = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots \Gamma_N$. Dann ist Σ_N ein Gebiet (inkl. Rand), welches entweder von einer einzelnen geschlossenen konvexen Kurve Y begrenzt wird, oder aber von zwei geschlossenen konvexen Kurven Y und I, von denen I ganz im Inneren von Y verläuft.

Es bezeichne ferner E_n bezw. e_n den grössten bezw. kleinsten Abstand vom Nullpunkte zur Kurve Γ_n, und es seien die Kurven so numeriert, dass das von der Kurve Γ_1 begrenzte Areal $\geqq$ das von der Kurve $\Gamma_n (n = 2, \cdots N)$ begrenzte Areal ist; dann tritt im Falle

$$E_1 \leqq \sum_{n=2}^{N} e_n$$

der erste der beiden obigen Fällen ein, d. h. es wird das Gebiet Σ_N von nur einer konvexen Kurve Y begrenzt, und es ist diese Kurve Y ganz im Kreisringe (inkl. Rand)

$$\sum_{n=1}^{N} e_n \leqq |z| \leqq \sum_{n=1}^{N} E_n$$

gelegen.

Ich habe hier diesen Satz in seiner allgemeinen Form nur zu Orientierung über den Charakter der Punktmenge Σ_N angeführt. Für den Gebrauch der vorliegenden Untersuchung wird der folgende Satz über die Punktmenge Σ_N reichlich genügen, welcher sofort aus dem obigen allgemeinen Satze abgeleitet werden kann.

Hilfssatz 7: Es sei ϱ eine beliebige positive Zahl; dann gibt es ein $M_1 = M_1(\varrho)$ derart, dass bei jedem $M \geqq M_1$ die Menge Σ_M aller Werte $S_M(y_1, y_2, \cdots y_M)$ sämtliche Zahlen z mit $|z| \leqq \varrho$ enthält.

Beweis: Wegen $r_1 > r_2 > r_3 \ldots$ ist für $n \geqq 2$ die Kurve Γ_n ganz innerhalb der Kurve Γ_1 gelegen. Ferner ist

$$E_n = \max_{0 \leqq y_n < 1} |-\operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i y_n})| = -\operatorname{Log}(1 - r_n),$$

$$e_n = \min_{0 \leqq y_n < 1} |-\operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i y_n})| = \operatorname{Log}(1 + r_n).$$

[1] H. Bohr, *Om Addition af uendelig mange konvekse Kurver*, Oversigt over det Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. 1913.

Es ist folglich $\lim\limits_{n=\infty} \frac{e_n}{r_n} = 1$, also, wegen der Divergenz von Σr_n, die Reihe Σe_n divergent. Es sei nunmehr M_1 so gross gewählt, dass die beiden Ungleichungen

$$E_1 < \sum_{n=2}^{M_1} e_n, \qquad \varrho < \sum_{n=1}^{M_1} e_n$$

erfüllt sind. Dann ist für dieses M_1 die Bedingung des Hilfssatzes offenbar erfüllt; in der Tat bei jedem $M \geqq M_1$ wird, nach dem letzten Teil des obigen Satzes, das Gebiet Σ_M nur von einer einzelnen Kurve begrenzt, welche den ganzen Kreis $|z| \leqq \varrho$ in seinem Innern enthält.

Während dieser letzte Hilfssatz, welcher in unpräziser Formulierung aussagt: mit unendlich wachsendem M breitet das Gebiet Σ_M sich nach und nach über die ganze Ebene aus, offenbar auf die Divergenz der Reihe Σr_n beruht, wird der Beweis des folgenden Hilfssatzes, welcher die Funktion

$$S_{M,N}(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N) = -\sum_{n=M+1}^{N} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i y_n})$$

bei sehr grossen M und $N > M$ behandelt, im Gegenteil auf die Konvergenz der Reihe Σr_n^2 bauen.

Hilfssatz 8: Es sei $\varepsilon > 0$; dann gibt es ein $M' = M'(\varepsilon)$ mit folgender Eigenschaft: Bei jeden $N > M \geqq M'$ gibt es in $N-M$-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leqq y_n < 1$ $(n = M+1, M+2, \cdots N)$ eine endliche Anzahl parallel den Achsen orientierter Würfelchen $\alpha_n < y_n < \alpha_n + d$ $(n = M+1, \cdots N)$ von denen keine zwei einen gemeinsamen inneren Punkt besitzen, deren Gesamtinhalt $> \frac{1}{2}$ ist, und so dass für jeden Punkt $(y_{M+1}, \cdots y_N)$ einer dieser Würfelchen die Ungleichung

$$|S_{M,N}(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)| = \left| -\sum_{n=M+1}^{N} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i y_n}) \right| < \varepsilon$$

besteht.

Beweis: Ich betrachte das über den $N-M$-dimensionalen Einheitswürfel Q erstreckte Integral

$$I_{M,N} = \int\int_Q \cdots \int |S_{M,N}(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)|^2 dy_{M+1} dy_{M+2} \cdots dy_N$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S_{M,N}(y_{M+1}, \cdots y_N)|^2 dy_{M+1} \cdots dy_N.$$

Wegen

$$|S_{M,N}(y_{M+1},\cdots y_N)|^2 = \left(-\sum_{n=M+1}^{N}\operatorname{Log}(1-r_n e^{2\pi i y_n})\right)\left(-\sum_{n=M+1}^{N}\operatorname{Log}(1-r_n e^{-2\pi i y_n})\right) =$$

$$= \left(\sum_{n=M+1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_n^m e^{2\pi i m y_n}}{m}\right)\left(\sum_{n=M+1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_n^m e^{-2\pi i m y_n}}{m}\right)$$

folgt in bekannter Weise (durch Ausmultiplizieren und Integrieren)

$$I_{M,N} = \sum_{n=M+1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_n^{2m}}{m^2} < \sum_{n=M+1}^{\infty} r_n^2 \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}\sum_{n=M+1}^{\infty} r_n^2 .$$

Es sei M' so gewählt, dass

$$\frac{\pi^2}{6}\sum_{n=M'+1}^{\infty}\frac{1}{r_n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

ist. Dann gilt bei jeden $N > M \geqq M'$ die Ungleichung

$$I_{M,N} < \frac{\varepsilon^2}{2} .$$

Hieraus folgt aber unmittelbar, nach der Definition des bestimmten $N-M$-dimensionalen Integrals einer stetigen Funktion, die Möglichheit den $N-M$-dimensionalen Einheitswürfel Q so in einer endlichen Anzahl parallel den Achsen orientierter Würfelchen q_ν mit den Inhalten i_ν einzuteilen, dass die Summe über diese Teilwürfel erstreckt

$$\sum_{(\nu)} \underset{(\text{in } q_\nu)}{\operatorname{Max}} |S_{M,N}(y_{M+1},\cdots y_N)|^2 i_\nu < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

ist. In dieser Summe ist aber jedes Glied $\geqq 0$; also muss der Gesamtinhalt derjenigen dieser Würfelchen, für welche $\operatorname{Max}|S_{M,N}| < \varepsilon$ ist, grösser sein als $\frac{1}{2}$. Diese letzten Würfelchen genügen somit den sämtlichen Bedingungen des Hilfssatzes.

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich nunmehr zum Beweise des Hauptsatzes dieses Paragraphen über.

Satz A: *Bei festem σ_0 des Intervalles $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$ liegen die Werte, welche $\log \zeta(s)$ in denjenigen Punkten der Halbgeraden $\sigma = \sigma_0, t > 0$ annimmt, die zum Gebiete*

G gehören, in der ganzen Ebene überall dicht, d. h. bei gegebenem komplexem a und einem $\varepsilon > 0$ hat die Ungleichung

$$|\log \zeta(s) - a| < \varepsilon$$

eine in G gelegene Lösung $s = \sigma_0 + it$ mit $t > 0$.

Beweis: Ich bestimme zunächst, auf Grund der beiden Hilfssätze 7 und 8, eine ganze Zahl M_0 so gross, dass sie die beiden folgenden Eigenschaften besitzt.

1) Es gibt im M_0-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leq y_n < 1$ $(n = 1, 2, \cdots M_0)$ einen Punkt $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_{M_0})$, für welchen

$$-\sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i \bar{y}_n}) = a \tag{13}$$

ist.

2) Bei jedem festen $N > M_0$ gibt es im $N - M_0$-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leq y_n < 1$ $(n = M_0 + 1, M_0 + 2, \cdots N)$ eine endliche Anzahl parallel den Achsen orientierter Würfelchen q_ν $(\nu = 1, 2, \cdots \nu_0)$ von denen keine zwei einen gemeinsamen inneren Punkt besitzen, deren Gesamtinhalt $> \frac{1}{2}$ ist, und so dass in allen inneren Punkten $(y_{M_0+1}, y_{M_0+2}, \cdots y_N)$ dieser Würfelchen

$$\left| -\sum_{n=M_0+1}^{N} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i y_n}) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

ist.

Nachdem M_0 festgelegt ist, bestimme ich, was unter Berücksichtigung von (13) offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist, im M_0-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leq y_n < 1$ $(n = 1, 2, \cdots M_0)$ einen kleinen parallel den Achsen orientierten Würfel q mit der Seitenlänge d, dessen Inhalt d^{M_0} ich mit i bezeichne, so dass im ganzen Würfel q die Ungleichung

$$\left| -\sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i y_n}) - a \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{15}$$

besteht.

Ich betrachte nunmehr, bei einem festen $N > M_0$, diejenige Punkte P des N-dimensionalen Einheitswürfels $0 \leq y_n < 1$ $(n = 1, 2, \cdots M_0, M_0 + 1, \cdots N)$, deren M_0 erste Koordinaten im M_0-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leq y_n < 1$ $(n = 1, 2, \cdots M_0)$ einen Punkt im Innern der obigen Würfel q bestimmen, während der zu den $N - M_0$ letzten Koordinaten gehörige Punkt des $N - M_0$-dimensionalen Einheitswürfels $0 \leq y_n < 1$ $(n = M_0 + 1, \cdots N)$ im Innern eines der obigen in endlicher An-

zahl $\nu_0 = \nu_0(N)$ vorhandenen kleinen Würfeln q_ν mit Gesamtinhalt $> \frac{1}{2}$ gelegen ist. Die Menge dieser Punkte P besteht offenbar im N-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leq y_n < 1 \, (n = 1, 2, \cdots N)$ aus ν_0 Parallelepipeden $y'_n < y_n < y'_n + d_n$ (wo $d_1 = d_2 = \cdots = d_{M_0} = d$; $d_{M_0+1} = d_{M_0+2} = \cdots = d_N$ ist), deren Gesamtinhalt $> i \cdot \frac{1}{2}$ ist, also *grösser als eine feste, d. h. nicht von N* (wohl aber von M_0) *abhängige Zahl.*

Ich wende nun den verallgemeinerten KRONECKER'schen Satz (Hilfssatz 6) an auf die Zahlen $\lambda_n = -\frac{\operatorname{Log} p_n}{2\pi}$ $(n = 1, 2, \cdots N)$ und die soeben besprochenen ν_0 Parallelepipeden des N-dimensionalen Einheitswürfels, deren Gesamtinhalt $> \frac{i}{2}$ ist. Dieser Satz ergibt sofort, stets bei einem festen $N > M_0$, die Existenz eines $T' = T'(N)$, so dass für alle $T \geq T'$ die Strecke $0 < t < T$ eine endliche Anzahl nicht übereinandergreifender Intervallen mit Gesamtlänge $> \frac{i}{2} T$ derart enthält, dass für jedes τ im Innern eines dieser Intervallen der Punkt $(\tau\lambda_1, \tau\lambda_2, \cdots \tau\lambda_N)$, jede Koordinate modulo 1 reduziert, in einem der obigen ν_0 Parallelepipeden gelegen ist; für jedes solche τ gilt daher, wegen (15) und (14), die Ungleichung

$$|F_N(\sigma_0 + i\tau) - a| = \left| -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i(\tau\lambda_n)}) - a \right|$$

$$\leq \left| -\sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i(\lambda\tau_n)}) - a \right| + \left| -\sum_{n=M_0+1}^{N} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i(\tau\lambda_n)}) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Bisher war N eine beliebig gewählte Zahl $> M_0$. Ich bestimme nun schliesslich, auf Grund des Ergebnisses von § 1 über den Rest $R_N(\sigma_0 + it)$ (vergl. das Corollar des Hilfssatzes 5), ein festes $N_0 > M_0$ so, dass für alle hinreichend grosse T, d. h. für $T \geq T_1$, das Intervall $0 < t < T$ (sogar das Intervall $2 < t < T$) eine endliche Anzahl nicht übereinandergreifender Intervallen mit Gesamtlänge $> \left(1 - \frac{i}{2}\right) T$ enthält, mit folgender Eigenschaft: Für jedes τ im Innern eines dieser Intervallen gehört $\sigma_0 + i\tau$ dem Gebiete G an, und es ist

$$|R_{N_0}(\sigma_0 + i\tau)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es ist nunmehr leicht den Beweis des Satzes A zu Ende zu führen. In der Tat, es sei $T > \operatorname{Max}(T_1, T'(N_0))$; dann gibt es (da ja die Summe der beiden obigen

Gesamtintervallängen, von denen die eine $> \frac{1}{2} T$, die andere $> \left(1 - \frac{1}{2}\right) T$ ist, grösser ist als die ganze Länge T der Strecke $0 < t < T$) einen Punkt t im Intervalle $0 < t < T$, welcher *gleichzeitig* die beiden Bedingungen erfüllen:

$$|F_{N_0}(\sigma_0 + it) - a| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$|R_{N_0}(\sigma_0 + it)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für dieses $t > 0$ gilt also die Ungleichung

$$|\log \zeta(\sigma_0 + it) - a| < \varepsilon.$$

Damit ist der Satz A bewiesen.

§ 3.

Beweis des Satzes B.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes, in welchem, sowie durchweg im folgenden, α und β feste Zahlen bezeichnen, die den Bedingungen $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$ genügen, während a eine beliebige fest gewählte komplexe Zahl bedeutet.

Satz B: *Es bezeichne $L_{a,\alpha,\beta}(T)$ die Anzahl der Wurzeln von log $\zeta(s) = a$ in demjenigen Teil des Gebietes G, der dem Rechtecke $\alpha < \sigma < \beta$, $0 < t < T$ angehört. Dann ist*

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{T=\infty} \frac{L_{a,\alpha,\beta}(T)}{T} > 0.$$

Im vorhergehenden Paragraphen war die Aufgabe zu zeigen, dass log $\zeta(s)$, wenn s eine gewisse Wertmenge durchläuft (die Punkte der Halbgeraden $\sigma = \sigma_0$, $t > 0$), einer gegebenen Zahl a *beliebig nahe kommt.* Im vorliegenden Paragraphen dagegen handelt es sich um den Nachweis, dass log $\zeta(s)$ in gewissen Gebieten den Wert a *tatsächlich annimmt.* Um diesen Nachweis zu führen, muss mit der in § 2 verwendeten arithmetischen Methode noch eine andere, schon in früheren Abhandlungen von mir über Dirichlet'sche Reihen angewandte Methode verknüpft

werden, die allgemein gesprochen darin besteht, dass zunächst eine analytische Hilfsfunktion $H(s)$ konstruiert wird, welche mit der zu untersuchenden Funktion (hier $\log \zeta(s)$) in engem Zusammenhange steht, und die in einem vorgegebenen Punkt s_0 den gegebenen Wert a tatsächlich annimmt; mit dieser Hilfsfunktion wird danach die gegebene Funktion verglichen.

Diese Hilfsfunktion $H(s)$ wird durch den folgenden Satz eingeführt.

Hilfssatz 9: Es sei $\sigma_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$, *also* $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$. *Dann gibt es eine reelle Zahlenfolge* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n, \cdots$ *mit den beiden folgenden Eigenschaften:*

1) *Es konvergiert für* $\sigma > \frac{1}{2}$ *die Reihe*

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\,(1 - e^{2\pi i \varphi_n} p_n^{-s}),$$

sogar bei jedem $\varepsilon > 0$, $E > 0$ *im Gebiete* $\sigma > \frac{1}{2} + \varepsilon$, $|s| < E$ *gleichmässig, und stellt also für* $\sigma > \frac{1}{2}$ *eine reguläre analytische Funktion* $H(s)$ *dar.*

2) *Es ist*

$$H(\sigma_0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\,(1 - e^{2\pi i \varphi_n} p_n^{-\sigma_0}) = a.$$

Beweis: Es ist die erste Bedingung offenbar erfüllt, wenn für alle n von einer gewissen Stelle an, d. h. für $n > N$, die Zahl $\varphi_n = \frac{n}{2}$ (also $e^{2\pi i \varphi_n} = (-1)^n$) gewählt wird; denn es ist ja die Reihe $\Sigma \operatorname{Log}(1 - (-1)^n p_n^{-s})$ im Gebiete $\sigma > \frac{1}{2} + \varepsilon$, $|s| < E$ gleichmässig konvergent, da die beiden Reihen $\Sigma(-1)^n p_n^{-s}$ und $\Sigma |(-1)^n p_n^{-s}|^2 = \Sigma p_n^{-2\sigma}$ in diesem Gebiete gleichmässig konvergieren. Ich wähle die ganze Zahl N so (d. h. so gross) dass einerseits

$$\left| -\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}\,(1 - (-1)^n p_n^{-\sigma_0}) \right| < 1$$

ist, während andererseits die aus den Werten

$$S_N(y_1, y_2, \cdots y_N) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\,(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{2\pi i y_n})$$

bestehende Punktmenge Σ_N die sämtlichen Zahlen z im Kreise $|z - a| < 1$ enthält, was auf Grund des Hilfssatzes 7 möglich ist. Dann enthält die Menge Σ_N speziell die Zahl

$$z = a + \sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}\,(1 - (-1)^n p_n^{-\sigma_0}),$$

d. h. es gibt N reelle Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_N$ derart, dass

$$-\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\,(1 - e^{2\pi i \varphi_n} p_n^{-\sigma_0}) = a + \sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}\,(1 - (-1)^n p_n^{-\sigma_0})$$

ist, also, wenn für $n > N$ die Zahl $\varphi_n = \frac{n}{2}$ gewählt wird, dass die Identität

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\,(1 - e^{2\pi i \varphi_n} p_n^{-\sigma_0}) = a$$

besteht. Die somit bestimmten Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ erfüllen somit die beiden Bedingungen des Hilfssatzes. Damit ist dieser Satz bewiesen.

Es sei um den Punkt $\sigma_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ein Kreis mit dem Radius $r < \frac{\beta - \alpha}{4}$ so gezogen, dass die obige Funktion $H(s)$ des Hilfssatzes 9 (welche im Mittelpunkte σ_0 den Wert a annimmt, und die, wie z. B. aus dem Verhalten für $\sigma \to +\infty$ unmittelbar hervorgeht, keine Konstante ist) auf dem ganzen Rande des Kreises, d. h. für $|s - \sigma_0| = r$, von a verschieden ist, und es bezeichne μ das Minimum von $|H(s) - a|$ für $|s - \sigma_0| = r$. Dann genügt es offenbar, *damit* $\log \zeta(s)$ *innerhalb eines im Gebiete G gelegenen Kreises* $|s - (\sigma_0 + i\tau)| \leq r$ *den Wert a annimmt, dass für* $|s - \sigma_0| \leq r$ *die Ungleichung*

$$|\log \zeta(s + i\tau) - H(s)| < \mu$$

besteht; denn dann haben ja die beiden Funktionen $\log \zeta(s + i\tau)$ und $H(s)$, nach einem bekannten funktionentheoretischen Satze, im Kreise $|s - \sigma_0| < r$ dieselbe Anzahl a-Stellen, d. h. wenigstens eine.

Ich beweise nunmehr den folgenden Hilfssatz 10, welcher beim Beweise des Satzes B die entsprechende Rolle spielt, wie der Hilfssatz 8 in § 2 beim Beweise des Satzes A.

Hilfssatz 10: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $M' = M'(\varepsilon)$ mit folgender Eigenschaft: Bei jeden $N > M \geq M'$ gibt es in $N - M$-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leq y_n < 1$ $(n = M + 1, M + 2, \cdots N)$ eine endliche Anzahl parallel den Achsen orientierter Würfelchen (ohne gemeinsame innere Punkte) mit Gesamtinhalt $> \frac{1}{2}$ derart dass für jeden festen Punkt $(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)$ im Innern eines dieser Würfelchen die Funktion

$$(16) \qquad S_{M,N}(s;\, y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N) = -\sum_{n=M+1}^{N} \operatorname{Log}\,(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n})$$

im ganzen Kreise $|s-\sigma_0| \leq r$ *absolut genommen kleiner ist als* ε.

Beweis: Es ist offenbar erlaubt, auf Grund des Hilfssatzes 4 in § 1, beim Beweise die Ungleichung

$$(17) \qquad |S_{M,N}(s;\, y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)| < \varepsilon \qquad (\text{für } |s-\sigma_0| \leq r)$$

durch die Ungleichung

$$(18) \qquad \iint\limits_{|s-\sigma_0| \leq 2r} |S_{M,N}(s;\, y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)|^2 \, d\sigma\, dt < \varepsilon'$$

zu ersetzen, wo ε' eine passend gewählte positive Zahl ist; denn nach dem Hilfssatze 4 gibt es zu dem gegebenen ε und den beiden Kreisradien r und $2r$ ein ε', so dass aus der Ungleichung (18) die Ungleichung (17) folgt.

Ich betrachte nun für einen beliebigen festen Punkt $(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)$ des $N-M$-dimensionalen Einheitswürfels Q das Integral

$$\iint\limits_{|s-\sigma_0| \leq 2r} |S_{M,N}(s;\, y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)|^2 \, d\sigma\, dt = g(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)$$

und integriere diese letzte in Q stetige Funktion $g(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)$ über den ganzen Einheitswürfel Q; dabei erhalte ich

$$J_{M,N} = \int\!\!\int\!\cdots\!\int\limits_{(Q)} g(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)\, dy_{M+1}\, dy_{M+2} \cdots dy_N$$

$$= \iint\limits_{|s-\sigma_0| \leq 2r} d\sigma\, dt \int\!\!\int\!\cdots\!\int\limits_{(Q)} |S_{M,N}(s;\, y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)|^2\, dy_{M+1}\, dy_{M+2} \cdots dy_N$$

$$= \iint\limits_{|s-\sigma_0| \leq 2r} h(s)\, d\sigma\, dt,$$

wo

$$h(s) = \int\!\!\int\!\cdots\!\int\limits_{(Q)} |S_{M,N}(s;\, y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)|^2\, dy_{M+1}\, dy_{M+2} \cdots dy_N$$

ist. Nun ist aber nach (16)

$$S_{M,N}(\sigma + it;\, y_{M+1}, \cdots y_N) = S_{M,N}(\sigma;\, y_{M+1} + k_{M+1}, \cdots y_N + k_N),$$

wo

$$k_n = -\frac{t \operatorname{Log} p_n}{2\pi} \quad (n = M + 1, \cdots N)$$

ist. Daraus folgt — wie durch die Transformation $y'_n = y_n + k_n (n = M + 1, \cdots N)$ unmittelbar zu ersehen ist, welche ja den Einheitswürfel Q in einen äquivalenten (d. h. nach Reduktion der Koordinaten modulo 1 mit Q zusammenfallenden) Bereich überführt — dass das Integral $h(s) = h(\sigma + it)$ nur von σ, d. h. nicht von der Ordinate t abhängt. Da nun (wörtlich wie beim Beweise des Hilfssatzes 8) für $\sigma > \frac{1}{2}$

$$h(\sigma) = \int\int\cdots\int_{(Q)} |S_{M,N}(\sigma;\, y_{M+1}, \cdots y_N)|^2 dy_{M+1} \cdots dy_N < \frac{\pi^2}{6} \sum_{n=M+1}^{\infty} p_n^{-2\sigma}$$

ist, so folgt, wegen $\sigma_0 - 2r > \alpha$

$$J_{M,N} = \int\int_{|s-\sigma_0| \leq 2r} h(\sigma) d\sigma dt < 4\pi r^2 \left(\frac{\pi^2}{6} \sum_{n=M+1}^{\infty} p_n^{-2\alpha} \right) = \varepsilon_M,$$

wo $\varepsilon_M \to 0$ für $M \to \infty$. Also gibt es ein M', so dass für $N > M \geq M'$ das Integral

$$J_{M,N} = \int\int\cdots\int_{(Q)} g(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N) dy_{M+1} dy_{M+2} \cdots dy_N < \frac{\varepsilon'}{2}$$

ist. Aus dieser letzten Ungleichung ergibt sich aber sofort nach einer schon früher verwendeten Schlussweise (vergl. den Beweis des Hilfssatzes 8) die Existenz einer endlichen Anzahl in Q gelegener Würfelchen mit Gesamtinhalt $> \frac{1}{2}$, so dass im Innern aller dieser Würfelchen die zu beweisende Ungleichung

$$(18) \qquad g(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N) < \varepsilon'$$

erfüllt ist. Damit ist der Hilfssatz 10 bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich nunmehr zum *Beweise des Satzes B* über:

Es sei zunächst die Zahl M_0 so (d. h. so gross) gewählt, dass einerseits, auf Grund der gleichmässigen Konvergenz der Reihe $H(s) = -\Sigma \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i \varphi_n})$, wo $H(s)$ die durch den Hilfssatz 9 eingeführte Hilfsfunktion bedeutet, die Ungleichung

$$(19) \qquad \left| H(s) + \sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}\,(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i \varphi_n}) \right| < \frac{\mu}{4}$$

für $|s - \sigma_0| \leq r$ besteht, wo μ die auf Seite 95 definierte Zahl ist, während andererseits, auf Grund des Hilfssatzes 10, bei jedem $N > M_0$ im $N - M_0$-dimensionalen Einheitswürfel $Q: 0 \leq y_n < 1$ $(n = M_0 + 1, \cdots N)$ eine endliche Anzahl parallel den Achsen orientierter Würfelchen mit Gesamtinhalt $> \frac{1}{2}$ derart existieren, dass für jeden inneren Punkt $(y_{M_0+1}, \cdots y_N)$ einer dieser Würfelchen die Ungleichung

$$\left| - \sum_{n=M_0+1}^{N} \operatorname{Log}\,(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n}) \right| < \frac{\mu}{4}$$

für $|s - \sigma_0| \leq r$ erfüllt ist.

Nachdem M_0 festgelegt ist, bestimme ich, aus Stetigkeitsgründen, im M_0-dimensionalen Einheitwürfel $0 \leq y_n < 1$ $(n = 1, 2, \cdots M_0)$ einen kleinen Würfel q mit dem Inhalte i derart, dass für jeden inneren Punkt $(y_1, y_2, \cdots y_{M_0})$ dieses Würfelchens q die Ungleichung

$$\left| - \sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}\,(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n}) + \sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}\,(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i \varphi_n}) \right| < \frac{\mu}{4}$$

im Kreise $|s - \sigma_0| \leq r$ besteht.

Folglich existiert, bei jedem festen $N > M_0$ im N-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leq y_n < 1$ $(n = 1, 2 \cdots M_0, M_0 + 1 \cdots N)$ eine endliche Anzahl von kleinen Parallelepipeden mit Gesamtinhalt $> \frac{1}{2} i$ derart, dass für jedem im Innern dieser Parallelepipeden gelegenen Punkt $(y_1, y_2, \cdots y_{M_0}, \cdots y_N)$ die beiden Ungleichungen

$$\left| - \sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}\,(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n}) + \sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}\,(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i \varphi_n}) \right| < \frac{\mu}{4}$$

und

$$\left| - \sum_{n=M_0+1}^{N} \operatorname{Log}\,(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n}) \right| < \frac{\mu}{4}$$

im Kreise $|s - \sigma_0| \leq r$ bestehen. Für jeden solchen Punkt $(y_1, y_2, \cdots y_N)$ gilt daher, unter Berücksichtigung von (19), die Ungleichung

$$\left| H(s) + \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\,(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n}) \right| < \frac{3\mu}{4}.$$

Ich wende nunmehr den verallgemeinerten KRONECKER'schen Satz an auf die Zahlen $\lambda_n = -\frac{\operatorname{Log} p_n}{2\pi}$ $(n = 1, 2, \cdots N)$ und die obigen Parallelepipeden des N-dimensionalen Einheitswürfels mit Gesamtinhalt $> \frac{i}{2}$. Dieser Satz ergibt für alle hinreichend grosse T, d. h. für $T \geq T' = T'(N)$ die Existenz einer endlichen Anzahl auf der Strecke $0 < t < T$ gelegenen Intervallen (I'), von denen keine zwei einen inneren Punkt gemeinsam haben, deren Gesamtlänge $> \frac{i}{2} T$ ist, und derart, dass für jeden inneren Punkt τ einer dieser Intervallen die Ungleichung

$$\left| H(s) + \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i(\tau \lambda_n)}\right) \right| < \frac{3\mu}{4}$$

d. h. die Ungleichung

$$|H(s) - F_N(s + i\tau)| < \frac{3\mu}{4}$$

im Kreise $|s - \sigma_0| < r$ besteht.

Es war bisher N eine beliebige ganze Zahl $> M_0$. Ich wähle nunmehr, auf Grund des Hilfssatzes 5 in § 1, ein festes $N_0 > M_0$ derart, dass für alle hinreichend grosse T, d. h. für $T \geq T_1$, auf der Strecke $0 < t < T$ eine endliche Anzahl nicht übereinandergreifender Intervallen (I'') liegen, deren Gesamtlänge $> \left(1 - \frac{i}{3}\right) T$ ist, und so dass für jeden inneren Punkt τ einer dieser Intervallen der ganze Streifen $\sigma \geq \alpha$, $\tau - \frac{1}{2} \leq t \leq \tau + \frac{1}{2}$ im Gebiete G liegt und dass jedes s dieses Streifens der Bedingung

$$|R_N(s)| < \frac{\mu}{4}$$

genügt. Da der Kreis $|s - (\sigma_0 + i\tau)| \leq r$ ganz innerhalb des Streifens $\sigma \geq \alpha$, $\tau - \frac{1}{2} \leq t \leq \tau + \frac{1}{2}$ gelegen ist, gilt a fortiori für jedes solche τ die Ungleichung

$$|R_N(s + i\tau)| < \frac{\mu}{4}$$

im Kreise $|s - \sigma_0| \leq r$.

Ich betrachte nun schliesslich für ein $T > T_0 = \operatorname{Max}(T'(N_0), T_1)$ diejenige endliche Anzahl Intervallen (I''') von Gesamtlänge $> \left(\frac{i}{2} T - \frac{i}{3} T\right) = \frac{i}{6} T$, deren innere Punkte diejenige Punkte der Strecke $0 < t < T$ sind, welche den beiden obigen

Intervallmengen (I') (für $N = N_0$) und (I'') gemeinsam sind. Für jedes τ eines dieser Intervallen (I''') gelten im Kreise $|s - \sigma_0| \leqq r$ *gleichzeitig* die beiden Ungleichungen

$$|H(s) - F_N(s + i\tau)| < \frac{3\mu}{4}$$

und

$$|R_N(s + i\tau)| < \frac{\mu}{4},$$

also die Ungleichung

$$|\log \zeta(s + i\tau) - H(s)| < \mu.$$

Hieraus folgt aber (vergl. Seite 95) nach der Definition von μ, *dass* $\log \zeta(s)$ *im Kreise* $|s - (\sigma_0 + i\tau)| < r$ *mindestens eine a-Stelle besitzt.*

Es ist nunmehr leicht, den Beweis des Satzes B zu vollenden. In der Tat, da einerseits eine endliche Anzahl auf der Strecke $0 < t < T$ gelegenen Intervallen mit Gesamtlänge $> \frac{i}{6} T$ offenbar mindestens $\left(\frac{i}{6} T - 1\right)$ Werte τ enthalten, von denen je zwei einen Differenz $\geqq 1$ haben, während andererseits zwei Kreise $|s - (\sigma_0 + i\tau_1)| < r$ und $|s - (\sigma_0 + i\tau_2)| < r$, wo $|\tau_1 - \tau_2| \geqq 1$ ist, gewiss keinen gemeinsamen Punkt besitzen, so folgt für jedes $T > T_0$ die Existenz von mindestens $\left(\frac{i}{6} T - 1\right)$ *verschiedenen* a-Stellen im Streifen $\sigma_0 - r < \sigma < \sigma_0 + r, -r < t < T + r$, also a fortiori im Streifen $\alpha < \sigma < \beta, -1 < t < T + 1$.

Hieraus folgt aber unmittelbar, wenn $L_{a,\alpha,\beta}(T)$ die Anzahl der a-Stellen von $\log \zeta(s)$ im Rechtecke $\alpha < \sigma < \beta, 0 < t < T$ bezeichnet, die Ungleichung

$$\liminf_{T=\infty} \frac{L_{a,\alpha,\beta}(T)}{T} > 0.$$

Damit ist der Satz B bewiesen.

SUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS INTÉGRALES, ET SUR QUELQUES PROBLÈMES QUI S'Y RATTACHENT.

PAR

HENRI VILLAT

à Montpellier.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude de certaines équations intégrales, d'un type qui généralise le type classique de Fredholm, à savoir des équations de la forme

$$A(x)f(x) + \int_a^b [f(x) - f(s)]\, N(x,s)\, ds = \varphi(x)$$

ou mieux

$$A(x)f(x) + \int_a^b f(s)\, N(x,s)\, ds = \varphi(x).$$

La fonction inconnue est $f(x)$, et le noyau $N(x,s)$ présente pour $s=x$ une discontinuité polaire, il devient infini comme $\frac{K}{s-x}$, K étant une constante. Dans le seconde écriture, l'intégrale est considérée comme égale à sa valeur principale au sens de Cauchy. Des équations de cette nature se rencontrent dans diverses questions d'Hydrodynamique que j'expose ailleurs (cf. Comptes-Rendus Acad. sc. Paris, 6 janvier 1913, t. 156, p. 58) et pour lesquelles il était souhaitable d'obtenir la solution effective des équations proposées, sous une forme utilisable.

Dans ce qui suit, j'expose la solution de divers problèmes [1] desquels je dé-

[1] Certains de ces problèmes prennent leur point de départ dans la détermination d'une fonction analytique dans une aire annulaire, par diverses données aux frontières (partie réelle, partie imaginaire, etc.). J'ai indiqué déjà (Circolo mat. di Palermo, 1912, p. 134/175. Comptes-Rendus, 13 mars 1911, 4 sept. 1911. Xenia, Hommage international à l'Université de Grèce, Athènes, 1912, p. 359/380) plusieurs résultats sur ces questions. Dans un beau Mémoire (Circolo mat. di Palermo, 1913, 2ème Sem. p. 1/28) M. U. Dini est revenu, d'ailleurs d'une manière très générale et d'un point de vue différent, sur le même ordre de sujets.

duis ensuite la solution, sous forme simple et par une voie indirecte, de certaines équations intégrales particulières, de la forme indiquée, — et dans lesquelles rentrent justement celles qui se sont présentées dans les questions d'Hydrodynamique auxquelles je faisais allusion plus haut (ou du moins on peut ramener celles-ci à celles-là sans difficulté).

En terminant, je fais voir qu'en utilisant une transformation de M. D. Hilbert, on peut, dans des cas généraux, où rentrent les équations étudiées antérieurement, ramener les équations intégrales en question, à des équations de Fredholm. Mais par ces considérations il serait extrêmement difficile, pour ne pas dire impossible, de retrouver sous la même forme simple les résultats exposés dans ce Travail.

Le résumé d'une partie de ce Mémoire a été communiqué à l'Académie des Sciences, le 23 oct. 1911.

PREMIÈRE PARTIE.

§ 1. Nous commencerons par rappeler, au sujet d'une fonction analytique dans un cercle, certaines propriétés qui nous seront utiles par la suite, et qui sont pour la plupart déjà connues; aussi passerons-nous rapidement sur ces propriétés.

On sait (cf. Schwartz, Zur Integrat. der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$, Jnal de Crelle, 1872, p. 218; T. Boggio, Sulle funzioni di variabile complessa, R. Accad. di Torino, 47 (1911); H. Villat, Bulletin de la Soc. Mathém. 39 (1911), p. 443) que dans un cercle de rayon un ayant pour centre l'origine du plan $z = x + iy$, une fonction analytique régulière dont la partie réelle prenne à la frontière les valeurs $f(\theta)$, est égale, à une constante imaginaire pure, près, à

$$(1) \qquad \Delta(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}}\,d\theta = F(x, y) + iG(x, y).$$

Plus précisément, on sait (cf. P. Fatou, Séries trigonométriques, Acta Mathematica, 30, 1906, p. 335) que si $f(\theta)$ est une fonction périodique, de période 2π, bornée et sommable (au sens de Lebesgue) la partie réelle de l'expression ci-dessus tend vers $f(\theta)$ lorsque le point z tend vers le point $e^{i\theta}$ en suivant le rayon qui y aboutit. Il ne peut y avoir exception que pour des points de la

circonférence $|z| = 1$, formant un ensemble de mesure nulle (Fatou, loc. cit. p. 348). La même conclusion est valable si $f(\theta)$ est une fonction non bornée, mais intégrable en valeur absolue (id. p. 373).

La partie imaginaire de la fonction $A(z)$ est bien déterminée dans le cercle; pour qu'elle ait une limite quand z tend vers $e^{i\theta}$ en suivant le rayon, il faut et il suffit (Fatou, p. 360) que l'intégrale

$$(2) \qquad \int_{\varepsilon}^{\pi} [f(\theta + t) - f(\theta - t)] \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \, dt$$

ait une limite quand ε tend vers zéro par valeurs positives; la partie imaginaire, et l'intégrale ci-dessus, tendent de plus vers leurs limites, uniformément ensemble (c'est à dire qu'il en est ainsi pour la partie imaginaire, sous la condition, nécessaire et suffisante, que l'intégrale tende uniformément vers sa limite).

Si l'intégrale en question a une limite la partie imaginaire de $A(z)$ est égale, au point $e^{i\theta}$, à

$$(3) \qquad g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon)}{\operatorname{tg} \frac{\theta - \varepsilon}{2}} \, d\varepsilon$$

où l'intégrale est considérée comme égale à sa valeur principale, au sens de Cauchy. En particulier, si la fonction $f(\theta)$ satisfait à une condition de Lipschitz, on peut écrire

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon) - f(\theta)}{\operatorname{tg} \frac{\theta - \varepsilon}{2}} \, d\varepsilon$$

l'intégrale ayant son sens ordinaire, et la fonction $g(\theta)$ satisfera à une condition de même sorte (Fatou, p. 361).

Comme l'a montré L. Lichtenstein (Journal de Crelle, 141, 1912, p. 12/42), si $f(\theta)$ est intégrable, et qu'il en soit de même de son carré, la fonction $g(\theta)$ est bien déterminée, sauf peut-être pour un ensemble, de mesure nulle, de points de la circonférence frontière; et cette fonction est intégrable, ainsi que son carré, dans l'intervalle 0, 2π.

Si l'on pose

$$z = \varrho e^{i\theta}$$

la dérivée partielle $\frac{\partial A}{\partial \varrho}$ existe à l'intérieur de la circonférence de rayon 1; on en

déduit par conséquent la dérivée $\frac{\partial F}{\partial \varrho}$, qui, si elle a une limite quand ϱ tend vers un, nous fournira la dérivée normale extérieure de la fonction F sur la frontière. Si $f(\theta)$ est l'intégrale indéfinie d'une fonction $f'(\theta)$ intégrable ainsi que son carré, alors cette dérivée normale à la frontière, $h(\theta)$, existe sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle, et elle est intégrable ainsi que son carré (Lichtenstein, loc. cit.). Si l'on admet que la fonction $f(\theta)$ soit bornée, et qu'elle n'ait qu'un nombre fini de points θ_i de discontinuité, où elle passe brusquement d'une valeur $f(\theta_i - 0)$ à une autre $f(\theta_i + 0)$, un calcul facile (cf. H. Villat, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1914) montre qu'on peut écrire

$$(4)\qquad h(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon - \frac{1}{2\pi}\sum_i \frac{f(\theta_i - 0) - f(\theta_i + 0)}{\operatorname{tg}\frac{\theta - \theta_i}{2}}$$

l'intégrale ayant sa valeur principale, ou bien, lorsque $f'(\theta)$ satisfait à une condition de Lipschitz,

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(\varepsilon) - f'(\theta)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon - \frac{1}{2\pi}\sum_i \frac{f(\theta_i - 0) - f(\theta_i + 0)}{\operatorname{tg}\frac{\theta - \theta_i}{2}}$$

θ étant supposé distinct d'un point de discontinuité. On vérifie du reste aisément la relation $\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta = 0$, dont on sait la nécessité.

Supposons maintenant qu'on se donne la valeur $g(\theta)$ de la partie imaginaire d'une fonction analytique dans le cercle de rayon un, aux points de la circonférence frontière; il résulte à peu près immédiatement de ce qui précède, que la fonction

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}}\,d\theta = F(x, y) + iG(x, y)$$

est une telle fonction analytique, et que, dans des conditions analogues à celles qui ont été dites tout à l'heure, sa partie réelle sur la circonférence frontière, est

$$(5)\qquad f(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon$$

ou encore, si $g(\varepsilon)$ satisfait à une condition de Lipschitz,

$$f(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\varepsilon)-g(\theta)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon$$

et $f(\theta)$ satisfait alors à une condition analogue.

Il est d'ailleurs aisé de montrer que, si $g(\theta)$ est l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable $g'(\theta)$ la dérivée normale de la partie réelle $F(x, y)$ aux points de la frontière, est égale, en général,[1] à

$$h(\theta) = g'(\theta)$$

comme on devait s'y attendre.

Supposons encore qu'on se donne la valeur $h(\theta)$ de la dérivée normale extérieure, sur la frontière, de la partie réelle d'une fonction analytique régulière dans le cercle; bien entendu, nous supposons remplie la condition, dont on connaît la nécessité,

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)\,d\theta = 0. \tag{6}$$

Il est bien connu que la fonction analytique (à laquelle on peut ajouter une constante quelconque)

$$C(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log(e^{i\varepsilon}-z)\,d\varepsilon = F(x, y) + iG(x, y) \tag{7}$$

répond à la question (cf. par exemple Boggio, loc. cit.). D'ailleurs, si l'on pose $z = \varrho e^{i\theta}$, on a de suite

$$\frac{\partial C}{\partial \varrho} = \frac{1}{\pi\varrho}\int_0^{2\pi} \frac{z h(\varepsilon)}{e^{i\varepsilon}-z}\,d\varepsilon.$$

La partie réelle de cette expression est

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{1}{\pi\varrho}\int_0^{2\pi} \frac{\varrho\cos(\theta-\varepsilon)-\varrho^2}{1-2\varrho\cos(\theta-\varepsilon)+\varrho^2}\,h(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

[1] Nous écrirons fréquemment »en général» pour abréger, au lieu de »excepté aux points d'un ensemble de mesure nulle».

ce que, d'après la condition ci-dessus, on met facilement sous la forme

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{1}{2\pi\varrho}\int_0^{2\pi} \frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos(\theta-\varepsilon)+\varrho^2} h(\varepsilon)\,d(\varepsilon).$$

On est donc ramené à une intégrale de Poisson, à laquelle s'appliquent les résultats connus, particulièrement ceux de M. P. Fatou.

En négligeant la constante additive, on voit aisément que, pour un point $z = e^{i\theta}$ de la frontière, la fonction analytique en question a pour partie réelle

$$f(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sin\left|\frac{\theta-\varepsilon}{2}\right| d\varepsilon \tag{8}$$

et pour coefficient de i,

$$g(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi h(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{9}$$

en désignant par ψ l'angle que fait avec l'axe des x la demi-droite qui va du point $e^{i\theta}$ au point $e^{i\varepsilon}$. La fonction $h(\varepsilon)$ étant supposée sommable, est, sauf sur un ensemble de mesure nulle, la dérivée de son intégrale indéfinie $H(\varepsilon)$. On peut donc écrire

$$g(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi H'(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

et en intégrant par parties,

$$g(\theta) = -\frac{1}{\pi}[\psi\, H(\varepsilon)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H(\varepsilon)\frac{d\psi}{d\varepsilon}\,d\varepsilon.$$

Or la fonction $\psi(\varepsilon)$ présente une discontinuité lorsque ε traverse la valeur θ, et l'on s'assure facilement que

$$\psi(\theta+0) - \psi(\theta-0) = \pi,$$

d'ailleurs, ψ dépend linéairement de ε $\left(\text{il est même égal à } \pm\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon+\theta}{2} \text{ selon que } \varepsilon \text{ est supérieur ou inférieur à } \theta\right)$. L'intégrale écrite au second membre dans la valeur de $g(\theta)$ est donc une constante indépendante de ε, et la partie intégrée se réduit à

$$-\frac{1}{\pi}H(\theta)[\psi(\theta-0)-\psi(\theta+0)]=H(\theta).$$

On a donc, sauf sur un ensemble de mesure nulle,

$$g'(\theta)=h(\theta).$$

En outre, une méthode directement inspirée de celle qu'emploie L. Lichtenstein (loc. cit. Journal de Crelle, 1912, p. 25 notamment) permet de montrer que, si la fonction $h(\theta)$ est intégrable ainsi que son carré, les fonctions $f(\theta)$ et $g(\theta)$ existent en général, et jouissent de la même propriété. On met d'abord aisément $C(z)$ sous la forme, valable dans le cercle de rayon 1,

$$C(z)=-ib_0+\sum_1^{\infty}(a_n-ib_n)z^n \tag{10}$$

avec

$$b_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon,\quad a_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}h(\varepsilon)\cos n\varepsilon d\varepsilon,\quad b_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}h(\varepsilon)\sin n\varepsilon d\varepsilon.$$

Si $h(\theta)$ est intégrable ainsi que son carré, on sait qu'on a, d'après P. Fatou (Acta, 1906, p. 379)

$$\int_0^{2\pi}[h(\varepsilon)]^2d\varepsilon=\sum_1^{\infty}(n^2a_n^2+n^2b_n^2).$$

Les séries $\sum_1^{\infty}a_n^2$, $\sum b_n^2$ sont donc a fortiori convergentes, et l'on peut écrire

$$f(\theta)\sim\sum_1^{\infty}a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta \tag{11}$$

$$g(\theta)\sim\sum_1^{\infty}-b_n\cos n\theta+a_n\sin n\theta \tag{12}$$

$f(\theta)$ et $g(\theta)$ désignant deux fonctions définies presque partout, sommables en même temps que leurs carrés. Pour faire voir que ce sont justement à une constante près, les deux fonctions déjà désignées sous ce même nom il y a un instant, il suffit de considérer la fonction

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,\frac{1+ze^{-i\varepsilon}}{1-ze^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon$$

formée au moyen de la fonction (11). Un calcul immédiat permet d'écrire

$$\Gamma(z) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty}(\alpha_n - i\beta_n)z^n$$

avec

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\varepsilon, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\cos n\varepsilon\,d\varepsilon, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\sin n\varepsilon\,d\varepsilon,$$

et d'après la définition de $f(\theta)$ on a $\alpha_n = a_n$; $\beta_n = b_n$. $\Gamma(z)$ ne diffère donc de $C(z)$ que par une constante, d'où la conclusion annoncée.

La comparaison des divers résultats précédents, en supposant que la fonction analytique dont il s'agit à l'intérieur de la circonférence C de rayon un, soit partout la même, conduit aux conclusions suivantes.

Tout d'abord, les deux équations

$$(13)\qquad \begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon + C_1 \\ g(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon + C_2 \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes convenables, sont, comme on sait, inverses l'une de l'autre. En multipliant les deux membres des deux égalités par $d\theta$ et intégrant de 0 à 2π, on voit sans peine que les valeurs des constantes sont

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta$$

et que les équations ci-dessus doivent s'écrire

$$(14)\qquad f(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}} d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Si l'une des deux fonctions $f(\theta)$ ou $g(\theta)$ est intégrable ainsi que son carré, il en est de même de l'autre; si l'une de ces deux fonctions satisfait à une condition de LIPSCHITZ, il en est de même de l'autre.

Considérons encore les deux équations

$$f(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon) \log \sin \left|\frac{\theta-\varepsilon}{2}\right| d\varepsilon + C^{te} \tag{15}$$

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(\varepsilon)\, d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}} - \frac{1}{2\pi}\sum_i \frac{f(\theta_i - 0) - f(\theta_i + 0)}{\operatorname{tg}\frac{\theta - \theta_i}{2}}, \tag{16}$$

elles seront inverses l'une de l'autre dans des conditions qui résultent clairement des développements précédents, lorsque $f(\theta)$ est supposé continu et dérivable, sauf peut-être en un nombre fini de points. Nous ferons remarquer que, si $f(\theta)$ possède une discontinuité au point θ_i, et y subit un saut brusque égal à k, la fonction $h(\theta)$ devient en ce point infinie comme $\frac{k}{\pi}\frac{1}{\theta-\theta_i}$. La réciproque de ce fait est aisée à déduire de l'équation (15).

Il suit de là que, si l'on suppose f continu dans tout l'intervalle (ce qui entraîne que h n'ait pas de singularités polaires), on doit effacer dans (16) les termes contenus sous le signe $\sum_i$, et les deux équations restantes donnent la solution l'une de l'autre. Si alors l'une des deux fonctions f ou h est de carré intégrable, il en sera de même de l'autre, d'après des conclusions antérieures.

§ 2. Je vais maintenant supposer qu'il s'agisse d'une fonction analytique, régulière dans un domaine limité par deux circonférences concentriques, de centre o et dont nous prendrons les rayons égaux à 1 et à q (< 1) ainsi qu'on peut évidemment toujours s'y ramener. Nous désignerons constamment par les notations: $f(\theta)$ et $f_1(\theta)$, $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$, $h(\theta)$ et $h_1(\theta)$, les valeurs que prennent, aux points $e^{i\theta}$ et $qe^{i\theta}$ des frontières, respectivement, la partie réelle, la partie imaginaire, et la dérivée normale de la partie réelle, dans la direction extérieure à l'aire annulaire.

Supposons d'abord que les valeurs de $f(\theta)$ et de $f_1(\theta)$ soient données. La fonction analytique dont la partie réelle prend sur les deux circonférences C (de

rayon 1) et C_1 (de rayon q) les valeurs en question, est, comme je l'ai démontré ailleurs,[1] à une constante (imaginaire pure) près,

$$(17) \qquad A(z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right) d\varepsilon -$$

$$- \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right) d\varepsilon = F(x, y) + i\, G(x, y).$$

Les fonctions elliptiques qui interviennent dans cette formule, sont construites avec les périodes $2\omega_1$ et $2i\omega_3$, dont le rapport seul est déterminé, et satisfait à la relation

$$(18) \qquad q = e^{\frac{-\pi\omega_3}{i\omega_1}}.^{2}$$

D'ailleurs (cf. H. Villat, loc. cit.) la condition, nécessaire et suffisante, pour que la fonction analytique $A(z)$ soit uniforme, est

$$(19) \qquad \int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

et nous supposerons bien entendu cette condition remplie. (Les fonctions f et f_1 sont évidemment supposées sommables.)

Pour préciser davantage les circonstances dans lesquelles on peut être assuré que la fonction $A(z)$ satisfait bien à la question, formons la différence

$$A(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon) \frac{1 + z e^{-i\varepsilon}}{1 - z e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon = A(z) - A_0(z)$$

entre $A(z)$ et une fonction $A_0(z)$ définie, dans tout le cercle de rayon 1, par la donnée $f(\theta)$ de la partie réelle sur la frontière. On a

[1] Cf. H. Villat, Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1912, 1er Semestre, où j'ai établi directement cette formule. Comme je l'ai fait voir au même endroit, on peut aussi déduire cette formule d'un développement (dû à M. U. Dini) connue antérieurement. Dans son Mémoire déjà cité, M. U. Dini a de nouveau indiqué cette déduction.

[2] Nous adopterons pour ce qui concerne les fonctions elliptiques, les notations du Traité de M. M. Tannery et Molk (Gauthier-Villars, 4 volumes) auquel nous renverrons souvent dans la suite, par l'indication: T. M., suivie du double numéro de la formule à utiliser.

$$A(z) - A_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\left[\frac{i\omega_1}{\pi}\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \frac{1}{2}\frac{1 + ze^{-i\varepsilon}}{1 - ze^{-i\varepsilon}}\right]d\varepsilon -$$

$$- \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon.$$

Or, en introduisant les fonctions ϑ, on sait (T. M., XXXIII, 7) que

$$\zeta u = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1}\frac{\vartheta'_1\left(\dfrac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{u}{2\omega_1}\right)}$$

et d'autre part on peut déduire de la formule (T. M. XXXII, 5) la suivante

$$\frac{\vartheta'_1 v}{\vartheta' v} = \pi \operatorname{cotg} \pi v + \sum_1^\infty \frac{4\pi q^n \sin 2\pi v}{1 - 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}}.$$

On en conclut

$$\zeta u = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1}\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1}\sum_1^\infty \frac{q^n \sin\dfrac{\pi u}{\omega_1}}{1 - 2q^{2n}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1} + q^{4n}}.$$

Maintenant, pour $u = \frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon$, on a facilement

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2\omega_1} = -i\frac{1 + ze^{-i\varepsilon}}{1 - ze^{-i\varepsilon}}$$

$$\sin\frac{\pi u}{\omega_1} = \frac{1}{2i}\left(ze^{-i\varepsilon} - z^{-1}e^{i\varepsilon}\right)$$

$$\cos\frac{\pi u}{\omega_1} = \frac{1}{2}\left(ze^{-i\varepsilon} + z^{-1}e^{i\varepsilon}\right)$$

d'où

$$\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) = \frac{\eta_1}{\pi}\left(\frac{1}{i}\log z - \varepsilon\right) - \frac{i\pi}{2\omega_1}\frac{1 + ze^{-i\varepsilon}}{1 - ze^{-i\varepsilon}} + \frac{\pi}{i\omega_1}\sum_1^\infty \frac{q^n(ze^{-i\varepsilon} - z^{-1}e^{i\varepsilon})}{1 - q^{2n}(ze^{-i\varepsilon} + z^{-1}e^{i\varepsilon}) + q^{4n}}$$

et

$$U(z,\varepsilon) = \frac{i\omega_1}{\pi}\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \frac{1}{2}\frac{1+ze^{-i\varepsilon}}{1-ze^{-i\varepsilon}} = \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^2}(\log z - i\varepsilon) +$$

$$+ \sum_1^{\infty} \frac{q^n(ze^{-i\varepsilon} - z^{-1}e^{i\varepsilon})}{(1 - q^{2n}ze^{-i\varepsilon})(1 - q^{2n}z^{-1}e^{i\varepsilon})}.$$

Sous cette forme, il est bien clair que la fonction de z

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, U(z,\varepsilon)\, d\varepsilon$$

se comporte régulièrement dans la couronne, et y est continue, y compris sur la circonférence de rayon 1. Lorsque z tend vers un point $e^{i\theta}$ de cette dernière circonférence, l'intégrale ci-dessus tend d'ailleurs vers la valeur imaginaire pure

$$\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^2}(\theta-\varepsilon) + \sum_1^{\infty}\frac{2q^n\sin(\theta-\varepsilon)}{1-2q^{2n}\cos(\theta-\varepsilon)+q^{4n}}\right]d\varepsilon.$$

Dans les mêmes conditions, l'intégrale

$$\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon$$

tend également vers une valeur imaginaire pure, et il en résulte que la partie réelle de la différence $A(z) - A_0(z)$ tend vers zéro. Par suite la façon dont se comporte la partie réelle de $A(z)$ au voisinage de la circonférence C, dépend uniquement de la façon dont s'y comporte la partie réelle de $A_0(z)$.

Les résultats rappelés dans le premier paragraphe relativement à cette dernière fonction, peuvent donc être immédiatement appliqués à la fonction $A(z)$. Celà étant, et en remarquant qu'on peut échanger le rôle des deux frontières par la transformation de z en q/z, on en conclut notamment les conséquences suivantes:

Les fonctions $f(\theta)$ et $f_1(\theta)$ étant données, périodiques (de période 2π) et sommables, la partie réelle de $A(z)$ tend, en général, vers $f(\theta)$ ou $f_1(\theta)$ lorsque z tend vers $e^{i\theta}$ ou $qe^{i\theta}$. La partie imaginaire de $A(z)$ est bien déterminée quand les intégrales analogues à (2) relatives à f ou à f_1, ont des limites. Cette partie imaginaire tend alors vers les expressions

$$g(\theta) = \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{20}$$

ou

$$g_1(\theta) = \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{21}$$

respectivement. Les intégrales relatives à la fonction ζ doivent y être considérées comme égales à leur valeur principale au sens de CAUCHY. Si f et f_1 satisfont à des conditions de LIPSCHITZ, ces formules peuvent être remplacées par les suivantes, où les intégrales ont la signification ordinaire (cf. H. VILLAT, loc. cit. p. 110, Note 1),

$$\begin{aligned} g(\theta) = {} & \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} [f(\varepsilon) - f(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)f(\theta) - \\ & - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} g_1(\theta) = {} & \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} [f_1(\varepsilon) - f_1(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \\ & + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)f_1(\theta). \end{aligned} \tag{23}$$

De plus, les fonctions $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$ satisfont alors, elles aussi, à des conditions de LIPSCHITZ.

Si $f(\theta)$ et $f_1(\theta)$ sont intégrables ainsi que leurs carrés, je dis que $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$ seront alors déterminées, sauf peut être chacune sur un ensemble de mesure nulle, et que ces fonctions seront intégrables ainsi que leurs carrés.

Bien qu'on puisse déduire ce fait sans grand calcul, des théorèmes de P. FATOU et L. LICHTENSTEIN, je démontrerai cependant ce résultat directement, en suivant d'ailleurs la voie tracée par L. LICHTENSTEIN dans le cas du cercle; car cela nous permettra d'obtenir en même temps diverses formules importantes.

Il résulte tout d'abord d'un calcul connu (cf. U. DINI, loc. cit. et H. VILLAT, Palermo, I, 1912, p. 171) qu'en appelant α_n et β_n les coefficients de FOURIER de la fonction $f(\theta)$ et α'_n, β'_n ceux de $f_1(\theta)$, c'est à dire en posant

$$(24)\quad \alpha_0 = \alpha'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta \qquad \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta \\ \alpha'_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \quad \beta'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\sin n\theta\,d\theta \end{aligned}$$

la partie réelle $F(\varrho, \theta)$ de $A(z)$ peut s'écrire, en plaçant le point $z = \varrho e^{i\theta}$ à l'intérieur de la couronne,

$$(25)\quad F(\varrho, \theta) = \alpha_0 + \sum_1^\infty \frac{\frac{\varrho^n}{q^n} - \frac{q^n}{\varrho^n}}{\frac{1}{q^n} - q^n}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) + \sum_1^\infty \frac{\frac{1}{\varrho^n} - \varrho^n}{\frac{1}{q^n} - q^n}(\alpha'_n \cos n\theta + \beta'_n \sin n\theta).$$

$A(z)$ est par suite, dans la couronne, représentable par l'expression

$$(26)\quad \begin{aligned} A(z) = F(\varrho, \theta) + iG(\varrho, \theta) = \alpha_0 + iA_0 &+ \sum_1^\infty \frac{\alpha_n - q^n\alpha'_n - i(\beta_n - q^n\beta'_n)}{1 - q^{2n}} z^n + \\ &+ \sum_1^\infty \frac{q^n(\alpha'_n - q^n\alpha_n) + iq^n(\beta'_n - q^n\beta_n)}{1 - q^{2n}} z^{-n} \end{aligned}$$

où A_0 est une constante réelle dont il est aisé de trouver la valeur. Il suffit d'observer que l'on a

$$\int_0^{2\pi} A(\varrho e^{i\theta})\,d\theta = 2\pi(\alpha_0 + iA_0).$$

Puis d'après (17),

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} A(\varrho e^{i\theta})\,d\theta = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} d\theta \Bigg\{ &\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\right)d\varepsilon - \\ &- \int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\right)d\varepsilon \Bigg\}. \end{aligned}$$

Or on a aisément

$$\int_0^{2\pi} \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)d\theta = \frac{\pi}{\omega_1}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + 2\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}$$

$$= \frac{\pi}{\omega_1}\left[-i\pi + 2\eta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_1\right)\right]$$

(au sujet de la détermination du multiple de $i\pi$ figurant dans cette formule, voir H. Villat, loc. cit. § 6). On a de même

$$\int_0^{2\pi} \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)d\theta = \frac{2\pi\eta_1}{\omega_1}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_1\right).$$

D'où en tenant compte de (25), et réduisant,

$$\int_0^{2\pi} A(\varrho e^{i\theta})\,d\theta = \int_0^{2\pi} f(\varepsilon)d\varepsilon - 2\eta_1\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varepsilon[f(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)]d\varepsilon$$

et par suite

(27) $$\pi A_0 = -\frac{\omega_1\eta_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varepsilon[f(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)]d\varepsilon.$$

On a donc pour $A(z)$ un développement de la forme

(28) $$A(z) = a_0 - ib_0 + \sum_1^\infty (a_n - ib_n)z^n + \sum_1^\infty (c_n + id_n)z^{-n},$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)d\theta = \alpha_0, \quad b_0 = \frac{\omega_1\eta_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\theta[f(\theta) - f_1(\theta)]d\theta.$$

$$a_n = \frac{\alpha_n - q^n\alpha'_n}{1 - q^{2n}}, \qquad b_n = \frac{\beta_n - q^n\beta'_n}{1 - q^{2n}}$$

$$c_n = \frac{q^n\alpha'_n - q^{2n}\alpha_n}{1 - q^{2n}}, \qquad d_n = \frac{q^n\beta'_n - q^{2n}\beta_n}{1 - q^{2n}}.$$

Nous écrirons plus simplement ces dernières:

$$a_n + c_n = \alpha_n, \qquad b_n + d_n = \beta_n$$

$$a_n q^n + c_n \frac{1}{q_n} = \alpha'_n, \quad b_n q^n + d_n \frac{1}{q^n} = \beta'_n.$$

On voit que les nombres

$$a_0, \ a_1 + c_1, \ldots \ a_n + c_n, \ldots \ b_1 + d_1, \ldots \ b_n + d_n, \ldots$$

sont les constantes de Fourier de la fonction $f(\theta)$, et que les nombres

$$a_0, \ a_1 q + c_1 \frac{1}{q}, \ldots \ a_n q^n + c_n \frac{1}{q^n}, \ldots \ b_1 q + d_1 \frac{1}{q}, \ldots \ b_n q^n + d_n \frac{1}{q^n}, \ldots$$

sont celles attachées à la fonction $f_1(\theta)$, c'est à dire qu'avec les notations de M. Hurwitz, on a

(30) $$f(\theta) \sim a_0 + (a_1 + c_1)\cos\theta + \cdots + (a_n + c_n)\cos n\theta + \cdots + (b_1 + d_1)\sin\theta + \cdots (b_n + d_n)\sin n\theta +$$

(31) $$f_1(\theta) \sim a_0 + \left(a_1 q + c_1 \frac{1}{q}\right)\cos\theta + \cdots + \left(a_n q^n + c_n \frac{1}{q^n}\right)\cos\theta + \cdots + \left(b_1 q + d_1 \frac{1}{q}\right)\sin\theta + \cdots + \left(b_n q^n + d_n \frac{1}{q^n}\right)\sin n\theta + \cdots$$

Ceci posé, les fonctions f et f_1 étant de carrés sommables, on a d'après un théorème de P. Fatou (loc. cit. p. 379)

(32) $$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [f(\theta)]^2 d\theta &= 2a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [f_1(\theta)]^2 d\theta &= 2a_0^2 + \sum_1^{\infty} \left(a_n q^n + c_n \frac{1}{q^n}\right)^2 + \left(b_n q^n + d_n \frac{1}{q^n}\right)^2. \end{aligned}$$

En outre, en partant de la formule (28) on a, pour ϱ compris entre q et 1 (différent des extrémités)

$$F(\varrho, \theta) = a_0 + \sum_1^{\infty} \left(a_n \varrho^n + c_n \frac{1}{\varrho^n}\right)\cos n\theta + \left(b_n \varrho^n + d_n \frac{1}{\varrho^n}\right)\sin n\theta$$

$$G(\varrho, \theta) = -b_0 + \sum_1^{\infty} \left(a_n \varrho^n - c_n \frac{1}{\varrho^n}\right)\sin n\theta - \left(b_n \varrho^n - d_n \frac{1}{\varrho^n}\right)\cos n\theta.$$

Multiplions respectivement par $F(\varrho,\theta)$ et $G(\varrho,\theta)$, et intégrons de o à 2π, en traitant les seconds membres terme à terme, ce dont on a le droit pour les valeurs de ϱ considérées. Il vient d'abord

$$\int_0^{2\pi}[F(\varrho,\theta)]^2 d\theta = a_0\int_0^{2\pi} F(\varrho,\theta)\,d\theta + \sum\left(a_n\varrho^n + c_n\frac{1}{\varrho^n}\right)\int_0^{2\pi} F(\varrho,\theta)\cos n\theta\, d\theta +$$

$$+\sum\left(b_n\varrho^n + d_n\frac{1}{\varrho_n}\right)\int_0^{2\pi} F(\varrho,\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

et par suite

$$\int_0^{2\pi}[F(\varrho,\theta)]^2 d\theta = \pi\left\{2a_0^2 + \sum_1^{\infty}\left(a_n\varrho^n + \frac{c_n}{\varrho^n}\right)^2 + \left(b_n\varrho^n + \frac{d_n}{\varrho^n}\right)^2\right\}.$$

Et on a de même

$$\int_0^{2\pi}[G(\varrho,\theta)]^2 d\theta = \pi\left\{2b_0^2 + \sum_1^{\infty}\left(a_n\varrho^n - \frac{c_n}{\varrho^n}\right)^2 + \left(b_n\varrho^n - \frac{d_n}{\varrho^n}\right)^2\right\}.$$

Les séries écrites aux seconds membres sont donc convergentes, et par suite la série

$$\sum_1^{\infty}(a_n c_n + b_n d_n)$$

obtenue par soustraction, est également convergente.

Cela étant, revènons aux formules (32); il résulte immédiatement de ce qui précède, que les séries

$$\sum a_n^2,\quad \sum c_n^2,\quad \sum b_n^2,\quad \sum d_n^2,\quad \sum a_n^2 q^{2n},\quad \sum c_n^2\frac{1}{q^{2n}},\quad \sum b_n^2 q^{2n},\quad \sum d_n^2\frac{1}{q^{2n}},$$

sont toutes convergentes, et par suite il en est de même des deux suivantes

$$\sum (a_n - c_n)^2 + (b_n - d_n)^2$$

$$\sum\left(a_n q^n - \frac{c_n}{q^n}\right)^2 + \left(b_n q^n - \frac{d_n}{q^n}\right)^2.$$

Le théorème de Riesz-Fischer (cf. notamment Riesz, Comptes-Rendus, 144, 1907, p. 615; Götting. Nachrichten, 1907; E. Fischer, Comptes-Rendus, 144,

1907, p. 1022) permet de conclure de là qu'il existe deux fonctions $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$ intégrables et de carrés intégrables, telles que l'on ait

$$(33)\quad \begin{aligned} g(\theta) &\sim -b_0 + \sum (a_n - c_n)\sin n\theta - (b_n - d_n)\cos n\theta \\ g_1(\theta) &\sim -b_0 + \sum \left(a_n q^n - \frac{c_n}{q^n}\right)\sin n\theta - \left(b_n q^n - \frac{d_n}{q^n}\right)\cos n\theta. \end{aligned}$$

Si nous considérons alors la fonction

$$A_1(z) = F_1(\varrho,\theta) + i\,G_1(\varrho,\theta) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon -$$

$$- \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\right)d\varepsilon,$$

la partie réelle de cette fonction tend, en général, vers $g(\theta)$ ou $g_1(\theta)$ lorsque z tend vers les points $e^{i\theta}$ ou $qe^{i\theta}$ des frontières. D'autre part, dans la couronne, on a pour $A_1(z)$ un développement de la forme

$$A_1(z) = a'_0 - ib'_0 + \sum (a'_n - ib'_n)z^n + \sum (c'_n + id'_n)z^{-n}$$

avec

$$a'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)d\theta$$

$$a'_n + c'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\,d\theta; \quad a'_n q^n + \frac{c'_n}{q^n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\cos n\theta\,d\theta$$

$$b'_n + c'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta\,d\theta; \quad b'_n q^n + \frac{d'_n}{q^n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\sin n\theta\,d\theta$$

(il est à peine besoin de faire remarquer que les deux valeurs écrites pour a'_0 sont évidemment égales). Mais, de la définition même des fonctions g et g_1 il résulte

$$-b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)d\theta$$

$$d_n - b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\, d\theta; \quad \frac{d_n}{q^n} - b_n q^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\cos n\theta\, d\theta;$$

$$a_n - c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta\, d\theta; \quad a_n q^n - \frac{c_n}{q^n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\sin n\theta\, d\theta.$$

On en conclut par comparaison

$$a'_0 = -b_0$$

$$a'_n = -b_n, \quad b'_n = a_n, \quad c_n = d_n, \quad d'_n = -c_n.$$

Donc

$$A_1(\varrho e^{i\theta}) = -b_0 - ib'_0 - \sum (b_n + ia_n)\varrho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + \sum (d_n - ic_n)\varrho^{-n}\begin{pmatrix}\cos n\theta \\ -i\sin n\theta\end{pmatrix}$$

et par suite la partie réelle $F_1(\varrho,\theta)$ de $A_1(z)$ dans la couronne coïncide avec le coefficient de i, $G(\varrho,\theta)$ de $A(z)$ ce qui démontre complètement le résultat annoncé.

Il résulte indirectement des développements qui précèdent, que l'on a

(34) $$\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} g_1(\theta)d\theta = \frac{2\omega_1\eta_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\theta[f(\theta) - f_1(\theta)]d\theta$$

et que par suite l'égalité

(35) $$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f_1(\theta)d\theta$$

entraîne

(36) $$\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} g_1(\theta)d\theta$$

et la réciproque est évidemment exacte.

On peut maintenant démontrer le théorème suivant: si $f(\theta)$ et $f_1(\theta)$ sont des fonctions périodiques (de période 2π) et sont les intégrales indéfinies de deux dérivées (non nécessairement bornées) f' et f'_1 intégrables ainsi que leurs carrés, la partie réelle $F(\varrho,\theta)$ de $A(z)$ a une dérivée $\frac{\partial F}{\partial \varrho}$ qui tend en général vers des limites déterminées $h(\theta)$, et $-h_1(\theta)$, lorsque z tend vers les points $e^{i\theta}$ ou $qe^{i\theta}$. Les

fonctions $[h(\theta)]^2$ et $[h_1(\theta)]^2$ sont intégrables. Il suffira de suivre le mode de raisonnement employé par L. Lichtenstein (loc. cit. p. 25, et Journal de Crelle, 1913, p. 189) pour obtenir immédiatement ce résultat.

Dans ces conditions, la dérivée normale de F existe en général sur les frontières. Supposons les fonctions f et f_1 bornées, pourvues en général d'une dérivée, et possédant peut-être un nombre fini de points θ_i de discontinuité, où ces fonctions passent brusquement d'une valeur à une autre. Nous pourrons écrire, en supposant d'abord $q < \varrho < 1$,

$$\frac{\partial A(z)}{\partial \varrho} = -\frac{\omega_1^2}{\pi^3 \varrho}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon + \frac{\omega_1^2}{\pi^3\varrho}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_3\right)d\varepsilon$$

puis on a

$$\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon = \frac{\pi}{\omega_1}\left\{f(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right\}_0^{2\pi} - \frac{\pi}{\omega_1}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon$$

de sorte qu'en tenant compte des discontinuités possibles,

$$(37)\qquad \frac{\partial A}{\partial \varrho} = \frac{\omega_1}{\pi^2\varrho}\sum_i [f(\theta_i + 0) - f(\theta_i - 0)]\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta_i\right) + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2\varrho}f(-0) +$$
$$+ \frac{\omega_1}{\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon + \frac{\omega_1^2}{\pi^3\varrho}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_3\right)d\varepsilon$$

en comprenant au besoin le point $\varepsilon = 0 \equiv 2\pi$ parmi les points θ_i, si f subit un saut brusque en ce point.

On voit alors que l'étude de cette expression dérive immédiatement de l'étude, déjà faite, des fonctions de la forme

$$\int_0^{2\pi} F(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon - \int_0^{2\pi} F_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon$$

(on pourra prendre ici $F(\varepsilon) = f'(\varepsilon)$, et $F_1(\varepsilon)$ égale à la constante $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)d\varepsilon$). Par suite, dans des conditions qui ressortent clairement des considérations antérieures, le coefficient de i dans $\frac{\partial A}{\partial \varrho}$ tendra en général vers $-f'(\theta)$ quand z tendra vers le point $e^{i\theta}$; quant à la partie réelle, elle sera

$$h(\theta)=\frac{\omega_1}{\pi^2}\sum_i[f(\theta_i+0)-f(\theta_i-0)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\theta_i)+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}f(-0)+$$

(38)

$$+\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}f'(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon+\frac{\omega_1^2}{\pi^3}\int_0^{2\pi}f_1(\varepsilon)\wp\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega_3\right]d\varepsilon,$$

l'intégrale relative à ζ étant prise égale à sa valeur principale; cette dernière existe dans les conditions que l'on sait (et notamment son existence est assurée si $f'(\theta)$ est intégrable ainsi que son carré).

Si f' satisfait à une condition de Lipschitz, on peut mettre, en général, après un calcul très simple, cette expression sous la forme

$$h(\theta)=\frac{\omega_1}{\pi^2}\sum_i[f(\theta_i+0)-f(\theta_i-0)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\theta_i)+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}f(-0)+$$

$$+\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[f'(\varepsilon)-f'(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon-\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)f'(\theta)+$$

$$+\frac{\omega_1^2}{\pi^3}\int_0^{2\pi}f_1(\varepsilon)\wp\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega_3\right]d\varepsilon,$$

où les intégrales ont leur signification ordinaire.

En désignant par $h_1(\theta)$ la dérivée normale extérieure de $F(\varrho,\theta)$, en un point $qe^{i\theta}$ de la frontière intérieure, un calcul analogue au précédent conduira à l'expression suivante

$$h_1(\theta)=\frac{\omega_1^2}{\pi^3 q}\int_0^{2\pi}f(\varepsilon)\wp\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega_3\right]d\varepsilon+\frac{\omega_1}{\pi^2 q}\sum_j[f_1(\theta_j+0)-f_1(\theta_j-0)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\theta_j)+$$

(39)

$$+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}f_1(-0)+\frac{\omega_1}{\pi^2 q}\int_0^{2\pi}f'_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon$$

ou encore, si f'_1 satisfait à une condition de Lipschitz,

$$h_1(\theta) = \frac{\omega_1^2}{\pi^3 q}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,\wp\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega_3\right]d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2 q}\sum_j [f_1(\theta_j+0)-f_1(\theta_j-0)]\,\zeta_3\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\theta_j) +$$

$$+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}f_1(-0)+\frac{\omega_1}{\pi^2 q}\int_0^{2\pi}[f'_1(\varepsilon)-f'_1(\theta)]\,\zeta_3\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon-\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi q}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)f'_1(\theta).$$

Observons encore qu'on peut affirmer que, si f' et f'_1 satisfont à des conditions de Lipschitz, il en est de même des fonctions h et h_1.

Enfin, on peut vérifier sans grande difficulté que les fonctions h et h_1 vérifient les conditions

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} h_1(\theta)d\theta = 0$$

dont on connaît la nécessité, provenant de l'uniformité de la fonction analytique $A(z)$.

§ 3. Si l'on cherche une fonction analytique uniforme, $B(z)$, déterminée par la connaissance des valeurs $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$ de sa partie imaginaire sur les deux circonférences limites, il résulte évidemment des développements précédents, qu'une telle fonction est, à une constante (réelle) près,

$$(40)\qquad \begin{aligned} B(z) = -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1,\omega_3\right)d\varepsilon\,+ \\ +\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1,\omega_3\right)d\varepsilon \end{aligned}$$

obtenue en multipliant par i une fonction analogue à la fonction $A(z)$ antérieure. Les données g et g_1 doivent d'ailleurs vérifier, bien entendu, la condition

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} g_1(\theta)d\theta.$$

Ce qui a été dit antérieurement se transporte immédiatement à cette nouvelle fonction de z. Notamment, si g et g_1 sont intégrables et de carrés intégrables, la partie réelle de $B(z)$ tend en général vers des valeurs déterminées $f(\theta)$ et

$f_1(\theta)$ quand z tend vers un point des frontières, et ces nouvelles fonctions f et f_1 sont intégrables ainsi que leurs carrés. Elles ont d'ailleurs pour expressions

$$(41)\quad \begin{cases} f(\theta) = -\dfrac{\omega_1}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon, \\ f_1(\theta) = -\dfrac{\omega_1}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon \end{cases}$$

ou encore, si g et g_1 satisfont à des conditions de Lipschitz,

$$f(\theta) = -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[g(\varepsilon)-g(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)g(\theta) + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon,$$

$$f_1(\theta) = -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[g_1(\varepsilon)-g_1(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)d\varepsilon -$$
$$- \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)g_1(\theta).$$

Les fonctions f et f_1 ainsi déterminées vérifient en outre les relations

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f_1(\theta)d\theta = \frac{2\omega_1\eta_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\theta[g(\theta)-g_1(\theta)]d\theta.$$

De plus, la partie réelle de $B(z) = B(\varrho e^{i\theta})$ possède une dérivée partielle par rapport à ϱ, qui, en général, tend vers une valeur déterminée quand ϱ tend vers 1 ou q, si l'on suppose que g et g_1 aient des dérivées, et, en général, les valeurs limites $h(\theta)$ et $h_1(\theta)$ qui en résultent pour la dérivée normale (extérieure à l'aire) sont

$$h(\theta) = g'(\theta),$$

$$h_1(\theta) = -\frac{1}{q}g'_1(\theta).$$

Cela découle à peu près immédiatement des développements contenus dans le paragraphe qui précède.

§ 4. Supposons données les valeurs $h(\theta)$ et $h_1(\theta)$ de la dérivée normale de la partie réelle aux frontières, et cherchons une fonction uniforme de z répondant à ces conditions. Bien entendu, nous supposons vérifiées les relations nécessaires

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} h_1(\theta)\,d\theta = 0 \tag{42}$$

assurant l'uniformité de la fonction de z qu'il s'agit de trouver. Cette fonction de z résulte très simplement des constructions antérieures.[1] Considérons en effet l'expression

$$\begin{aligned} C(z) = &-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1,\omega_3\right)d\varepsilon - \\ &\qquad -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega_1,\omega_3\right)d\varepsilon \end{aligned} \tag{43}$$

construite de manière à ce que la dérivée par rapport à $\varrho\,(z = \varrho e^{i\theta})$ reproduise la fonction (visiblement uniforme)

$$-\frac{\omega_1}{i\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon - \frac{q\,\omega_1}{i\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon$$

dont nous savons déjà par ce qui précède, que la partie réelle tend vers $h(\theta)$ ou $-h_1(\theta)$ en général, quand z tend vers $e^{i\theta}$ ou $qe^{i\theta}$. Cette fonction $C(z)$ n'est pas uniforme, mais elle le deviendra par l'adjonction d'un terme convenable en $\log z$, ne modifiant pas la valeur de la dérivée normale de la partie réelle, — ce qui exige que ce terme soit de la forme $iA\,.\log z$, A étant réel. La différence des valeurs de la fonction $C(z) + iA\log z$ quand l'argument de z diminue, par exemple, de 2π, est, en désignant par $\log z$ la première détermination du logarithme,

[1] M. U. Dini (Palermo, 1913, loc. cit. — in fine — a déterminé récemment une telle fonction, relativement même au cas un peu plus général, qu'on peut du reste ramener à celui du texte par l'addition d'un terme en $\log z$, où les données vérifient seulement la condition

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)\,d(\theta) = \int_0^{2\pi} h_1(\theta)\,d\theta\,.$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-2\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}d\varepsilon-$$

$$-\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-2\omega_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}d\varepsilon+2A\pi.$$

Mais on a

$$\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-2\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}=i\pi+2\eta_1\omega_1\left(1-\frac{\log z}{i\pi}+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)$$

$$\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-2\omega_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\right)}=2\eta_1\omega_1\left(1-\frac{\log z}{i\pi}+\frac{\varepsilon}{\pi}\right).$$

D'où pour la différence précédente, en tenant compte des relations (42), l'expression

$$-\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon-\frac{2\eta_1\omega_1 q}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)d\varepsilon+2A\pi$$

qui sera nulle si l'on choisit la constante réelle A par

$$A=\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+qh_1(\varepsilon)]d\varepsilon.$$

Donc la fonction uniforme

$$D(z)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon-\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi}h_1(\varepsilon)\log\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon-$$

(44)

$$-\frac{\eta_1\omega_1}{i\pi^3}\log z\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+qh_1(\varepsilon)]d\varepsilon$$

à laquelle on peut d'ailleurs ajouter une constante quelconque, répond à la question proposée. Ses valeurs aux frontières sont déterminées par

$$D(e^{i\theta}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon -$$

$$-\frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+qh_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

et de même

$$D(qe^{i\theta}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega_3\right]d\varepsilon - \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma_3\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega_3\right]d\varepsilon -$$

$$-\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\left(\theta+\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}\right)\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+q\,h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon.$$

Mais on sait que (T. M., XII, 3)

$$\log\sigma(a+\omega_3) = \eta_3 a + \log\sigma\omega_3 + \log\sigma_3 a;$$

$$\log\sigma_3(a+\omega_3) = \eta_3 a + \log\frac{\sigma_1\omega_3\,\sigma_2\omega_3}{\sigma\omega_3} + \log\sigma a + (2k+1)i\pi.$$

De sorte qu'en se rappelant les conditions auxquelles h et h_1 sont assujettis, il vient

$$D(qe^{i\theta}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma_3\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right]d\varepsilon - \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon +$$

$$+\left(\frac{\omega_1\eta_3}{\pi^2}-\frac{\eta_1\omega_3}{\pi^2}-\frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\right)\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+q\,h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

ou encore

$$D(qe^{i\theta}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon -$$

$$-\left(\frac{i}{2\pi}+\frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\right)\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+q\,h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

à cause de la relation connue

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{i\pi}{2}.$$

Finalement on voit qu'on peut écrire, en séparant le réel et l'imaginaire,

$$(45)\quad \begin{cases} f(\theta) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \sigma \dfrac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon - \dfrac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \sigma_3 \dfrac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \\ \qquad\qquad - \dfrac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+q h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon; \\ f_1(\theta) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \sigma_3 \dfrac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \dfrac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \sigma \dfrac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon - \\ \qquad\qquad - \dfrac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+q h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon; \end{cases}$$

$$(46)\quad \begin{cases} g(\theta) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\arg\left(\log \sigma \dfrac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)d\varepsilon; \\ g_1(\theta) = -\dfrac{q}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\arg\left(\log \sigma \dfrac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)d\varepsilon - \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon)+q h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon. \end{cases}$$

On peut simplifier beaucoup ces deux dernières formules. Dans la première, le logarithme qui figure provient de $\log\sigma\left(\dfrac{\omega_1}{i\pi}\log z - \dfrac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)$ quand $|z|$ tend vers 1 en lui restant inférieur. D'après cela, on se rend compte aisément que l'on doit écrire, λ désignant un nombre entier dont la valeur sera sans importance,

$$\arg\left(\log \sigma \frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right) = 2\lambda\pi \qquad \text{pour } \varepsilon < \theta;$$

$$\arg\left(\log \sigma \frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right) = 2\lambda\pi + \pi \quad \text{pour } \varepsilon > \theta$$

et par suite, à cause de (42),

$$g(\theta) = -\int_\theta^{2\pi} h(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

ou encore

$$(47)\qquad g(\theta) = \int_0^{\theta} h(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

De même, dans la seconde formule, le logarithme provient de $\log\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)$ quand $|z|$ tend vers q en lui restant supérieur. Cela entraîne, μ étant un entier,

$$\arg\left(\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right) = \begin{cases} 2\mu\pi & \text{pour } \varepsilon < \theta \\ 2\mu\pi - \pi & \text{pour } \varepsilon > \theta \end{cases}$$

et par suite

$$g_1(\theta) = q\int_\theta^{2\pi} h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon) + q h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

ou bien

$$g_1(\theta) = -q\int_0^\theta h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon[h(\varepsilon) + q h_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon. \tag{48}$$

Par un procédé exactement analogue à celui qu'on a indiqué dans le cas d'un domaine circulaire, au paragraphe 1, on démontre que, si les données $h(\theta)$ et $h_1(\theta)$ sont intégrables ainsi que leurs carrés, les fonctions $f(\theta)$, $g(\theta)$, $f_1(\theta)$, $g_1(\theta)$ jouissent de la même propriété.

§ 5. Considérons maintenant une fonction analytique $E(z)$, dont la partie réelle soit donnée, égale à $f(\theta)$ sur la circonférence de rayon 1, et dont la partie imaginaire soit assujettie à être *nulle* sur la circonférence de rayon q. Prolongeons analytiquement la fonction dans la couronne, de rayons extrêmes q et q^2, obtenue par inversion à partir de la couronne primitive (la puissance étant égale à q^2, et le centre d'inversion étant le centre commun); aux points inverses, la fonction et la fonction prolongée auront même partie réelle, et des coefficients de i opposés. La fonction qui en résulte, définie dans la couronne totale $q^2 < |z| < 1$, possède alors une partie réelle égale à $f(\theta)$ sur les deux frontières, et par suite une telle fonction est (cf. H. Villat, Comptes-Rendus, Sept. 1911, Xenia, Athènes, 1912, U. Dini, Palermo, 1913, loc. cit.)

$$E(z) = \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{i\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)\right]d\varepsilon \tag{49}$$

à une constante près, imaginaire pure. Cela résulte d'ailleurs des résultats antérieurs; les périodes $2\omega'_1$, $2\omega'_3$ avec lesquelles sont construites les fonctions elliptiques actuelles, sont définies par l'égalité

(50) $$q^2 = e^{\frac{-\pi\omega'_3}{i\omega'_1}}$$

de sorte qu'on peut choisir si l'on veut

$$\omega'_3 = 2\omega_3, \quad \omega'_1 = \omega_1,$$

$2\omega_1$, $2\omega_3$ désignant toujours les périodes utilisées jusqu'ici. D'ailleurs on peut écrire (T. M., LIX à LXIII)

(51) $$\zeta a - \zeta_3 a = \frac{-\wp' a}{2(\wp a - e'_3)} = \xi_{10} a \xi_{23} a = \frac{\xi_{10} a \xi_{20} a}{\xi_{30} a} = -\frac{\xi'_{30} a}{\xi_{30} a}$$

et par suite, plus brièvement,

(52) $$E(z) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\frac{d}{d\varepsilon}\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon.$$

Il est manifeste, d'après la façon même dont on a construit $E(z)$, que la partie imaginaire de cette fonction est constante sur la circonférence de rayon q; cette partie imaginaire y est d'ailleurs nulle; en effet, pour $z = qe^{i\theta}$, la valeur de la fonction est

$$E(qe^{i\theta}) = \frac{i\omega'_1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\frac{\wp'\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right]}{\wp\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right)-e'_3}d\varepsilon;$$

or on a (T. M., LXIII, 5, et XI, 2)

$$\frac{\wp'\left(a+\frac{\omega'_3}{2}\right)}{\wp\left(a+\frac{\omega'_3}{2}\right)-e'_3} = \zeta\left(a-\frac{\omega'_3}{2}\right) - \zeta\left(a+\frac{\omega'_3}{2}\right) + \eta'_3.$$

Comme $\zeta\left(a+\frac{\omega'_3}{2}\right)$ et $\zeta\left(a-\frac{\omega'_3}{2}\right)$ sont imaginaires conjugués, il en résulte évidemment que la valeur de $E(qe^{i\theta})$ est réelle.

Si dans la fonction $E(z)$ on fait la transformation de z en q/z, ce qui intervertit les frontières, et si l'on envisage l'expression

$$\frac{1}{i}E\left(\frac{q}{z}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\frac{d}{d\varepsilon}\log \xi_{30}\left(-\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega'_3}{2}\right)d\varepsilon$$

la partie réelle de cette nouvelle fonction sera nulle sur la frontière extérieure, et la partie imaginaire sera $-f(\theta)$ au point $qe^{-i\theta}$. On en conclut sans difficulté que la fonction

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d \log \xi_{30} \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon - \frac{\omega'_3}{2} \right) \tag{53}$$

a une partie réelle nulle pour $|z| = 1$, et une partie imaginaire égale à $g_1(\theta)$ pour $z = qe^{i\theta}$.

On en conclut enfin que la fonction

$$G(z) = E(z) + F(z)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} G(z) = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d \log \xi_{30} \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon \,\middle|\, \omega'_1 \omega'_3 \right) + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d \log \xi_{30} \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon - \frac{\omega'_3}{2} \,\middle|\, \omega'_1 \omega'_3 \right) \end{aligned} \tag{54}$$

est celle qui répond aux données $f(\theta)$ et $g_1(\theta)$.

Il résulte évidemment des considérations précédentes, que pour cette fonction, dans des circonstances connues, la partie réelle et la partie imaginaire tendront en général vers des limites déterminées quand z tendra vers un point des frontières (et notamment lorsque les données seront intégrables et de carrés intégrables). Et l'on pourra, en général, écrire, en remarquant que par construction, la deuxième intégrale qui figure dans $G(z)$ est imaginaire pure pour $|z| = 1$,

$$g(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d \log \xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi} (\theta - \varepsilon) + \frac{1}{i\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d \log \xi_{30} \left(\frac{\omega'_1}{\pi} (\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2} \right). \tag{55}$$

Et l'on a de même,

$$f_1(\theta) = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d \log \xi_{30} \left(\frac{\omega'_1}{\pi} (\theta - \varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d \log \xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi} (\theta - \varepsilon). \tag{56}$$

Les fonctions $g(\theta)$ et $f_1(\theta)$ seront elles-mêmes de carrés intégrables en même temps que les données. Si ces données satisfont à des conditions de Lipschitz, g et f_1 y satisferont également, et l'on aura

$$g(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(\varepsilon) - f(\theta)]\, d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \frac{1}{i\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right);$$

$$f_1(\theta) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon).$$

On peut remarquer qu'on vérifie facilement les relations

$$\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$$

et

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} g_1(\theta)\, d\theta.$$

Quant à la dérivée normale de la partie réelle de $G(z)$, elle existera dans des conditions générales que je ne répéterai pas; notamment si les données f et g_1 sont les intégrales indéfinies de deux fonctions intégrables ainsi que leurs carrés, les fonctions $h(\theta)$ et $h_1(\theta)$ définies comme on sait, jouiront de la même propriété. On aura, en général, à cause de (51),

$$\frac{\partial G}{\partial \varrho} = \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\frac{d}{d\varrho}\left\{\zeta\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\right] - \zeta_3\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\right]\right\} d\varepsilon +$$

$$+ \frac{\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\frac{d}{d\varrho}\left\{\zeta\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right] - \zeta_3\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right]\right\} d\varepsilon.$$

On sait que

$$\frac{d}{du}(\zeta_3 u - \zeta u) = \wp u - \wp(u + \omega'_3).$$

Par suite il vient

$$\frac{\partial G}{\partial \varrho} = -\frac{\omega'^2_1}{\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\left\{\wp\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\right] - \wp\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \omega'_3\right]\right\} d\varepsilon$$

$$- \frac{\omega'^2_1}{i\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\left\{\wp\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right] - \wp\left[\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho + \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right]\right\} d\varepsilon.$$

Supposons $f(\theta)$ continue sauf en un nombre fini de points θ_i, et pourvue presque partout d'une dérivée $f'(\theta)$. La première partie de l'expression précédente pourra s'écrire

$$\frac{\omega'_1}{\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\frac{d}{d\varepsilon}\left|\frac{\zeta'_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)}{\zeta_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)}\right| d\varepsilon$$

ou encore

$$\frac{\omega'_1}{\pi^2\varrho}\sum_i\left[f(\theta_i-0)-f(\theta_i+0)\right]\frac{\zeta'_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_i)\right)}{\zeta_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_i)\right)}-$$

$$-\frac{\omega'_1}{\pi^2\varrho}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)\frac{\zeta'_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)}{\zeta_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log\varrho+\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right)}d\varepsilon$$

le point $\theta=0$ pouvant être compris dans les points θ_i sous le signe $\sum$ sans modifications d'écriture, comme il résulte immédiatement du fait que la fonction $\frac{\zeta'_{30}u}{\zeta_{30}u}$ admet la période $2\omega'_1$. De là on tire, pour $\varrho=1$, dans des conditions déjà énoncées,

$$(57)\qquad h(\theta)=\frac{\omega'_1}{\pi^2}\sum_i\left[f(\theta_i-0)-f(\theta_i+0)\right]\frac{\zeta'_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_i)}{\zeta_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_i)}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)\,d\log\zeta_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-$$

$$-\frac{\omega'_1}{i\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\left\{\wp\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right]-\wp\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta+\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right]\right\}d\varepsilon$$

la dernière intégrale écrite étant évidemment imaginaire pure.

En suivant une voie analogue, on peut encore démontrer que quand ϱ tend vers q, la portion de $\frac{\partial G}{\partial\varrho}$ relative à $f(\varepsilon)$ devient imaginaire pure, et que, en supposant $g_1(\theta)$ pourvue d'une dérivée presque partout, la portion relative à $g_1(\varepsilon)$ donne à la limite, en général, une partie réelle égale à $1/q\,.\,g'_1(\theta)$; d'où pour la dérivée normale (extérieure),

$$h_1(\theta)=-\frac{1}{q}g'_1(\theta).$$

Si les données, au lieu d'être $f(\theta)$ et $g_1(\theta)$, sont $f_1(\theta)$ et $g(\theta)$, la solution se déduit immédiatement de ce qui précède. A cet effet, dans la fonction $g(z)$, faisons la transformation de z en q/z; la fonction $G\left(\frac{q}{z}\right)$ aura une partie réelle égale à $f(\theta)$ au point $qe^{-i\theta}$, et une partie imaginaire égale à $g_1(\theta)$ au point $e^{-i\theta}$. En posant

$$f_1(\theta) = f(-\theta)$$

et

$$g(\theta) = g_1(-\theta),$$

des transformations simples amènent à écrire la fonction

$$(58)\qquad H(z) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2}\,\Big|\,\omega'_1, \omega'_3\right) -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\,\Big|\,\omega'_1, \omega'_3\right)$$

dont la partie réelle sera $f_1(\theta)$ au point $qe^{i\theta}$, et la partie imaginaire $g(\theta)$ au point $e^{i\theta}$. C'est la fonction cherchée, répondant aux données f_1 et g. Des conclusions analogues à celles qui ont été développées pour $G(z)$ sont actuellement valables, et notamment, on a, dans des conditions connues

$$(59)\qquad f(\theta) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon);$$

$$(60)\qquad g_1(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{1}{i\pi}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right)$$

puis, relativement aux dérivées normales,

$$h(\theta) = g'(\theta)$$

et

$$(61)\qquad h_1(\theta) = \frac{\omega'_1}{\pi^2}\sum_j \frac{\xi'_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_j)}{\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_j)}[f_1(\theta_j-0) - f_1(\theta_j+0)] + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon)\, d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) +$$
$$+\frac{\omega'^2_1}{i\pi^3 q}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\left[\wp\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right)\right]d\varepsilon.$$

§ 6. Je passe maintenant au cas où l'on donne $f(\theta)$ et $h_1(\theta)$. La fonction cherchée est alors celle que j'ai déjà indiquée antérieurement (cf. H. Villat, Comptes-Rendus, Sept-1911, Xenia, Athènes, loc. cit. 1912) et sur laquelle M. U. Dini est revenu dans son Mémoire (Palermo, 1913, loc. cit.). Je vais faire voir brièvement qu'elle se déduit presque sans calcul de ce qui précède. On suppose toujours la relation

$$\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon = 0 \tag{62}$$

pour l'uniformité du résultat à obtenir.

Reprenons la fonction $E(z)$ considérée déjà; sa partie imaginaire est nulle sur la circonférence $|z| = q$ des deux côtés de laquelle $E(z)$ est régulière; par suite la dérivée normale de la partie réelle sera certainement nulle sur cette circonférence, — ce qu'on vérifierait au reste facilement.

Ceci posé, considérons la fonction

$$I(z) = \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2}\middle|\,\omega'_1\,\omega'_3\right)d\varepsilon \tag{63}$$

visiblement construite de manière à ce que sa dérivée par rapport à $\varrho\,(z = \varrho e^{i\theta})$ reproduise

$$\frac{iq}{\pi\varrho}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\,d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2}\right).$$

Nous savons que cette dernière expression (analogue à la fonction $F(z)$ du paragraphe précédent) possède une partie réelle qui, pour z tendant vers $qe^{i\theta}$ tend en général vers $-h_1(\theta)$. La fonction $I(z)$ est d'ailleurs uniforme, car la différence des valeurs qu'elle prend pour deux valeurs de $\log z$ différant de $2i\pi$, est

$$\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \frac{\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{\pi} + 2\omega'_1\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2}\right)}\,d\varepsilon = \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log(-1)\,d\varepsilon$$

quantité nulle par hypothèse. Enfin, pour $z = e^{i\theta}$, la valeur

$$I(e^{i\theta}) = \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right)d\varepsilon$$

est imaginaire pure, car la partie réelle de cette expression serait

$$\frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\left\{\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right)\xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right)\right\}d\varepsilon.$$

ou bien (T. M., LX, 4),

$$\frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\left(-\sqrt{e_1-e_3}\,\sqrt{e_2-e_3}\right)d\varepsilon = 0.$$

La fonction $I(z)$ a donc une partie réelle nulle sur la circonférence de rayon 1, et cette partie réelle a pour dérivée normale extérieure $h_1(\theta)$ au point $qe^{i\theta}$.

Au sujet de cette fonction $I(z)$ introduisons ici une remarque, qu'aussi bien on pourrait aussi démontrer autrement. En utilisant la relation

$$\log\xi_{30}u = \log\sigma_3 u - \log\sigma u,$$

et les formules (T. M., CVI, 1) on trouve facilement

$$\log\xi_{30}u = -\log\frac{2\omega'_1}{\pi} - \log\sin\frac{\pi u}{2\omega'_1} + \sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{n(1+q^{2n})}\left(2\sin\frac{n\pi u}{2\omega'_1}\right)^2$$

(il est à noter que les formules (T. M.) auxquelles nous renvoyons ici, désignent par q la quantité que nous désignons actuellement par q^2). Partant de là, un calcul que j'omets pour abréger (d'autant qu'on trouvera dans le Mémoire cité de M. U. Dini, le développement d'un calcul inverse assez analogue) conduit à l'égalité suivante, assurément valable dans l'intérieur de la couronne,

(64) $$I(z) = -ib_0 + \sum_1^\infty (a_n - ib_n)z^n - \sum_1^\infty (a_n + ib_n)z^{-n}$$

où l'on a posé

(65)
$$b_0 = -\frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\theta h_1(\theta)d\theta$$

$$a_n = -\frac{q^{n+1}}{n\pi(1+q^{2n})}\int_0^{2\pi} h_1(\theta)\cos n\theta d\theta,\quad b_n = -\frac{q^{n+1}}{n\pi(1+q^{2n})}\int_0^{2\pi} h_1(\theta)\sin n\theta d\theta.$$

Ceci montre qu'on a

$$h_1(\theta) \sim -\sum_1^{\infty} n a_n \frac{1 + q^{2n}}{q^{n+1}} \cos n\theta - \sum_1^{\infty} n b_n \frac{1 + q^{2n}}{q^{n+1}} \sin n\theta .$$

Admettons alors que $h_1(\theta)$ soit sommable en même temps que son carré; on aura, d'après un théorème de P. Fatou,

$$\int_0^{2\pi} h_1^2(\theta)\, d\theta = \sum_1^{\infty} n^2 a_n^2 \frac{(1 + q^{2n})^2}{q^{2n+2}} + \sum_1^{\infty} n^2 b_n^2 \frac{(1 + q^{2n})^2}{q^{2n+2}} .$$

On en conclut de suite que les séries

$$\sum a_n^2 \frac{(1 \pm q^{2n})^2}{q^{2n}}, \quad \sum b_n^2 \frac{(1 \pm q^{2n})^2}{q^{2n}}, \quad \sum n^2 a_n^2, \quad \sum n^2 b_n^2, \quad \sum a_n^2, \quad \sum b_n^2,$$

sont toutes convergentes, et par suite on peut poser, $g(\theta)$, $h(\theta)$, $f_1(\theta)$, $g_1(\theta)$ désignant des fonctions de carrés sommables,

$$(66) \qquad \begin{aligned} g(\theta) &= -b_0 - \sum_1^{\infty} 2 b_n \cos n\theta + \sum_1^{\infty} 2 a_n \sin n\theta \\ h(\theta) &= \sum_1^{\infty} 2 n a_n \cos n\theta + \sum_1^{\infty} 2 n b_n \sin n\theta \\ f_1(\theta) &\sim \sum_1^{\infty} a_n \left(q^n - \frac{1}{q^n}\right) \cos n\theta + \sum_1^{\infty} b_n \left(q^n - \frac{1}{q^n}\right) \sin n\theta \\ g_1(\theta) &\sim -b_0 + \sum_1^{\infty} -b_n \left(q^n + \frac{1}{q_n}\right) \cos n\theta + \sum_1^{\infty} a_n \left(q^n + \frac{1}{q^n}\right) \sin n\theta . \end{aligned}$$

Les deux premières de ces fonctions sont la partie réelle et la dérivée normale de celle-ci, sur la circonférence de rayon un; ceci résulte de ce que le développement en série de Laurent de $I(z)$ est convergent pour $|z| = 1$, et même au delà, comme il est évident d'après la construction même de $I(z)$. Quant à f_1 et g_1, ce seront la partie réelle et la partie imaginaire de $I(z)$ pour $|z| = q$; cela est facile à démontrer en employant une méthode indiquée par L. Lichtenstein (cf. le Mém. cité, p. 23).

De tout ceci il résulte que, si la donnée $h_1(\theta)$ est sommable avec son carré, il en sera de même de g, h, f_1, g_1.

Il est clair d'après ce qui précède, qu'une fonction de z répondant aux données $f(\theta)$ et $h_1(\theta)$ est

$$(67)\quad \begin{aligned} J(z) = E(z) + I(z) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \,\middle|\, \omega'_1\omega'_3\right) + \\ + \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2} \,\middle|\, \omega'_1\omega'_3\right) d\varepsilon \end{aligned}$$

à laquelle on peut ajouter une constante imaginaire pure quelconque. Pour cette fonction on a

$$(68)\quad \begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{q}{i\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right] d\varepsilon; \\ f_1(\theta) &= \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right] + \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\, d\varepsilon \end{aligned}$$

la dernière intégrale écrite dans $g(\theta)$ étant, comme on l'a déjà vu, imaginaire pure; puis

$$g_1(\theta) = \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\arg\left[\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right] d\varepsilon,$$

ce qui donne facilement

$$(69)\quad g_1(\theta) = -q\int_0^{\theta} h_1(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Enfin, par un calcul simple, on trouve, dans des conditions déjà énoncées,

$$(70)\quad \begin{aligned} h(\theta) = \frac{\omega'_1}{\pi^2}\sum_i [f(\theta_i - 0) - f(\theta_i + 0)]\frac{\xi'_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_i)}{\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\theta_i)} + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + \frac{iq}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right). \end{aligned}$$

Si les données sont de carrés sommables, et si $f(\theta)$ est en même temps l'intégrale indéfinie d'une fonction de pareille nature, les quatre fonctions qu'on vient d'écrire jouiront de la même propriété.

Si dans la fonction $J(z)$ on change z en q/z, la partie réelle de $J\left(\frac{q}{z}\right)$ sera $f(\theta)$ au point $qe^{-i\theta}$; et des propriétés connues de l'inversion il suit que cette partie réelle aura une dérivée normale extérieure égale à $qh_1(\theta)$ au point $e^{-i\theta}$. De sorte qu'en posant

$$f(-\theta) = f_1(\theta),$$

$$qh_1(-\theta) = h(\theta)$$

on voit, après transformations simples, que la fonction

(71)
$$K(z) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega'_3}{2}\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right) + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right) d\varepsilon$$

répond aux données $f_1(\theta)$ et $h(\theta)$. On peut du reste lui ajouter une constante imaginaire pure. Pour cette fonction on a

(72)
$$f(\theta) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}\left|\theta - \varepsilon\right| d\varepsilon$$

puis

$$g(\theta) = +\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\arg\left(\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon)\right) d\varepsilon$$

ce qui donne sans difficulté

(73)
$$g(\theta) = \int_0^{\theta} h(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

et enfin

$$g_1(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log \xi_{30}\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2}\right) d\varepsilon;$$

$$h_1(\theta) = \frac{\omega'_1}{\pi^2 q} \sum_j [f_1(\theta_j - 0) - f_1(\theta_j + 0)] \frac{\xi'_{30} \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \theta_j)}{\xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \theta_j)} +$$

(74)

$$+ \frac{1}{\pi q} \int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon) d \log \xi_{30} \frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{i}{\pi q} \int_0^{2\pi} h(\varepsilon) d \log \xi_{30} \left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) - \frac{\omega'_3}{2} \right).$$

Ces fonctions jouissent de propriétés analogues à celles dont il était question il y a un instant.

§ 7. Pour terminer ces généralités, nous voulons encore signaler les cas où les données de la question seraient $h(\theta)$ et $g_1(\theta)$, ou bien $g(\theta)$ et $h_1(\theta)$.

Soit $L(z)$ une fonction de z répondant aux données $h(\theta)$ et $g_1(\theta)$, en supposant particulièrement $g_1 \equiv 0$ (Bien entendu, on a toujours, comme dans tout ce qui précède,

(75) $$\int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta = 0).$$

Une telle fonction étant réelle sur le cercle de rayon q, est prolongeable analytiquement dans la couronne de rayons extrêmes q et q^2, et l'on démontre bien facilement que les valeurs de la dérivée normale de la partie réelle devront être $h(\theta)$ (sur la circonférence de rayon 1) et $1/q^2 . h(\theta)$ (sur la circonférence de rayon q^2). Donc, en se reportant à la fonction $D(z)$ et en employant ici une formation analogue dans la couronne de rayons extrêmes 1 et q^2, on voit immédiatement que la fonction cherchée $L(z)$ ne saurait différer que par une constante de la fonction suivante

$$L_1(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varepsilon) \log \left\{ \sigma\left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon \,\middle|\, \omega'_1 \omega'_3 \right) \sigma_3 \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon \,\middle|\, \omega'_1 \omega'_3 \right) \right\} d\varepsilon -$$

$$- \frac{2\eta'_1 \omega'_1}{i\pi^3} \log z \int_0^{2\pi} \varepsilon h(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Formons la valeur de cette fonction pour $z = qe^{i\theta}$, il vient

$$L_1(qe^{i\theta}) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varepsilon) \log \sigma \left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2} \right) \sigma_3 \left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta - \varepsilon) + \frac{\omega'_3}{2} \right) d\varepsilon -$$

$$- \frac{2\eta'_1 \omega'_1}{i\pi^3} \left(i\theta - \frac{\pi\omega'_3}{2i\omega'_1} \right) \int_0^{2\pi} \varepsilon h(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Mais on a (T. M., XII, 3)

$$\sigma_3\left(a+\frac{\omega'_3}{2}\right) = -e^{-\eta'_3\left(a-\frac{\omega'_3}{2}\right)}\frac{\sigma_1\omega'_3\,\sigma_2\omega'_3}{\sigma\omega'_3}\sigma\left(a-\frac{\omega'_3}{2}\right).$$

Donc, en tenant compte de l'hypothèse relative à h, et de la relation

$$\eta'_1\omega'_3 - \eta'_3\omega'_1 = \frac{i\pi}{2},$$

il vient

$$L_i(q\,e^{i\theta}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right)d\varepsilon -$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{i\pi}{2}+\frac{2\eta'_1\omega'_1\theta}{\pi}\right)\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Par suite, on peut écrire, à une constante (réelle) près,

$$L(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)\sigma_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)d\varepsilon -$$

(76)

$$-\frac{2\eta'_1\omega'_1}{i\pi^3}\log z\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon.$$

A côté de cette fonction, considérons une fonction $M(z)$ dont la partie imaginaire soit $g_1(\theta)$ sur la circonférence de rayon q, et égale à une constante K sur la circonférence de rayon 1, — la constante K étant telle que

$$2\pi K = \int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)d\varepsilon.$$

La derivée normale de la partie réelle sera alors nulle sur la frontière $|z|=1$. Dans ces conditions, il existe une fonction uniforme $M(z)$ répondant à la question, sous la forme

$$M(z) = -\frac{\omega_1}{2\pi^3}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)d\varepsilon \int_0^{2\pi} \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \middle| \omega_1\omega_3\right)d\varepsilon +$$

$$+ \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \middle| \omega_1\omega_3\right)d\varepsilon$$

comme il résulte de la formation de $B(z)$ considérée antérieurement. D'ailleurs on peut montrer que

$$\int_0^{2\pi} \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \middle| \omega_1\omega_3\right)d\varepsilon = -\frac{\pi}{\omega_1}\left[i\pi + 2\eta_1\omega_1\left(1 - \frac{\log z}{i\pi}\right)\right]$$

(cf. mon Mém. cité du Circolo di Palermo, 1912, parag. 6). Par suite

$$(77)\quad M(z) = \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \middle| \omega_1\omega_3\right)d\varepsilon + \frac{1}{2\pi^2}\left\{i\pi + 2\eta_1\omega_1\left(1 - \frac{\log z}{i\pi}\right)\right\}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)d\varepsilon$$

et enfin, une fonction répondant aux données $h(\theta)$ et $g_1(\theta)$ est (avec, si l'on veut, une constante additionnelle, réelle),

$$(78)\quad \begin{aligned} P_1(z) &= L(z) + M(z) = \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \middle| \omega'_1\omega'_3\right)\sigma_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\varepsilon \middle| \omega'_1\omega'_3\right)d\varepsilon - \\ &- \frac{2\eta'_1\omega'_1}{i\pi^3}\log z\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon \middle| \omega_1\omega_3\right)d\varepsilon + \\ &+ \frac{1}{2\pi^2}\left[i\pi + 2\eta_1\omega_1\left(1 - \frac{\log z}{i\pi}\right)\right]\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)d\varepsilon. \end{aligned}$$

On peut simplifier cette expression, qui présente du reste l'inconvénient de comporter des fonctions elliptiques construites avec des paires de périodes différentes. Tout d'abord, de la définition des périodes, il résulte qu'on a le droit de prendre

$$\omega'_1 = \omega_1, \quad \omega'_3 = 2\omega_3.$$

Cela étant, désignons toujours par des lettres accentuées les quantités relatives aux fonctions elliptiques construites avec $2\omega'_1$, $2\omega'_3$. On sait que (T. M., XXIV, 1)

$$\sigma(a\,|\,\omega'_1\omega'_3)\,\sigma_3(a\,|\,\omega'_1\omega'_3) = e^{-e'_3\frac{a^2}{2}}\,\sigma\left(a\,|\,\omega'_1\,\frac{\omega'_3}{2}\right) = e^{-\frac{e'_3 a^2}{2}}\,\sigma(a\,|\,\omega_1\omega_3).$$

Puis

$$\eta'_1 = \zeta(\omega'_1\,|\,\omega'_1\omega'_3)$$

est lié à

$$\eta_1 = \zeta\left(\omega'_1\,\middle|\,\omega'_1\,\frac{\omega'_3}{2}\right)$$

par (T. M., XXIV, 4)

$$\eta_1 = 2\eta'_1 + e'_3\omega'_1$$

et

$$e'_3 = \wp(\omega'_3\,|\,\omega'_1\omega'_3)$$

est lié à

$$e_1 = \wp\left(\omega'_1\,\middle|\,\omega'_1\,\frac{\omega'_3}{2}\right)$$

par (id. 5)

$$e_1 = -2e'_3.$$

Ceci permet de ne conserver dans la formule définitive, que des fonctions elliptiques aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$; et après réductions on obtient, en négligeant la constante réelle, sans importance, $-\frac{e_1\omega_1^2}{4\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon^2 h(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon$

$$(79)\quad \begin{aligned} P(z) = &-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1\,\omega_3\right)d\varepsilon + \left(\frac{i}{2\pi} - \frac{\eta_1\omega_1}{i\pi^3}\log z\right)\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon + \\ &+\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1\,\omega_3\right)d\varepsilon + \left[\frac{i}{2\pi} - \frac{\eta_1\omega_1}{i\pi^3}\log z\right]\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon. \end{aligned}$$

Pour cette fonction, les expressions $f(\theta)$, $g(\theta)$, $f_1(\theta)$, $h_1(\theta)$, existeront en général, et seront de carrés sommables, dès que les données $g_1(\theta)$, $h(\theta)$, jouiront de la même propriété, et que la fonction g_1 sera la primitive d'une fonction de carré sommable. On aura du reste en général, comme conséquence de calculs que je ne reproduis pas pour abréger,

(80)
$$f(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon + $$
$$+\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$
$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon + \int_0^{\theta} h(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$
$$f_1(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varepsilon)\log\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h(\varepsilon)\,d\varepsilon +$$
$$+\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$
$$h_1(\theta) = -\frac{1}{q}g'_1(\theta).$$

Si enfin dans la fonction $P(z)$ on fait la transformation de z en q/z, un procédé déjà expliqué plus haut conduit sans difficulté, après réductions, à la fonction

(81)
$$Q(z) = -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\Big|\,\omega_1\,\omega_3\right)d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1}{i\pi^3}\log z\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon -$$
$$-\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\Big|\,\omega_1\omega_3\right)d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1}{i\pi^3}\log z\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

(à laquelle on peut d'ailleurs ajouter une constante réelle quelconque), et qui répond aux données $g(\theta)$ et $h_1(\theta)$. On suppose toujours

$$\int_0^{2\pi} h_1(\theta)\,d\theta = 0.$$

Et dans les mêmes conditions que plus haut, on a les expressions, donnant naissance à des conclusions analogues à celles qu'on a déjà dites,

$$f(\theta) = -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon -$$
$$-\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

(82)

$$f_1(\theta) = -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon -$$
$$-\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$g_1(\theta) = -q\int_0^{\theta} h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$h(\theta) = g'(\theta).$$

§ 8. La simple comparaison des résultats qui précèdent, permet d'écrire à côté de certaines équations intégrales, une solution de celles-ci. Je citerai rapidement ci-dessous quelques uns des plus simples parmi les ensembles de formules qu'on peut obtenir de cette manière. Je n'ai pas besoin de redire que nombre des intégrales qui vont être écrites doivent être entendues comme égales à leur valeur principale, et qu'on pourrait éviter cette convention en introduisant, comme on l'a déjà indiqué, à la place d'une expression telle que $\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon$ une autre de la forme $\int_0^{2\pi}[f(\varepsilon)-f(\theta)]\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon$, qui est reliée simplement à la première.

Si l'on envisage une fonction régulière de z donné dans le domaine annulaire, soit par la connaissance de $f(\theta)$ et $f_1(\theta)$, soit par celle de $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$, il est clair qu'il résulte des paragraphes 2 et 3, que les systèmes d'équations

(83)

$$g(\theta) = \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + C_1,$$

$$g_1(\theta) = \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\zeta\frac{\omega_1}{\pi^2}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + C_1,$$

et

$$(84)\qquad \begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,\zeta\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,\zeta_3\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + C_2, \\ f_1(\theta) &= -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,\zeta_3\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,\zeta\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + C_2, \end{aligned}$$

seront réciproques les uns des autres; les constantes C_1 et C_2 y sont d'ailleurs liées aux données par les relations

$$(85)\qquad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta &= \int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta = \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\theta[g(\theta)-g_1(\theta)]\,d\theta + 2\pi C_2, \\ \int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta &= \int_0^{2\pi} g_1(\theta)\,d\theta = -\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\theta[f(\theta)-f_1(\theta)]\,d\theta + 2\pi C_1. \end{aligned}$$

Si f et f_1 sont de carrés sommables, il en est de même de g et g_1, et réciproquement.

Le cas des données f, f_1, d'une part, f, g_1 d'autre part, permet de même d'écrire les équations réciproques

$$(86)\qquad \begin{aligned} g_1(\theta) &= \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,\zeta_3\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,\zeta\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \\ &\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon[f(\varepsilon)-f_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon, \\ f_1(\theta) &= \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\,\middle|\,\omega'_1\,\omega'_3\right] + \\ &\qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,\middle|\,\omega'_1\,\omega'_3\right]. \end{aligned}$$

Si notamment on sait que $\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta = 0$, on peut plus simplement écrire les relations

$$(87)\quad \begin{cases} g_1(\theta) = -\dfrac{\omega_1}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,\zeta\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon. \\ f_1(\theta) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right], \end{cases}$$

dont chacune donne une solution de l'autre.

Les données f, f_1, et les données f, h_1, indiquent les relations, qu'on doit rapprocher,

$$(88)\quad h_1(\theta) = \frac{\omega_1^2}{\pi^3 q}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,\wp\left[\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\omega_3\right]d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2 q}\sum_j [f_1(\theta_j+0)-f(\theta_j-0)]\,\zeta\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\theta_j) + $$
$$+ \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} f_1(-0) + \frac{\omega_1}{\pi^2 q}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon)\,\zeta\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$f_1(\theta) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right] + \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\xi_{30}\,\frac{\omega'_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon.$$

Supposant $f=0$, et f_1 continu, on a en même temps, dès que f_1 possède une dérivée sommable,

$$(89)\quad h_1(\theta) = \frac{\omega_1}{\pi^2 q}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon)\,\zeta\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} f_1(-0)$$

et

$$(90)\quad f_1(\theta) = \frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\xi_{30}\,\frac{\omega'_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon.$$

Des données g, f_1, ou g, g_1, on tire de même les équations

$$(91)\quad f_1(\theta) = -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\,\zeta_3\,\frac{\omega_1}{\pi^2}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,\zeta\,\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\varepsilon + $$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon[g(\varepsilon)-g_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon,$$

$$g_1(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) - \frac{1}{i\pi}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\left[\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right],$$

on peut y faire $g = 0$ si l'on est assuré que $\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\, d\theta = 0$.

Les données g, f_1, et g, h_1 donnent, en supposant par exemple f_1 continu et de dérivée sommable,

(92)

$$h_1(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon) d\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) +$$

$$+\frac{\omega'^2_1}{i\pi^3 q}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\left[\wp\left\{\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)-\frac{\omega'_3}{2}\right\} - \wp\left\{\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)+\frac{\omega'_3}{2}\right\}\right] d\varepsilon,$$

$$f_1(\theta) = -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \sigma\frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\, d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\, d\varepsilon -$$

$$-\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\, \xi_3\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\, d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon)\, d\varepsilon + C.$$

En négligeant g, qui ne joue qu'un rôle épisodique, on obtient les relations plus simples

(93)

$$h_1(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon) d\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon),$$

$$f_1(\theta) = -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log \sigma\frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\, d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon h_1(\varepsilon)\, d\varepsilon + C.$$

Partons des données h, f_1, et h, g_1, en supposant tout de suite, pour simplifier, $h = 0$; on a les deux équations

(94)

$$f_1(\theta) = \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, \xi\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\, d\varepsilon - \frac{\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\, d\varepsilon + C',$$

$$g_1(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\, d\log \xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon) + C''.$$

On s'assure bien simplement que les deux constantes C' et C'' ont les valeurs suivantes

(95)
$$C' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon\, g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$
$$C'' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

par exemple en observant que les intégrales

$$\int_0^{2\pi}\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\theta$$

et

$$\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\varepsilon}\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon)\,d\theta$$

ont pour valeurs principales $2\pi\eta_1\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)$ et zéro.

Enfin, des données h, f_1, et h, h_1, nous tirerons, en supposant f_1 continue, et pourvue d'une dérivée, et en supposant de suite $h=0$, les deux équations

(96)
$$h_1(\theta) = \frac{1}{\pi q}\int_0^{2\pi} f'_1(\varepsilon)\,d\log\xi_{30}\frac{\omega'_1}{\pi}(\theta-\varepsilon),$$
$$f_1(\theta) = -\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon)\log\sigma\frac{\omega_1}{\pi}|\theta-\varepsilon|\,d\varepsilon - \frac{q\eta_1\omega_1\theta}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varepsilon\, h_1(\varepsilon)\,d\varepsilon + C^{te}.$$

Il est clair qu'on pourrait obtenir encore un grand nombre d'équations ou de groupes d'équations simultanées, à côté desquels les inconnues simultanées pourraient être explicitées. Nous nous contenterons ici des relations qui précèdent, et dont certaines sont effectivement utiles dans diverses questions, d'Hydrodynamique notamment.

II.

§ 9. Je veux maintenant obtenir, en partant des considérations développées dans le Chapitre qui précède, quelques résultats relatifs à une fonction analytique dans un rectangle donné, — résultats que je veux appliquer un peu plus loin.

Reprenons tout d'abord la fonction

$$(97)\quad \begin{aligned} A(z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1\,\omega_3\right)d\varepsilon - \\ - \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1\,\omega_3\right)d\varepsilon \end{aligned}$$

et supposons que les fonctions périodiques f et f_1 satisfassent aux relations

$$(98)\quad \begin{aligned} f(2\pi-\varepsilon) &= -f(\varepsilon) \\ f_1(2\pi-\varepsilon) &= -f_1(\varepsilon), \end{aligned}$$

moyennant lesquelles la condition, nécessaire comme on sait à l'uniformité de $A(z)$,

$$\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{2\pi} f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

est vérifiée d'elle même. Par un calcul facile, $A(z)$ devient

$$(99)\quad \begin{aligned} A_1(z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) + 2\eta_1\right]d\varepsilon - \\ - \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_1(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) + 2\eta_1\right]d\varepsilon. \end{aligned}$$

Négligeons la constante imaginaire pure

$$\frac{2i\eta_1\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi}[f(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

qui est sans intérêt pour nous. Il reste

$$(100)\quad A_2(z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon -$$

$$- \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f_1(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon .$$

Or cette fonction est imaginaire pure pour z réel. Cela est évident pour z réel positif (entre q et 1). Supposons z négatif, entre -1 et $-q$; on sait qu'on peut considérer seulement pour $\log z$ la valeur

$$\log z = \log \varrho + i\pi \qquad (\varrho = |z|).$$

Or pour cette valeur du logarithme, la fonction $A_2(z)$ prend d'après des formules connues (T. M., XII, 5) la valeur

$$\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f(\varepsilon)\left[\zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log \varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log \varrho + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon -$$

$$- \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f_1(\varepsilon)\left[\zeta_2\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log \varrho - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_2\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log \varrho + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon$$

ce qui est visiblement imaginaire pure.

Il en résulte que la partie réelle de $A_2(z)$ a les valeurs: $f(\theta)$ ou $f_1(\theta)$ sur les demi-circonférences de rayons respectifs 1 et q, et zéro sur les segments rectilignes -1, $-q$; q, $+1$.

Faisons maintenant la transformation

$$(101)\qquad Z = X + iY = \frac{\lambda}{i}\log z$$

λ étant une constante réelle positive quelconque, que nous préciserons ultérieurement. A la demi-couronne circulaire correspondra un domaine rectangulaire dont deux côtés seront portés par les axes du plan XOY, et dont les dimensions seront: dans le sens horizontal, $a = \lambda\pi$, et dans le sens vertical, $b = \lambda\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}$. La fonction de Z

$$(102)\qquad A^1(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{\lambda\pi}Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{\lambda\pi}Z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon -$$

$$- \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f_1(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\lambda\pi}Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\lambda\pi}Z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon$$

a sa partie réelle nulle sur les bords verticaux, et égale à $f(\theta)$ ou à $f_1(\theta)$ aux points d'abscisse $\lambda\theta$, sur les bords horizontaux (le côté inférieur correspond à $f(\theta)$). Tout ce qui a été dit au sujet de la fonction analytique dans une couronne, se transpose immédiatement sans aucun changement, dans le nouveau domaine rectangulaire.

Partons maintenant de la fonction, écrite avec d'autres périodes ω'_1 et ω'_3,

$$A_3(z) = \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_2(\varepsilon)\,\zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\,\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)d\varepsilon -$$

$$- \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f_3(\varepsilon)\,\zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\,\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)d\varepsilon.$$

D'après ce qui précède, la fonction

$$(103) \qquad A_4(z) = \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_2(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\,\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega'_1}{\pi}\,\varepsilon\right)\right]d\varepsilon -$$

$$- \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_3(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega'_1}{\pi}\,\varepsilon\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega'_1}{\pi}\,\varepsilon\right)\right]d\varepsilon$$

a une partie réelle égale à $f_2(\theta)$ ou $f_3(\theta)$ sur les demi-circonférences de rayon respectifs 1 et q' $\left(q' = e^{-\frac{\pi\omega'_3}{i\omega'_1}}\right)$, et à zéro le long des segments rectilignes -1, $-q'$; q', $+1$. μ étant une constante réelle positive, posons

$$(104) \qquad Z = X + iY = \mu(\log z - \log q').$$

A la demi-couronne correspond dans le plan Z un rectangle dont deux côtés sont sur les axes OX et OY, et dont les dimensions sont: suivant OX, $a = \mu\frac{\pi\omega'_3}{i\omega'_1}$, et suivant OY, $b = \mu\pi$. Par suite la fonction de Z (après simplifications immédiates)

$$(105) \qquad B^1(Z) = \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_2(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi\mu}Z - \frac{\omega'_1}{\pi}\,\varepsilon\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi\mu}Z + \frac{\omega'_1}{\pi}\,\varepsilon\right)\right]d\varepsilon -$$

$$- \frac{i\omega'_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_3(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi\mu}Z - \frac{\omega'_1}{\pi}\,\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega'_1}{i\pi\mu}Z + \frac{\omega'_1}{\pi}\,\varepsilon\right)\right]d\varepsilon$$

a sa partie réelle égale à zéro sur les bords horizontaux et à $f_2(\theta)$ ou $f_3(\theta)$ sur les bords verticaux, aux points d'ordonnée $\mu\theta$ (f_2 correspond au bord droit, f_3 au bord gauche.)

Faisons maintenant coïncider les deux rectangles ci-dessus, en supposant, ce qui est évidemment permis, ses dimensions égales à ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$. On s'assure facilement qu'il suffit de poser

$$\lambda = \frac{\omega_1}{\pi}, \qquad \mu = \frac{\omega'_1}{\pi}$$

$$\omega'_1 = -i\omega_3, \qquad \omega'_3 = i\omega_1 .$$

Dans ces conditions, il y a lieu de ne conserver que des fonctions elliptiques correspondant aux demi-périodes ω_1 et ω_3. A cet effet, observons que

$$\zeta(u\,|\,\omega'_1\omega'_3) = \zeta(u\,|\,-i\omega_3, i\omega_1) = \zeta(u\,|\,i\omega_1, i\omega_3)$$

puis

$$\zeta(u\,|\,i\omega_1, i\omega_3) = -i\zeta\left(\frac{u}{i}\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right).$$

On a encore

$$\zeta_3(u\,|\,\omega'_1\omega'_3) = \zeta(u+\omega'_3\,|\,\omega'_1\omega'_3) - \zeta(\omega'_3\,|\,\omega'_1\omega'_3)$$

c'est à dire

$$\zeta_3(u\,|\,\omega'_1\omega'_3) = -i\left[\zeta\left(\frac{u}{i}+\omega_1\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right) - \zeta(\omega_1\,|\,\omega_1\omega_3)\right] = -i\zeta_1\left(\frac{u}{i}\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right).$$

Par suite la fonction $B^1(Z)$ prend la forme

$$(106) \qquad B^1(Z) = \frac{i\omega_3}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_2(\varepsilon)\left[\zeta_1\left(Z-\frac{\omega_3}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta_1\left(Z+\frac{\omega_3}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon -$$

$$-\frac{i\omega_3}{\pi^2}\int_0^{\pi} f_3(\varepsilon)\left[\zeta\left(Z-\frac{\omega_3}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(Z+\frac{\omega_3}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon.$$

La fonction $A^1(Z) + B^1(Z)$ a donc évidemment pour partie réelle une fonction harmonique qui résoud le problème de Dirichlet dans le rectangle considéré. Cette résolution n'est d'ailleurs pas entièrement nouvelle, puisque la fonction de Green pour le rectangle est déjà connue (cf. par exemple Goursat, Analyse, t. III).

En faisant le changement de notations

$$f\left(\frac{\pi}{\omega_1}t\right)=F(t),\quad f_1\left(\frac{\pi}{\omega_1}t\right)=F_2(t),\quad f_2\left(\frac{i\pi}{\omega_3}t\right)=F_1(t),\quad f_3\left(\frac{i\pi}{\omega_3}t\right)=F_3(t),$$

on voit sans peine que la somme $A^1(Z)+B^1(Z)$ en question peut s'écrire sous la forme

$$(107)\quad \begin{aligned} T(Z)=\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}F(t)[\zeta(Z-t)-\zeta(Z+t)]dt-\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}F_2(t)[\zeta_3(Z-t)-\zeta_3(Z+t)]dt-\\ -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_1(t)[\zeta_1(Z-it)-\zeta_1(Z+it)]dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_3(t)[\zeta(Z-it)-\zeta(Z+it)]dt.\end{aligned}$$

Cette fonction analytique, dont la partie réelle prend sur les bords du rectangle les valeurs: $F(X)$ pour $Z=X(0<X<\omega_1)$, $F_1(Y)$ pour $Z=\omega_1+iY\left(0<Y<\frac{\omega_3}{i}\right)$, $F_2(X)$ pour $Z=\omega_3+X(0<X<\omega_1)$, $F_3(Y)$ pour $Z=iY\left(0<Y<\frac{\omega_3}{i}\right)$, jouit dans ce domaine, de toutes les propriétés analogues à celles qu'on a rencontrées dans le Chapitre précédent pour les fonctions analogues.

Notamment, la valeur de la partie imaginaire de $T(Z)$ sur les bords verticaux, par exemple, sera bien définie dans des conditions déjà précisées, et auront pour expression en général: pour $Z=\omega_1+iY$,

$$(108)\quad \begin{aligned} G_1(Y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1}F(t)[\zeta_1(iY-t)-\zeta_1(iY+t)]dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1}F_2(t)[\zeta_2(iY-t)-\zeta_2(iY+t)]dt-\\ -\frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_1(t)[\zeta(iY-it)-\zeta(iY+it)]dt+\frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_3(t)[\zeta_1(iY-it)-\zeta_1(iY+it)]dt\end{aligned}$$

où la troisième intégrale a sa valeur principale; et pour $Z=iY$,

$$(109)\quad \begin{aligned} G_3(Y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1}F(t)[\zeta(iY-t)-\zeta(iY+t)]dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1}F_2(t)[\zeta_3(iY-t)-\zeta_3(iY+t)]dt-\\ -\frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_1(t)[\zeta_1(iY-it)-\zeta_1(iY+it)]dt+\frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}F_3(t)[\zeta(iY-it)-\zeta(iY+it)]dt\end{aligned}$$

où c'est la quatrième intégrale qui a sa valeur principale.

§ 10. Je veux maintenant traiter un nouveau problème, par un procédé également déduit du Chapitre précédent. Il s'agit de trouver une fonction analytique définie dans le rectangle ci-dessus, par les valeurs de sa partie réelle sur les bords horizontaux ($F(X)$ et $F_2(X)$, aux points d'abscisse X, F correspondant au bord inférieur), et par les valeurs de la partie imaginaire sur les bords verticaux ($G_1(Y)$ et $G_3(Y)$ aux points d'ordonnée Y, G_1 correspondant au bord droit).

Partons encore de la même fonction $A(z)$ que précédemment, mais supposons-y

$$f(2\pi-\varepsilon)=f(\varepsilon)$$
(110)
$$f_1(2\pi-\varepsilon)=f_1(\varepsilon)$$

de sorte que la condition de régularité devienne

(111)
$$\int_0^\pi f(\varepsilon)d\varepsilon=\int_0^\pi f_1(\varepsilon)d\varepsilon.$$

La fonction $A(z)$ se met alors aisément sous la forme suivante

$$\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)+\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z+\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon$$
(112)
$$-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi f_1(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)+\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z+\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon.$$

On s'assure sans grande difficulté que cette fonction est réelle lorsque z est un point des segments rectilignes -1, $-q$; q, $+1$, de l'axe réel. Par suite, en posant

$$\frac{\omega_1}{i\pi}\log z=Z=X+iY,\quad f\left(\frac{\omega_1}{\pi}t\right)=F(t),\quad f_1\left(\frac{\omega_1}{\pi}t\right)=F_2(t).$$

et opérant une transformation analogue à une déjà faite, la fonction de Z

(113)
$$S(Z)=\frac{i}{\pi}\int_0^1 F(t)[\zeta(Z-t)+\zeta(Z+t)]dt-\frac{i}{\pi}\int_0^1 F_2(t)[\zeta_3(Z-t)+\zeta_3(Z+t)]dt$$

a une partie réelle égale à $F(X)$ ou $F_2(X)$ sur les bords horizontaux du rectangle, et une partie imaginaire nulle sur les bords verticaux. D'ailleurs on a la condition

$$\int_0^{\omega_1} F(t)dt = \int_0^{\omega_1} F_2(t)dt. \tag{114}$$

Observons encore que la fonction $iS(Z\,|\,\omega'_1\omega'_3)$ construite avec de nouvelles périodes $2\omega'_1$ et $2\omega'_3$, aurait sa partie imaginaire égale à F ou à F_2 sur les bords horizontaux d'un rectangle analogue au précédent, et sa partie réelle nulle sur les bords verticaux. On en déduit qu'en posant

$$Z' = -i\omega'_3 + iZ$$

la fonction $iS\left(\frac{Z' + i\omega'_3}{i}\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)$ dans le plan Z' sera définie dans un rectangle dont deux côtés seront portés par les axes (les dimensions de ce rectangle étant $-i\omega'_3$ dans le sens horizontal, et ω'_1 dans le sens vertical); la partie réelle de cette nouvelle fonction sera nulle sur les bords horizontaux, et sa partie imaginaire sera $F(Y)$ ou $F_2(Y)$ aux points d'ordonnée Y, sur les bords verticaux, (F à droite). Donc la fonction

$$\begin{aligned} S_1(Z) = &-\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega'_1} G_1(t)\left[\zeta_3\left(\frac{Z + i\omega'_3}{i} - t\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right) + \zeta\left(\frac{Z + i\omega'_3}{i} + t\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)\right]dt + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega'_1} G_3(t)\left[\zeta_3\left(\frac{Z + i\omega'_3}{i} - t\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right) + \zeta_3\left(\frac{Z + i\omega'_3}{i} + t\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)\right]dt \end{aligned} \tag{115}$$

avec, au moins momentanément, la condition $\int_0^{\omega'_1} G_1(t)dt = \int_0^{\omega'_1} G_3(t)dt$, répond à la donnée de la partie imaginaire (G_1 et G_3) sur les bords verticaux, la partie réelle étant nulle sur les autres bords du nouveau rectangle.

Faisons maintenant coïncider les deux rectangles en posant

$$\omega_1 = -i\omega'_3, \quad \omega_3 = i\omega'_1$$

et observons que

$$\zeta\left(\frac{Z + i\omega'_3}{i} - t\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right) = -i\zeta\left(-Z - \omega_1 - \frac{t}{i}\,\middle|\,\omega_1\,\omega_3\right) = i\zeta(Z + \omega_1 - it)$$

et que de même

$$\zeta_3\left(\frac{Z+i\omega'_3}{i}-t\,\middle|\,\omega'_1\omega'_3\right)=i\,\zeta_1\,(Z+\omega_1-it\,|\,\omega_1\,\omega_3)$$

il vient

$$S_1(Z)=-\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta(Z+\omega_1-it)+\zeta(Z+\omega_1+it)]dt+$$

$$+\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta_1(Z+\omega_1-it)+\zeta_1(Z+\omega_1+it)]dt$$

c'est à dire encore, d'après les formules (T. M., XII, 5) et d'après la condition supposée entre G_1 et G_3,

(116)
$$\begin{aligned}S_1(Z)=&-\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta_1(Z-it)+\zeta_1(Z+it)]dt+\\&+\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta(Z-it)+\zeta(Z+it)]dt.\end{aligned}$$

Par suite enfin, la fonction $S(Z)+S_1(Z)$, ou bien

(117)
$$\begin{aligned}U(Z)=&\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{\omega_1} F(t)[\zeta(Z-t)+\zeta(Z+t)]dt-\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{\omega_1} F_2(t)[\zeta_3(Z-t)+\zeta_3(Z+t)]dt-\\&-\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta_1(Z-it)+\zeta_1(Z+it)]dt+\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta(Z-it)+\zeta(Z+it)]dt\end{aligned}$$

répond aux données F, F_2, G_1, G_3, dans le rectangle de dimensions ω_1, $\frac{\omega_3}{i}$. Momentanément, on a supposé les deux conditions

(118)
$$\int\limits_0^{\omega_1} F(t)dt=\int\limits_0^{\omega_1} F_2(t)dt,$$

$$\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)\,dt = \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)\,dt. \tag{119}$$

Supposons que ces deux égalités ne soient pas toutes deux vérifiées, mais admettons seulement l'existence de la suivante

$$\int_0^{\omega_1} [F(t) - F_2(t)]\,dt = \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [G_1(t) - G_3(t)]\,dt \tag{120}$$

sur laquelle nous reviendrons bientôt. Considérons la fonction

$$U^*(Z) = U(Z) + ikZ,$$

où k est réel; pour cette fonction, en désignant par les mêmes lettres munies d'astérisques les éléments correspondants à ceux de la fonction U, on a

$$F^*(t) = F(t), \qquad G^*_1(t) = G_1(t) + k\omega_1,$$

$$F^*_2(t) = F_2(t) - k\frac{\omega_3}{i}, \qquad G^*_3(t) = G_3(t),$$

et par suite, à cause de la relation supposée, on aura

$$\int_0^{\omega_1} F^*(t)\,dt = \int_0^{\omega_1} F^*_2(t)\,dt$$

et

$$\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G^*_1(t)\,dt = \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G^*_3(t)\,dt,$$

dès que l'on prendra la constante k telle que

$$ik\omega_1\omega_3 = \int_0^{\omega_1} (F - F_2)\,dt = \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} (G_1 - G_3)\,dt.$$

On pourra alors évidemment écrire

$$U(Z) = -ikZ + \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(t)[\zeta(Z-t) + \zeta(Z+t)]dt -$$

$$- \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}\left[F_2(t) - k\frac{\omega_3}{i}\right][\zeta_3(Z-t) + \zeta_3(Z+t)]dt -$$

(121)

$$- \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [G_1(t) + k\omega_1][\zeta_1(Z-it) + \zeta_1(Z+it)]dt +$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta(Z-it) + \zeta(Z+it)]dt.$$

Or on a, par un calcul simple,

$$\int_0^{\omega_1} [\zeta_3(Z-t) + \zeta_3(Z+t)]\,dt = 2\eta_1 Z,$$

et de même

$$\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [\zeta_1(Z-it) + \zeta_1(Z+it)]dt = \frac{1}{i}2\eta_3 Z.$$

Par suite le coëfficient de k dans l'expression de $U(Z)$ est

$$-iZ + \frac{2Z}{\pi}(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1),$$

c'est à dire zéro d'après une relation connue. La formule (117) est donc valable dans tous les cas moyennant la seule condition (120).

Cette dernière condition est d'ailleurs nécessaire. Soient en effet $F + iG$, $F_1 + iG_1$, etc., avec les mêmes notations que plus haut, les valeurs sur les côtés du rectangle, d'une fonction analytique $F(z)$ dans ce domaine. On sait que l'intégrale

$$\int \frac{F(Z)\,dZ}{Z-u},$$

prise le long du contour total du rectangle, est nulle pour tout point u extérieur à celui-ci, c'est à dire qu'on a

$$o = \int_0^{\omega_1} u \frac{F(t) + i G(t)}{t - u} dt + \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} u \frac{F_1(t) + i G_1(t)}{it + \omega_1 - u} i dt -$$

$$- \int_0^{\omega_1} u \frac{F_2(t) + i G_2(t)}{\omega_3 + t - u} dt - \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} u \frac{F_3(t) + i G_3(t)}{it - u} i dt.$$

Supposons le point u très éloigné dans le plan, et considérons la partie réelle de l'expression qu'on vient d'écrire, il viendra de suite la relation qu'on voulait obtenir,

$$\int_0^{\omega_1} [F(t) - F_2(t)] dt - \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [G_1(t) - G_3(t)] dt = o.$$

A la fonction $U(Z)$ s'appliquent immédiatement tous les résultats obtenus dans le premier Chapitre à propos des domaines annulaires. Notamment, dans des conditions bien connues, la partie réelle de $U(Z)$ sur les bords verticaux du rectangle sera en général: pour $Z = iY$,

(122)
$$F_3(Y) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\omega_1} F(t) [\zeta(iY - t) + \zeta(iY + t)] dt -$$
$$- \frac{i}{\pi} \int_0^{\omega_1} F_2(t) [\zeta_3(iY - t) + \zeta_3(iY + t)] dt -$$
$$- \frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t) [\zeta_1(iY - it) + \zeta_1(iY + it)] dt + \frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t) [\zeta(iY - it) + \zeta(iY + it)] dt$$

et pour $Z = \omega_1 + iX$, on a de même

$$F_1(Y) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\omega_1} F(t) [\zeta_1(iY - t) + \zeta_1(iY + t) + 2\eta_1] dt -$$
$$- \frac{i}{\pi} \int_0^{\omega_1} F_2(t) [\zeta_2(iY - t) + \zeta_2(iY + t) + 2\eta_1] dt -$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta(iY-it)+\zeta(iY+it)+2\eta_1)\,dt+$$

$$\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta_1(iY-it)+\zeta_1(iY+it)+2\eta_1]\,dt$$

qui se réduit à

$$F_1(Y)=\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(t)[\zeta_1(iY-t)+\zeta_1(iY+t)]\,dt-\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} F_2(t)[\zeta_2(iY-t)+\zeta_2(iY+t)]\,dt-$$

(123)

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta(iY-it)+\zeta(iY+it)]\,dt+\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta_1(iY-it)+\zeta_1(iY+it)]\,dt,$$

à cause de la relation (120). La quatrième intégrale dans l'expression de F_3, et la troisième dans l'expression de F_1, doivent être considérées comme remplacées par leur valeurs principales.

On pourrait évidemment, avec une grande facilité, obtenir par les mêmes méthodes qu'on vient d'exposer, une fonction analytique dont la partie réelle, la partie imaginaire ou la dérivée normale de la partie réelle, ou encore des combinaisons linéaires de ces quantités, seraient données sur les bords du rectangle considéré. Nous laisserons de côté ces généralisations dont nous n'aurons pas besoin. Remarquons simplement ici, que les développements précédents nous permettent d'écrire des systèmes d'équations intégrales et les solutions correspondantes: par exemple on obtient de tels systèmes en comparant les valeurs d'une même fonction analytique dans le rectangle considéré précédemment, sur les bords verticaux des frontières, la fonction étant supposée définie, d'abord par la donnée de F, F_1, F_2, F_3, puis par la donnée de F, F_2, G_1, G_3.

Dans les formules qu'on trouve ainsi, les fonctions F et F_2 ne jouant pas un rôle essentiel, remplaçons-les par zéro, en supposant

$$\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [G_1(t)-G_3(t)]\,dt=0.$$

Il viendra les deux systèmes suivants, où C est une constante,

$$(124)\begin{cases} G_1(\theta) = -\dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_1(t)[\zeta(i\theta - it) - \zeta(i\theta + it)]dt + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_3(t)[\zeta_1(i\theta - it) - \zeta_1(i\theta + it)]dt + C, \\ G_3(\theta) = -\dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_1(t)[\zeta_1(i\theta - it) - \zeta_1(i\theta + it)]dt + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_3(t)[\zeta(i\theta - it) - \zeta(i\theta + it)]dt + C, \end{cases}$$

$$(125)\begin{cases} F_1(\theta) = -\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta(i\theta - it) + \zeta(i\theta + it)dt + \\ \qquad\qquad + \dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta_1(i\theta - it) + \zeta_1(i\theta + it)]dt, \\ F_3(\theta) = -\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta_1(i\theta - it) + \zeta_1(i\theta + it)]dt + \\ \qquad\qquad + \dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta(i\theta - it) + \zeta(i\theta + it)]dt. \end{cases}$$

Les équations des deux groupes sont réciproques, c'est à dire donnent la solution les unes des autres, dans les conditions énoncées.

On remarquera que l'addition d'une même constante quelconque à G_1 et à G_3 ne modifie pas les deux dernières équations, à cause des relations, faciles à démontrer,

$$\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [\zeta_1(i\theta - it) + \zeta_1(i\theta + it)]dt = \text{val. ppale de} \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [\zeta(i\theta - it) + \zeta(i\theta + it)]dt = 2\eta_3\theta.$$

III.

§. 11. J'envisagerai dans ce Chapitre la solution de la question suivante, qu'on rencontre souvent en Hydrodynamique (cf. notamment deux Notes aux C. R. Acad. sc. Paris, 17 juin 1912, 10 févr. 1913), à savoir: trouver, quand il est possible, une fonction analytique régulière dans un cercle $|z| = 1$, du plan z, dont la partie réelle soit donnée sur une portion de la circonférence frontière, et la partie imaginaire sur le reste de la circonférence. Ce reste peut être constitué par un arc c ou par deux arcs c et c_1, de cette circonférence.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas, et soient $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, les extrémités de l'arc c (pour les points $e^{i\theta}$ de l'arc c, on aura par exemple $\alpha < \theta < \beta$). Soit $f(\theta)$ la valeur donnée de la partie réelle sur l'arc complémentaire de c; soit $l(\theta)$ la valeur (inconnue) de la partie réelle de la fonction cherchée, sur l'arc c, et enfin soit $g(\theta)$ la valeur donnée de la partie imaginaire de la même fonction sur le même arc c. Bien entendu, dans tout ce qui suit, il est admis implicitement qu'on a par définition des relations telles que

$$f(\theta + 2n\pi) = f(\theta).$$

Ceci posé, on a d'après le Chapitre 1, sur l'arc c, pour $\alpha < \theta < \beta$,

$$(126) \qquad g(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{l(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_\beta^{\alpha+2\pi} \frac{f(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon + C^{\text{te}};$$

l'intégrale relative à $l(\theta)$ est égale à sa valeur principale, par convention. D'ailleurs, en général, on peut encore mettre cette équation sous la forme

$$(127) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{l(\varepsilon)-l(\theta)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon + \frac{l(\theta)}{\pi}\log\frac{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\theta}{2}} = g(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_\beta^{\alpha+2\pi} \frac{f(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon - C^{\text{te}}.$$

D'après le Chapitre I, il est clair que la recherche de la fonction de z demandée, revient à la résolution par rapport à l'inconnue $l(\theta)$, de l'équation intégrale qu'on vient d'écrire. La solution peut s'en obtenir indirectement comme on va l'expliquer (cf. C. R. 23 oct. 1911). Divers artifices conduisent à ce résultat. Je vais exposer celui qui donne la solution sous la forme même où j'ai eu effectivement à l'appliquer dans d'autres recherches, dont on trouvera ailleurs l'exposé.

Je commencerai par remplacer l'aire du cercle où la fonction est cherchée, par l'aire d'un demi cercle de rayon 1 d'un nouveau plan Z, au moyen d'une représentation conforme qui fasse correspondre l'arc c, au diamètre horizontal situé sur l'axe OX du nouveau plan, et l'arc complémentaire de c, à la demi circonférence $|Z|=1$ au dessus de OX. Comme il est bien connu, une telle représentation du plan z sur le plan Z est obtenue par une relation de la forme

$$(128) \qquad N\frac{z-e^{i\alpha}}{z-e^{i\beta}}=\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right)^2,$$

où la constante N est quelconque.

Pour simplifier, je choisirai

$$N=-e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}},$$

de telle manière que le point $Z=0$ corresponde au point $z=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, milieu de l'arc c. Explicitons alors les équations qui font correspondre les points des frontières.

Voyons d'abord la correspondance entre les bords circulaires. En posant

$$Z=e^{i\varphi},$$

$$z=e^{i\theta},$$

un calcul facile montre qu'on a

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}-\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{1-\cos(\theta-\beta)},$$

ou encore

$$(129) \qquad \operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}.$$

D'une manière analogue, on verrait qu'entre un point $Z=X$ du diamètre limite, et un point $z=e^{i\theta}$ de l'arc c, on a la relation

$$\left(\frac{X+1}{X-1}\right)^2=\frac{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\theta}{2}}.$$

ou encore

$$(130)\qquad \frac{X+1}{1-X}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\theta}{2}}},$$

le radical étant arithmétique.

En conséquence, à la fonction $f(\theta)$ donnée sur l'arc complémentaire de c, il correspondra une fonction $F(\varphi)$ définie au moyen de (129). Comme on a alors

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}},$$

ou si l'on veut

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\cos\varphi\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}-\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}{\cos\varphi+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}\operatorname{tg}\frac{a-\beta}{4}},$$

il en résulte

$$(131)\qquad F(\varphi)=f\left[2\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\varphi-\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}{\cos\varphi+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}\right].$$

De même, à $g(\theta)$ correspondra une fonction $G(X)$; en observant que (130) donne

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\left(\frac{X+1}{X-1}\right)^2}{\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\left(\frac{X+1}{X-1}\right)^2},$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{(1+X^2)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}-2X\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}{1+X^2+2X\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}},$$

on aura

$$(132)\qquad G(X)=g\left[2\operatorname{arc\,tg}\frac{(1+X^2)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}-2X\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}{1+X^2+2X\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{4}}\right].$$

On est alors ramené à trouver une fonction analytique dans le demi-cercle, dont la partie réelle soit $F(\varphi)$ au point $e^{i\varphi}$ sur la demi-circonférence, et dont la partie imaginaire soit $G(X)$ au point d'abscisse X sur le diamètre frontière.

A cet effet, envisageons d'abord une fonction analytique régulière dans le demi-plan supérieur, et dont la partie imaginaire soit $G(X)$ pour $Z=X(|X|<1)$. L'intégrale

(133) $$H(Z)=\frac{1}{\pi}\int\frac{G(u)}{u-Z}du,$$

prise le long de l'axe réel dans le sens positif, représente une telle fonction si $G(X)$ est une fonction (sommable) définie sur l'axe réel par la condition: 1° d'être égale à $G(X)$ sur le segment -1, $+1$, de l'axe OX; 2° d'être égale en dehors de ce segment, à des fonctions choisies arbitrairement, de manière toutefois que $G(X)$ soit sommable entre $-\infty$ et $+\infty$. Par exemple on pourrait prendre

(134) $$H(Z)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{G(u)}{u-Z}du.$$

Les propriétés d'une telle fonction $H(Z)$ ont été déjà étudiées bien souvent, et sont bien connues. Cette fonction donne lieu à des résultats analogues à ceux qui ont été rappelés dans le Chapitre I au sujet de la fonction $iA(z)$, — à laquelle on peut du reste la ramener par une inversion qui transforme en un demi-plan la surface du cercle considéré à cet endroit.

La fonction $H(Z)$ une fois construite, est bien déterminée sur la circonférence $|Z|=1$. Pour $Z=e^{i\varphi}$, sa partie réelle est

(135) $$\mathfrak{H}(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int G(u)\frac{u-\cos\varphi}{1-2u\cos\varphi+u^2}du.$$

Il est à peine besoin de faire observer que cette dernière expression est bien déterminée sur la demi-circonférence, mais qu'elle n'est pas valable sans précaution aux points extrêmes situés sur l'axe réel: en ces points, pour $\varphi=0$ ou π, l'intégrale doit être réduite à sa valeur principale.

Cela posé, la fonction

(136) $$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[F(\varepsilon)-\mathfrak{H}(\varepsilon)]\frac{1-Z^2}{1-2Z\cos\varepsilon+Z^2}d\varepsilon,$$

qui est un cas particulier de la fonction $A(z)$ du Chapitre I (lorsque les données sont symétriques par rapport à l'axe réel), est réelle sur l'axe réel du plan Z, et sa partie réelle tend vers $F(\varphi)-\mathfrak{H}(\varphi)$ au point $e^{i\varphi}$ de la frontière. Donc la fonction analytique

$$K(Z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(u)\,du}{u-Z}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[F(\varepsilon)-\mathfrak{H}(\varepsilon)]\frac{1-Z^2}{1-2Z\cos\varepsilon+Z^2}\,d\varepsilon, \tag{137}$$

répond à la question proposée.

L'indétermination qui intervient dans la définition de $G(X)$, facilite évidemment les calculs, comme on s'en rend compte sur l'exemple donné plus loin.

Ce qu'on vient de dire suppose la fonction $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ sommable entre 0 et π. Or ce point ne présente en général aucune difficulté, dès que la fonction $G(X)$ est elle-même sommable, et que la partie réelle de la fonction $H(Z)$ qui en résulte, existe et est finie aux points $Z\pm 1$. On a vu les conditions pour qu'il en soit ainsi: il suffit par exemple, que $G(X)$ au voisinage de $X=\pm 1$, soit continue, et y satisfasse à une condition de Lipschitz. Dans ces conditions, il est clair que $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ sera bornée dans l'intervalle considéré, et par suite sera sommable.

Pour donner un exemple simple du mode de construction dont on vient de parler, supposons que les valeurs de $F(\varphi)$ étant quelconques, celles de $G(X)$ soient égales: à une constante a sur le segment $0,1$, et à une constante b sur le segment $-1,0$. Il est évident sans calcul que la fonction

$$ia+\frac{b-a}{\pi}\log Z$$

répond à ces valeurs de la partie imaginaire (on suppose le logarithme réel pour Z réel positif). Comme sa partie réelle est nulle pour $Z=e^{i\varphi}$, la fonction de Z

$$ia+\frac{b-a}{\pi}\log Z+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}F(\varepsilon)\frac{1-Z^2}{1-2Z\cos\varepsilon+Z^2}\,d\varepsilon$$

répond au problème proposé avec ces valeurs particulières des données.

Dans le cas général, remarquons que la valeur de la partie réelle de la fonction de Z obtenue, est sur l'axe réel, entre 1 et -1,

$$L(X)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(u)\,du}{u-X}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[F(\varepsilon)-\mathfrak{H}(\varepsilon)]\frac{1-X^2}{1-2X\cos\varepsilon+X^2}\,d\varepsilon, \tag{138}$$

où la première intégrale est considérée comme égale à sa valeur principale. Par la transformation

$$X = \frac{\sqrt{\dfrac{\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\beta-\theta}{2}}} - 1}{\sqrt{\dfrac{\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\beta-\theta}{2}}} + 1},$$

qui résulte de (130), la fonction

$$l(\theta) = L(X)$$

est une fonction de θ dans l'intervalle $\alpha\beta$, et qui fournit une solution explicite de l'équation intégrale écrite au début de ce Chapitre.

La fonction analytique de z, que l'on voulait déterminer, est d'ailleurs obtenue en faisant dans la fonction $K(Z)$ la transformation inverse de la transformation (128).

§ 12. Passons au cas où la circonférence dans laquelle on envisage la fonction de z, est séparée en quatre arcs, sur deux desquels, c et c_1, on donne la partie imaginaire, la partie réelle étant donnée sur les deux autres. Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les arguments, définis à $2n\pi$ près, des extrémités des arcs c et c_1. Nous supposerons, ce qui est toujours possible, $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \alpha + 2\pi$, et nous désignerons par $f(\theta)$, $f_1(\theta)$ les valeurs données de la partie réelle aux points $e^{i\theta}$ des arcs complémentaires de c et c_1; par $l(\theta)$ et $l_1(\theta)$ les valeurs (inconnues) de la partie réelle sur les arcs $c\,(\alpha < \theta < \beta)$ et $c_1\,(\gamma < \theta < \delta)$ par $g(\theta)$ et $g_1(\theta)$ les valeurs données de la partie imaginaire sur c et c_1. Il résulte des propriétés rappelées dans le premier chapitre, que les fonctions $l(\theta)$ et $l_1(\theta)$, dont la connaissance entraîne celle de la fonction analytique cherchée, satisfont aux deux équations simultanées

$$(139)\qquad (\alpha < \theta < \beta)\ \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{l(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta-\varepsilon}{2}} + \frac{1}{2\pi}\int_\gamma^\delta \frac{l_1(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta-\varepsilon}{2}} =$$

$$= g(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_\beta^\gamma \frac{f(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta-\varepsilon}{2}} - \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{\alpha+2\pi} \frac{f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta-\varepsilon}{2}} + C,$$

où la première intégrale a sa valeur principale, et

$$(140)\qquad (\gamma<\theta<\delta)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{l(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}+\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}^{\delta}\frac{l_1(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}=$$

$$=g_1(\theta)-\frac{1}{2\pi}\int_{\beta}^{\gamma}\frac{f(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}-\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\alpha+2\pi}\frac{f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}+C,$$

où la même convention est faite cette fois pour la seconde intégrale.

Telles sont les deux équations intégrales qu'on va résoudre indirectement.

Nous transformerons d'abord le domaine circulaire donné, en le demi-plan inférieur d'un plan auxiliaire Z_1, au moyen de la substitution

$$(141)\qquad Z_1=i+\frac{2}{z-i}.$$

On se rend compte aisément qu'à un point $e^{i\theta}$ de la circonférence frontière, correspond un point d'abscisse X_1 sur l'axe réel du nouveau plan, X_1 étant lié à θ par la relation

$$(142)\qquad X_1=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right).$$

Nous appellerons X_α, X_β, X_γ, X_δ, les valeurs de X_1 correspondant à $\theta=\alpha$, β, γ, ou δ.

Cela étant, posons

$$dZ=\frac{dZ_1}{\sqrt{(Z_1-X_\alpha)(Z_1-X_\beta)(Z_1-X_\gamma)(Z_1-X_\delta)}}$$

et plus précisément

$$(143)\qquad Z=\int^{Z_1}\frac{dZ_1}{\sqrt{(Z_1-X_\alpha)(Z_1-X_\beta)(Z_1-X_\gamma)(Z_1-X_\delta)}},$$

Z_1 devient une fonction elliptique de Z, construite avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ (la première réelle, la seconde imaginaire pure) et définies comme on sait par

$$\omega_1=\int_{X_\delta}^{X_\alpha}\frac{dX_1}{\sqrt{(X_1-X_\alpha)(X_1-X_\beta)(X_1-X_\gamma)(X_1-X_\delta)}}=\int_{X_\alpha}^{X_\beta}\frac{dX_1}{\text{id.}}.$$

$$\omega_3 = + \int_{X_\gamma}^{X_\alpha} \frac{dX_1}{1} = \int_{X_\delta}^{X_\beta} \frac{dX_1}{1}.$$

En désignant par S_1, S_2, S_3, S_4 les fonctions symétriques élémentaires des quatre nombres $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta$, on aura

(144) $$Z_1 = \frac{1}{2} \frac{\wp'(Z|\omega_1\omega_3) - \wp'(r_1|\omega_1\omega_3)}{\wp(Z|\omega_1\omega_3) - \wp(r_1|\omega_1\omega_3)} + \frac{S_1}{4},$$

dans laquelle équation r_1 représente un argument défini par les relations compatibles

$$\wp r_1 = \frac{S_1^2}{16} - \frac{S_2}{6},$$

$$\wp' r_1 = \frac{S_3}{4} + \frac{S_1 S_2}{8} - \frac{S_1^3}{32},$$

(on peut prendre r_1 entre 0 et $2\omega_1$). On a aussi

(145) $$\sqrt{(Z_1 - X_\alpha)(Z_1 - X_\beta)(Z_1 - X_\gamma)(Z_1 - X_\delta)} = \wp Z - \wp(Z + r).$$

Par ce procédé, d'ailleurs classique (cf. par ex. APPELL et LACOUR, Fonct. Ellipt. p. 254), on fait correspondre au demi-plan précédent, l'aire d'un rectangle dans le plan Z, un côté de ce rectangle étant situé sur l'axe réel. Les sommets de ce rectangle sont les points

$$Z = -\frac{r_1}{2}, \quad -\frac{r_1}{2} + \omega_3, \quad -\frac{r_1}{2} - \omega_1 + \omega_3, \quad -\frac{r_1}{2} - \omega_1.$$

Aux arcs c et c_1 de la circonférence primitive, correspondent les côtés verticaux de ce rectangle (c correspond au bord droit.) On en conclut bien facilement, par des calculs que j'abrège, la correspondance entre les points $e^{i\theta}$ de la circonférence du plan z, et les points, définis par leur abscisse X ou leur ordonnée Y, des côtés du rectangle ci-dessus:

A l'arc $\delta < \theta < \alpha + 2\pi$, correspond le côté horizontal placé sur OX, par

(146) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \zeta(X + r_1) - \zeta X - \zeta r_1 + \frac{S_1}{4}.$$

A l'arc $\alpha < \theta < \beta$ correspond le côté vertical droit, par

(147) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\zeta\left(\frac{r_1}{2}+iY\right)+\zeta\left(\frac{r_1}{2}-iY\right)-\zeta r_1+\frac{S_1}{4}\cdot$$

A l'arc $\beta<\theta<\gamma$ correspond le bord horizontal supérieur, par

(148) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\zeta_3(X+r_1)-\zeta_3 X-\zeta r_1+\frac{S_1}{4}\cdot$$

A l'arc $\gamma<\theta<\delta$ correspond le côté vertical gauche, par

(149) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\zeta_1\left(\frac{r_1}{2}+iY\right)+\zeta_1\left(\frac{r_1}{2}-iY\right)-\zeta r_1+\frac{S_1}{4}\cdot$$

Les quatre expressions de $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ sont toutes évidemment réelles.

Aux fonctions données de θ, correspondent par suite quatre fonctions connues, soit de X, soit de Y, définies par les relations suivantes

(150)
$$f(\theta)=f\left[\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arc\,tg}\left\{\zeta_3(X+r_1)-\zeta_3 X-\zeta r_1+\frac{S_1}{4}\right\}\right]=F_2(X),$$
$$f_1(\theta)=f_1\left[\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arc\,tg}\left\{\zeta(X+r_1)-\zeta X-\zeta r_1+\frac{S_1}{4}\right\}\right]=F(X),$$
$$g(\theta)=g\left[\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arc\,tg}\left\{\zeta\left(\frac{r_1}{2}+iY\right)+\zeta\left(\frac{r_1}{2}-iY\right)-\zeta r_1+\frac{S_1}{4}\right\}\right]=G_1(Y),$$
$$g_1(\theta)=g_1\left[\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arc\,tg}\left\{\zeta_1\left(\frac{r_1}{2}+iY\right)+\zeta_1\left(\frac{r_1}{2}-iY\right)-\zeta r_1+\frac{S_1}{4}\right\}\right]=G_3(Y).$$

Comme l'équation

(151) $$Z+\frac{r_1}{2}+\omega_1=\mathfrak{z},$$

transforme le rectangle précédent, en un autre du plan $\mathfrak{z}=\mathfrak{X}+iY$ dont deux côtés soient situés sur les demi-axes positifs, en posant

$$F_2\left(\mathfrak{X}-\frac{r_1}{2}-\omega_1\right)=\mathfrak{F}_2(\mathfrak{X}),\quad F\left(\mathfrak{X}-\frac{r_1}{2}-\omega_1\right)=\mathfrak{F}(\mathfrak{X}),$$

on se trouvera ramené à déterminer, dans un rectangle de dimensions ω_1 et $\frac{1}{i}\omega_3$, une fonction dont les parties réelle ou imaginaire soient égales sur les bords, à $\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}_2(\mathfrak{X})$, $G_1(Y)$, $G_3(Y)$, respectivement.

Or on sait écrire une telle fonction, sous l'hypothèse qu'il existe entre les données la condition (cf. le Chapitre antérieur)

$$(152) \qquad \int_0^{\omega_1} [\mathfrak{F}(\mathfrak{X}) - \mathfrak{F}_2(\mathfrak{X})]\, d\mathfrak{X} = \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [G_1(Y) - G_3(Y)]\, dY.$$

Par des calculs assez simples, on peut, en revenant à la variable θ, remplacer cette condition par la suivante

$$\int_\alpha^\beta \frac{ig(\theta)\, d\theta}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\left[\wp\left(\frac{\nu_1}{2} + iY\right) - \wp\left(\frac{\nu_1}{2} - iY\right)\right]} +$$

$$+ \int_\gamma^\delta \frac{ig_1(\theta)\, d\theta}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\left[\wp\left(\frac{\nu_1}{2} + \omega_1 + iY\right) - \wp\left(\frac{\nu_1}{2} + \omega_1 - iY\right)\right]} +$$

$$+ \int_\beta^\gamma \frac{f(\theta)\, d\theta}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)[\wp(X + \nu_1 + \omega_3) - \wp(X + \omega_3)]} +$$

$$+ \int_\delta^{\alpha + 2\pi} \frac{f_1(\theta)\, d\theta}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)[\wp(X + \nu_1) - \wp X]} = 0,$$

où il est entendu que dans les dénominateurs, X ou Y doivent être considérés comme les fonctions de θ définis par les relations écrites plus haut, liant θ à X ou Y sur les quatre arcs successivement.

En utilisant la variable X_1 on a une formule plus maniable. Car on a par exemple pour la première intégrale

$$\wp\left(\frac{\nu_1}{2} + iY\right) - \wp\left(\frac{\nu_1}{2} - iY\right) = -\sqrt{(X_1 - X_\alpha)(X_1 - X_\beta)(X_1 - X_\gamma)(X_1 - X_\delta)},$$

$$\frac{d\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} = -2\, dX_1,$$

et des relations analogues sont valables pour les trois autres. Il en résulte la condition de possibilité sous la forme

$$\int_{X_\alpha}^{X_\beta} \frac{ig(\theta)\,dX_1}{\sqrt{(X_1-X_\alpha)(X_1-X_\beta)(X_1-X_\gamma)(X_1-X_\delta)}} + \int_{X_\gamma}^{X_\delta} \frac{ig_1(\theta)\,dX_1}{\sqrt{}} + \int_{X_\beta}^{X_\gamma} \frac{f(\theta)\,dX_1}{\sqrt{}} +$$

(153)

$$+ \int_{X_\delta}^{-\infty} \frac{f_1(\theta)\,dX_1}{\sqrt{}} + \int_{+\infty}^{X_\alpha} \frac{f_1(\theta)\,dX_1}{\sqrt{}} = 0,$$

$\left(\text{avec } \theta = \frac{\pi}{2} - 2 \text{ arc tg } X_1\right)$. Toutes les intégrales qui y figurent ont un sens dès que f, f_1, g, g_1, sont sommables et ne deviennent pas infinies aux limites des intervalles, d'un ordre d'infinitude supérieur à $(\theta-\alpha)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ par exemple, $-\varepsilon$ étant un nombre positif arbitrairement petit. Cela est assurément le cas si les données f, f_1, g, g_1, sont de carrés intégrables.

On pourra alors écrire, en général, les valeurs suivantes pour la partie réelle de la fonction analytique répondant aux données $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_2, G_1, G_3$, sur les bords verticaux du rectangle:

$$F_1(Y) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta(iY-it)+\zeta(iY+it)]\,dt +$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta_1(iY-it)+\zeta_1(iY+it)]\,dt +$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}(t)[\zeta_1(iY-t)+\zeta_1(iY+t)]\,dt - \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}_2(t)[\zeta_2(iY-t)+\zeta_2(iY+t)]\,dt,$$

(154)

$$F_3(Y) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta_1(iY-it)+\zeta_1(iY+it)]\,dt +$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta(iY-it)+\zeta(iY+it)]\,dt - \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}(t)[\zeta(iY-t)+\zeta(iY+t)]\,dt -$$

$$- \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}_2(t)[\zeta_3(iY-t)+\zeta_3(iY+t)]\,dt.$$

La solution des deux équations intégrales (139) et (140) sera dans ces conditions

$$l(\theta) = F_1(Y),$$

avec

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \zeta\left(\frac{\nu_1}{2} + iY\right) + \zeta\left(\frac{\nu_1}{2} - iY\right) - \zeta\nu_1 + \frac{S_1}{4},$$

et

$$l_1(\theta) = F_3(Y),$$

avec

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \zeta_1\left(\frac{\nu_1}{2} + iY\right) + \zeta_1\left(\frac{\nu_1}{2} - iY\right) - \zeta\nu_1 + \frac{S_1}{4}.$$

Quant à la fonction analytique elle-même, dans le rectangle du plan $\mathfrak{z}$, elle sera

(155)
$$\begin{aligned} &+\frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}\mathfrak{F}(t)[\zeta(\mathfrak{z}-t)+\zeta(\mathfrak{z}+t)]\,dt - \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1}\mathfrak{F}_2(t)[\zeta_3(\mathfrak{z}-t)+\zeta_3(\mathfrak{z}+t)]\,dt - \\ &-\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_1(t)[\zeta_1(\mathfrak{z}-it)+\zeta_1(\mathfrak{z}+it)]\,dt + \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G_3(t)[\zeta(\mathfrak{z}-it)+\zeta(\mathfrak{z}+it)]\,dt, \end{aligned}$$

et l'on en déduirait la fonction analytique de z dans le cercle primitif, en opérant sur cette expression les transformations inverses de celles qu'on a faites ci-dessus.

Avant de quitter ce sujet, je dirai un mot d'un autre procédé pour résoudre la question dont on vient de s'occuper, en utilisant une méthode fort semblable à celle utilisée au paragraphe 11. Par la transformation

(156)
$$Z = -\frac{\omega_1}{i\pi}\log W - \frac{\nu_1}{2} + \omega_3,$$

le rectangle du plan Z est représenté sur une demi-couronne circulaire de rayons extrêmes 1 et $q\left(= e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}} < 1\right)$. En posant $W = \varrho^{i\varphi}$, les points des frontières se correspondent, soit par la relation

$$X = -\frac{\nu_1}{2} - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi,$$

soit par cette autre

$$Y = \frac{\omega_1}{\pi} \log \varrho + \frac{\omega_3}{i},$$

relations au moyen desquelles les fonctions données $F(X)$, $F_2(X)$, $G_1(Y)$, $G_3(Y)$, deviennent les fonctions $\mathfrak{F}^*(\varphi)$, $\mathfrak{F}^*_2(\varphi)$, $\mathfrak{G}_1(\varrho)$, $\mathfrak{G}_3(\varrho)$.

Formons alors une fonction de W régulière dans le demi-plan supérieur, et dont la partie imaginaire prenne les valeurs $\mathfrak{G}_3(-u)$ et $\mathfrak{G}_1(u)$ aux points d'abscisse u sur les segments $-1, -q$, et $+q, +1$, de l'axe réel; par exemple

$$\Omega_1(W) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-q} \frac{\mathfrak{G}_3(-u)\,du}{u - W} + \frac{1}{\pi} \int_{q}^{1} \frac{\mathfrak{G}_1(u)\,du}{u - W}, \tag{157}$$

est une telle fonction.

Elle donne lieu aux mêmes remarques que la fonction $H(Z)$ d'un paragraphe antérieur. Sa partie réelle prend, pour $W = e^{i\varphi}$ ou $W = q e^{i\varphi}$, les valeurs

$$(158) \quad \begin{aligned} \mathfrak{H}(\varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-q} \mathfrak{G}_3(-u) \frac{u - q\cos\varphi}{u^2 - 2qu\cos\varphi + q^2}\,du + \frac{1}{\pi} \int_{q}^{1} \mathfrak{G}_1(u) \frac{u - q\cos\varphi}{u^2 - 2qu\cos\varphi + q^2}\,du, \\ \mathfrak{H}_2(\varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-q} \mathfrak{G}_3(-u) \frac{u - \cos\varphi}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1}\,du + \frac{1}{\pi} \int_{q}^{1} \mathfrak{G}_1(u) \frac{u - \cos\varphi}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1}\,du. \end{aligned}$$

Si l'on forme ensuite la fonction

$$\begin{aligned} \Omega_2(W) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{\pi} [\mathfrak{F}^*_2(\varepsilon) - \mathfrak{H}_2(\varepsilon)] \left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log W - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log W + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right] d\varepsilon - \\ \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{\pi} [\mathfrak{F}^*(\varepsilon) - \mathfrak{H}(\varepsilon)] \left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log W - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) + \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log W + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right] d\varepsilon, \end{aligned}$$

(cf. ante, par. 10) qui est régulière sous la condition

$$\int_0^{\pi} [\mathfrak{F}^*_2(\varepsilon) - \mathfrak{F}^*(\varepsilon)]\,d\varepsilon = \int_0^{\pi} [\mathfrak{H}_2(\varepsilon) - \mathfrak{H}(\varepsilon)]\,d\varepsilon, \tag{159}$$

la fonction $\Omega_1(W) + \Omega_2(W)$ répond à la question, en ce sens que sa partie réelle ou sa partie imaginaire prennent sur les frontières les valeurs respectives $\mathfrak{F}^*(\varphi)$,

$\mathfrak{F}^*_2(\varphi)$, $\mathfrak{G}_1(\varrho)$, $\mathfrak{G}_3(\varrho)$. En revenant à la variable z, on a donc une fonction de z répondant au problème primitif. D'où indirectement la solution, sous une autre forme, des équations intégrales signalées antérieurement. Cette construction nouvelle de la solution, construction qui en apparence présente une certaine indétermination, dûe à ce fait qu'on peut modifier la fonction $\Omega_1(W)$ comme on l'a déjà vu au paragraphe 11, en prolongeant les fonctions $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_3$ arbitrairement hors des segments $-1, -q;\ +q, +1$, est fort utile dans certaines applications (cf. mon Mémoire «Sur la détermination des problèmes d'Hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides», Annales de l'Ecole Normale supérieure, 1914).

Je laisse de côté l'écriture facile de la solution obtenue par le procédé qu'on vient de décrire. En terminant ce Chapitre, je ferai seulement observer que la condition de possibilité du problème a été obtenue sous deux formes très différentes (152) et (159); il est essentiel de remarquer que ces deux conditions sont au fond équivalentes.

Il est en effet aisé de s'assurer que, pour ϱ positif, on a l'égalité

$$\int_0^\pi \frac{u-\varrho\cos\varepsilon}{u^2-2\varrho u\cos\varepsilon+\varrho^2}\,d\varepsilon = \frac{\pi}{2u}+\frac{u^2-\varrho^2}{2u}\,\pi\frac{1}{\sqrt{(u^2-\varrho^2)^2}} = \frac{\pi}{u} \text{ ou zéro.}$$

Il en résulte sans difficulté, en appliquant cette égalité pour $\varrho=1$ et $\varrho=q$ successivement,

$$\int_0^\pi \mathfrak{H}_2(\varepsilon)\,d\varepsilon = 0$$

et

$$\int_0^\pi \mathfrak{H}(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_{-1}^{-q}\mathfrak{G}_3(-u)\frac{du}{u}+\int_q^1\mathfrak{G}_1(u)\frac{du}{u}.$$

Par la substitution

$$Y=\frac{\omega_1}{\pi}\log|u|+\frac{\omega_3}{i},$$

on trouve

$$\int_0^\pi \mathfrak{H}(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{\pi}{\omega_1}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}[G_1(Y)-G_3(Y)]\,dY.$$

Maintenant on a, par la transformation $X=-\frac{\nu_1}{2}-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon$,

$$\int_0^1 \mathfrak{F}^*_2(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int \frac{\pi}{\omega_1} F_2(X)\, dX = \frac{\pi}{\omega_1} \int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}_2(\mathfrak{X})\, d\mathfrak{X},$$

et on trouve de même

$$\int_0^1 \mathfrak{F}^*_1(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{\pi}{\omega_1} \int_0^{\omega_1} \mathfrak{F}_1(\mathfrak{X})\, d\mathfrak{X}.$$

Portant ces résultats dans (159) on voit que cette condition se réduit bien à la condition (152) obtenue par la première méthode.

Note.

§ 13. Dans les Chapitres précédents, il a été résolu, d'une manière indirecte, certaines équations intégrales, — il est vrai très particulières, — rentrant dans la forme

(160) $$\int_a^b f(s)\, N(x, s)\, ds = g(x)$$

ou encore

(161) $$A(x)\, f(x) + \int_a^b [f(x) - f(s)]\, N(x, s)\, ds = g(x),$$

$f(x)$ étant la fonction inconnue. Le noyau $N(x, s)$ présente une discontinuité polaire pour $s = x$. Tous les noyaux $N(x, s)$ qu'on a rencontrés dans de telles équations sont, comme il est facile de s'en assurer, tels que la différence $N(x, s) - \frac{k}{x - s}$, où k est une constante convenablement choisie, reste une fonction finie et continue, et même dérivable, dans l'intervalle a, b, y compris le point $s = x$. En terminant, nous ferons observer que les équations intégrales de la forme (160) et celles aussi de la forme

(162) $$f(x) + \int_a^b f(s)\, N(x, s)\, ds = g(x),$$

peuvent se ramener à des équations de FREDHOLM, lorsque le noyau présente la propriété qu'on vient de dire. Cela résulte de considérations qui ont été signalées par D. HILBERT (Congrès des Mathém. Heidelberg, 1904, Verhandlungen, p. 233).

Effectuons d'abord un même changement de variable (linéaire) sur s et sur x, en ramenant les limites de l'intervalle d'intégration, à être égales à o et 2π, de sorte qu'on ait affaire à des équations de la forme

$$F(\varepsilon) + \int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(\varepsilon, t) F(t)\, dt = \Phi(\varepsilon), \tag{163}$$

ou bien

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(\varepsilon, t) F(t)\, dt = \Phi(\varepsilon), \tag{164}$$

suivant les cas. De l'hypothèse faite sur les noyaux, il résulte évidemment qu'on peut trouver une constante m telle que l'on ait

$$\mathfrak{N}(\varepsilon, t) = \frac{m}{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon - t}{2}} + P(\varepsilon, t), \tag{165}$$

$P(\varepsilon, t)$ étant fini, continu dans tout l'intervalle, y compris pour $t = \varepsilon$.

Appelons fonction associée de $F(\varepsilon)$ la fonction $G(\varepsilon)$ qui lui est reliée par les deux équations (éq. 14 du paragraphe 1)

$$\begin{aligned} 2\pi F(\theta) &= -\int_0^{2\pi} \frac{G(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta - \varepsilon}{2}}\, d\varepsilon + \int_0^{2\pi} F(\varepsilon)\, d\varepsilon, \\ 2\pi G(\theta) &= \int_0^{2\pi} \frac{G(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{\theta - \varepsilon}{2}}\, d\varepsilon + \int_0^{2\pi} G(\varepsilon)\, d\varepsilon. \end{aligned} \tag{166}$$

Cela étant, considérons d'abord l'équation (163); multiplions-la par $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta - \varepsilon}{2}}$, et intégrons entre o et 2π par rapport à ε. Après un changement dans l'ordre

des intégrations pour le terme $\int_0^{2\pi} \frac{d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}} \int_0^{2\pi} F(t)\mathfrak{N}(\varepsilon, t)dt$, de l'expression obtenue (cf. Hilbert, loc. cit.) on obtient aisément l'équation

$$(167)\quad \int_0^{2\pi} \frac{F(\varepsilon)d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}} + \int_0^{2\pi} F(t)\,dt \int_0^{2\pi} \frac{P(\varepsilon, t)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}} - 2\pi^2 m F(\theta) + 2\pi m \int_0^{2\pi} F(\varepsilon)\,d\varepsilon - \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}.$$

Et comme on a d'après (166)

$$F(\theta) + \int_0^{2\pi} \left[\frac{m}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}} + P(\theta, \varepsilon)\right] F(\varepsilon)\,d\varepsilon = \Phi(\theta),$$

en multipliant ces deux dernières équations par m et -1, et ajoutant, il vient

$$(168)\quad -(1 + 4\pi^2 m^2)\,F(\theta) + \int_0^{2\pi} F(t)\,dt \left\{ m \int_0^{2\pi} \frac{P(\varepsilon, t)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon + 2\pi m^2 - P(\theta, t) \right\} = - m \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}} - \Phi(\theta),$$

ce qui est une équation de Fredholm pour l'inconnue $F(\theta)$.

Si l'on était parti de l'équation (164), le premier calcul aurait donné aussitôt, à la place de (167) l'équation suivante

$$(169)\quad -4\pi^2 m\,F(\theta) + \int_0^{2\pi} F(t)\,dt \left[\int_0^{2\pi} \frac{P(\varepsilon, t)}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}\,d\varepsilon + 2\pi m \right] = \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\operatorname{tg}\frac{\theta-\varepsilon}{2}}.$$

Bien entendu, les intégrales où il subsiste une tangente au dénominateur, sont prises égales à leur valeur principale.

Les équations proposées sont donc ramenées à des équations de Fredholm. Mais il semble qu'il soit bien difficile de tirer parti de ce fait pour retrouver, dans les cas particuliers considérés antérieurement, les résultats simples auxquels on est parvenu d'une autre manière.

ZWEI BEWEISE EINES VON HERRN FATOU VERMUTETEN SATZES.

Aus einem Briefwechsel zwischen

A. HURWITZ und G. PÓLYA
in Zürich.

Herr Fatou[1] vermutete, dass sich der Konvergenzkreis für eine beliebige Potenzreihe zur natürlichen Grenze machen lässt, bloss durch geeignete Änderung der *Vorzeichen* der Koeffizienten. Genauer gesagt handelt es sich um folgenden Satz:

Es sei der Einheitskreis der wahre Konvergenzkreis der Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots;$$

dann lässt sich eine unendliche Folge

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots,$$

wo die ε_n nur der beiden Werte $+1$ und -1 fähig sind, derart bestimmen, dass die Reihe

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 x + \varepsilon_2 a_2 x^2 + \cdots + \varepsilon_n a_n x^n + \cdots$$

den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat.

Das Paradoxe, wovon dieser hübsche Satz zweifellos etwas an sich hat, tritt vielleicht durch folgenden Umstand am besten hervor: es gibt Bedingungen, die sich *nur auf die absoluten Beträge* der Koeffizienten beziehen, und die zur Folge haben, dass die Potenzreihe nicht über ihren Konvergenzkreis hinaus

[1] Acta Mathematica, Bd. 30, S. 335 ff. (vgl. S. 400).

fortsetzbar ist; so fordert der von Herrn HADAMARD entdeckte, seitdem sehr vervollkommnete »Lückensatz», dass gewisse, unendlich viele dieser absoluten Beträge $= 0$ sein sollen. Aus dem obigen Satz folgt nun, dass es *keine* Bedingung gibt, die sich nur auf die absoluten Beträge der Koeffizienten bezieht, und die zur Folge hat, dass die Potenzreihe über ihren Konvergenzkreis hinaus fortsetzbar ist.

Herr FATOU bewies den Satz für eine spezielle Klasse von Reihen $\left(\lim a_n = 0,\ \sum |a_n| \text{ divergent}\right)$. Nun ergibt sich der volle Satz sozusagen unmittelbar aus den wichtigen Untersuchungen des Herrn FABRY[1] über die Taylorsche Reihe.

Ganz am Anfang seiner Untersuchungen gelangt Herr FABRY zu einem Satze, den ich, meinen Zwecken gemäss etwas spezialisiert, so aussprechen will:

Der Punkt $e^{i\psi}$ ist für die im Einheitskreise konvergierende Potenzreihe

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots,$$

gewiss singulär, wenn eine unendliche Folge von Indices $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ existiert, die der doppelten Bedingung genügt:

1)
$$\lim_{n=\infty} |b_{\mu_n}|^{\frac{1}{\mu_n}} = 1,$$

2) *die reellen Teile der Grössen*

$$\frac{b_{\mu_n+\nu} e^{i\nu\psi}}{b_{\mu_n}}$$

sind für $\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \left[\frac{\mu_n}{2}\right]$ nicht negativ.

Im Besitze dieses Satzes kommt man mit der gewöhnlichen »Häufungsmethode» so zum Ziel: die abzählbare Punktmenge

(1)
$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \ldots, \psi_n, \ldots,$$

sei im Intervalle $(0, 2\pi)$ überall dicht. Man konstruiere eine unendliche Folge

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots,$$

die jede Zahl der Menge (1), und zwar jede unendlich oft enthält. Man setzt zu diesem Zweck etwa

[1] Annales scient. de l'École Normale supérieure, 3te Folge, Bd. 18 (1896) 367—399. Acta Mathematica, Bd. 22, S. 65—88.

$$\varphi_0 = \psi_1,$$

$$\varphi_1 = \psi_1, \ \varphi_2 = \psi_2,$$

$$\varphi_3 = \psi_1, \ \varphi_4 = \psi_2, \ \varphi_5 = \psi_3,$$

$$\varphi_6 = \psi_1, \ \varphi_7 = \psi_2, \ \varphi_8 = \psi_3, \ \varphi_9 = \psi_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es sei

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

eine unendliche Folge von Indices, die der doppelten Bedingung genügt:

$$1) \ \lim_{n=\infty} |a_{\lambda_n}|^{\frac{1}{\lambda_n}} = 1, \qquad 2) \ \lambda_{n+1} > 3\lambda_n.$$

Es sei

$$\varepsilon_{\lambda_n} = +1,$$

und wenn

$$-\frac{\lambda_n}{2} \leq \nu \leq +\frac{\lambda_n}{2},$$

so sei $\varepsilon_{\lambda_n+\nu}$ derart gewählt, dass der reelle Teil der Grösse

$$\frac{\varepsilon_{\lambda_n+\nu}\, a_{\lambda_n+\nu}\, e^{i\nu\varphi_n}}{a_{\lambda_n}}$$

nicht negativ wird. Da

$$\frac{3}{2}\lambda_n < \frac{1}{2}\lambda_{n+1},$$

enthalten diese Bestimmungen keinen Widerspruch. Wenn über ε_m bisher nicht verfügt wurde, so sei etwa

$$\varepsilon_m = +1$$

gesetzt.

Durch eine unmittelbare Anwendung des zitierten Fabry'schen Satzes ist ersichtlich, dass alle Punkte

$$e^{i\varphi_1}, \ e^{i\varphi_2}, \ e^{i\varphi_3}, \ldots, \ e^{i\varphi_n}, \ldots,$$

und folglich auch der Einheitskreis, singulär werden für die Reihe

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 x + \varepsilon_2 a_2 x^2 + \cdots + \varepsilon_n a_n x^n + \cdots.$$

G. Pólya.

Für den Satz von Herrn Fatou, den Sie zum ersten Male bewiesen haben, fand ich einen zweiten Beweis, den ich Ihnen im Folgenden mitteilen möchte. Aus der Potenzreihe

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

mit dem Konvergenzradius 1 bilde ich zunächst die neue Reihe

$$Q(x) = a_{n_1} x^{n_1} + a_{n_2} x^{n_2} + \cdots + a_{n_\varkappa} x^{n_\varkappa} + \cdots,$$

in der Weise, dass die Koeffizienten $a_{n_\varkappa}$ sämtlich von Null verschieden sind und der Bedingung

$$\lim \sqrt[n_\varkappa]{|a_{n_\varkappa}|} = 1,$$

genügen, und dass die Reihe $Q(x)$, bloss infolge genügend starken Anwachsens der Exponenten $n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa, \ldots$, den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat. Die bei der Bildung von $Q(x)$ nicht benutzten Glieder von $P(x)$ fügen sich zu einer Reihe $P_0(x)$ zusammen, so dass

$$P(x) = P_0(x) + Q(x)$$

wird. Nun zerlege ich weiter $Q(x)$ in folgender Art:

$$Q(x) = P_1(x) + P_2(x) + \cdots + P_\varkappa(x) + \cdots,$$

wo die unendlichen Reihen $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_\varkappa(x), \ldots$, so aus den Gliedern von $Q(x)$ aufgebaut sind, dass jedes Glied $a_{n_\varkappa} x^{n_\varkappa}$ in einer und nur einer der Reihen $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_\varkappa(x), \ldots$, auftritt. Jetzt endlich bilde ich die sämtlichen Potenzreihen

$$P_\varepsilon(x) = P_0(x) + \varepsilon_1 P_1(x) + \varepsilon_2 P_2(x) + \cdots + \varepsilon_\varkappa P_\varkappa(x) + \cdots,$$

wobei jeder der Faktoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\varkappa, \ldots$ einen der beiden Werte $+1$ und -1 erhalten darf. Jede Reihe $P_\varepsilon(x)$ entsteht aus $P(x)$ dadurch, dass die einzelnen Glieder von $P(x)$ mit einem der beiden Faktoren $+1$ und -1 multipliziert werden.

Ich behaupte nun, dass unter den Reihen $P_\varepsilon(x)$ mindestens eine vorhanden ist, die den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat. Die gegenteilige Annahme führt nämlich durch folgende Schlüsse auf einen Widerspruch.

Zunächst würde jede einzelne Reihe $P_\varepsilon(x)$ auf der Peripherie des Einheitskreises reguläre Punkte besitzen, die sich auf ein System B_ε von Bögen der Kreisperipherie verteilen. Es würde ferner sicher zwei verschiedene Reihen $P_\varepsilon(x)$ und $P_{\varepsilon'}(x)$ geben, so beschaffen, dass die Bogen B_ε, die zu der Reihe $P_\varepsilon(x)$ gehören, in die zu $P_{\varepsilon'}(x)$ gehörenden Bogen $B_{\varepsilon'}$ übergreifen.

Denn andernfalls würden die Systeme B_ε, welche der Gesamtheit der Reihen $P_\varepsilon(x)$ entsprechen, eine abzählbare Menge bilden, während doch die Reihen $P_\varepsilon(x)$ eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums ausmachen.

Zwei solche Reihen

$$P_\varepsilon(x) = P_0(x) + \varepsilon_1 P_1(x) + \varepsilon_2 P_2(x) + \cdots + \varepsilon_\varkappa P_\varkappa(x) + \cdots,$$

$$P_{\varepsilon'}(x) = P_0(x) + \varepsilon'_1 P_1(x) + \varepsilon'_2 P_2(x) + \cdots + \varepsilon'_\varkappa P_\varkappa(x) + \cdots,$$

hätten nun auf der Peripherie des Einheitskreises gemeinsame reguläre Punkte, und dies steht im Widerspruch damit, dass die Reihe

$$P_\varepsilon(x) - P_{\varepsilon'}(x) = (\varepsilon_1 - \varepsilon'_1) P_1(x) + (\varepsilon_2 - \varepsilon'_2) P_2(x) + \cdots + (\varepsilon_\varkappa - \varepsilon'_\varkappa) P_\varkappa(x) + \cdots,$$

den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, also keinen regulären Punkt auf der Kreisperipherie aufweist.

A. Hurwitz.

SUR L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN.

PAR

MARCEL RIESZ

à STOCKHOLM.

1°. Dans cette Note, je me propose de représenter la fonction $\dfrac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\zeta(s)}$ par une intégrale de la forme

$$\int_0^{\infty} F(x)\, x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}\, dx,$$

$F(x)$ désignant une fonction entière donnée explicitement. Comme on sait, l'hypothèse de Riemann consiste en ce que la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$. Notre représentation fournira une condition nécessaire et suffisante pour la validité de cette hypothèse de Riemann. Je ne sais pas encore décider si cette condition facilitera la vérification de l'hypothèse.

2°. Formons les quantités

$$C_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

et la fonction entière

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{C_k \Gamma(k)}\, x^k .$$

D'après le calcul des résidus, on a

$$F(x) = \frac{i}{2} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^z}{\zeta(2z)\Gamma(z)\sin \pi z}\, dz, \qquad \left(\frac{1}{2} < a < 1\right)^{1} \tag{1}$$

[1] En ce qui concerne l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\zeta(z)}$ cf. LANDAU: Handbuch der Lehre der Verteilung der Primzahlen (Teubner, 1909) t. I p. 177—178.

l'intégrale étant absolument et uniformément convergente pour

$$-\frac{\pi}{2}+\delta \leq \operatorname{Arg} x \leq \frac{\pi}{2}-\delta \qquad (\delta > 0) \tag{2}$$

Il en résulte immédiatement, en posant $a=\frac{1}{2}$, que l'on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

ou en adoptant une notation due à M. LANDAU

$$F(x) = o\,(x^{\frac{1}{2}}),^{1} \tag{3}$$

x tendant vers l'infini à l'intérieur d'un angle de la forme (2).

3°. Formons maintenant l'intégrale

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} F(x)dx, \tag{4}$$

le chemin d'intégration étant l'axe réel positif. En vertu de (3), cette intégrale converge absolument et *uniformément* dans toute bande de la forme

$$1+\delta \leq R(s) \leq 2-\delta \qquad (\delta > 0),$$

et elle y représente donc une fonction analytique. D'autre part, on peut écrire

$$n^{-s}\varphi(s) = \int_0^{\infty} x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} F\left(\frac{x}{n^2}\right) dx$$

$$\zeta(s)\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} F\left(\frac{x}{n^2}\right) dx.$$

Il est légitime d'intervertir l'ordre de la sommation et de l'intégration. Cela est évident pour l'intégrale prise entre 0 et 1 p. ex., les termes de la série étant de l'ordre de grandeur n^{-2}. Pour l'intégrale prise entre 1 et ∞, la formule (1) nous donne

[1] Comme d'ordinaire, la notation $\Phi(x)=o(x^a)$ signifie que $\frac{\Phi(x)}{x^a}$ tend vers zéro et la notation $\Phi(x)=O(x^a)$ signifie que $\frac{\Phi(x)}{x^a}$ reste fini, quand x tend vers l'infini.

$$\left|F\left(\frac{x}{n^2}\right)\right| < M\left(\frac{x}{n^2}\right)^a,$$

M désignant un nombre positif ne dépendant que de a. En choisissant $\frac{1}{2} < a < \frac{R(s)}{2}$, on voit que l'interversion en question est légitime.

Or, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

étant uniformément convergente dans tout domaine borné et ayant par conséquent la valeur

$$xe^{-x},$$

on a finalement

$$\zeta(s)\varphi(s) = \int_0^{\infty} x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} xe^{-x}\,dx = \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)$$

c.-à-d.

$$\frac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\zeta(s)} = \int_0^{\infty} x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} F(x)\,dx. \qquad (5)$$

4°. Si l'on avait, x tendant vers l'infini sur l'axe réel positif,

$$F(x) = O\left(x^{\frac{1}{4}+\delta}\right) \qquad (6)$$

pour tout nombre positif δ, l'intégrale (5) convergerait absolument et uniformément dans toute bande de la forme

$$\frac{1}{2} + \delta \leqq R(s) \leqq 2 - \delta.$$

Donc, moyennant l'hypothèse (6), la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$.

D'autre part, en utilisant un théorème de M. Carathéodory, M. Landau avait démontré que moyennant l'hypothèse de Riemann, on a

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O(|s|^r)^{1} \text{ pour } R(s) \geqq \frac{1}{2} + \delta,$$

[1] Landau: *loc. cit.* t. II p. 870. M. Littlewood a démontré que moyennant la même hypothèse, on a même $\frac{1}{\zeta(s)} = O(|s|^{\varepsilon})$, ε désignant un nombre positif arbitrairement petit. (Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$. Comptes rendus, 29 janvier 1912.)

r désignant un nombre positif ne dépendant que de δ. Donc, en admettant que l'hypothèse de Riemann soit vraie, on pourrait mettre dans (1) $a = \frac{1}{4} + \delta$, ce qui entraînerait (6).

On en conclut que (6) *est la condition nécessaire et suffisante pour la validité de l'hypothèse de Riemann.*

Remarquons que la formule (1) met en évidence que la relation (6) est remplie dans tout angle (2), dès qu'elle l'est sur l'axe réel positif.

Inversement, on voit sans peine, en combinant (3) avec un théorème connu de MM. Phragmén et Lindelöf, que (6) étant remplie sur une certaine demi-droite située dans l'angle (2), elle le sera sur l'axe réel positif.

On pourrait remplacer $F(x)$ par d'autres fonctions de structure analogue. On voit que la méthode que nous avons suivie permet aussi d'exprimer la valeur réciproque d'une fonction quelconque représentée par une série de Dirichlet.

Il est facile de vérifier l'identité

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n^2}},$$

les $\mu(n)$ désignant les nombres de Möbius.

5°. Nous ajouterons quelques remarques sur la distribution des zéros de la fonction $F(x)$.

On a, pour x réel et positif, $\lim\limits_{=\infty} \frac{e^{-x}F(-x)}{x} = -1$. D'autre part, pour un x quelconque $\neq 0$, $F(x)$ satisfait à l'inégalité $|F(x)| < |x| e^{|x|}$. De ces deux faits il résulte d'après des théorèmes connus de Poincaré[1] et de M. Hadamard que $F(x)$ est de *genre un*.

Désignons maintenant par γ_ν les zéros de $\frac{F(x)}{x}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. De l'inégalité ci-dessus, on conclut immédiatement moyennant le théorème en question de M. Hadamard que la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_\nu|^{1+\varepsilon}}$ est convergente, ε désignant un nombre positif arbitrairement petit. Nous allons démontrer que la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_\nu|}$ est divergente.

En effet, si elle était convergente on aurait d'après les faits précédents et

[1] De la convergence de $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_\nu|}$ il s'ensuit $\left| \prod\limits_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\gamma_\nu}\right) \right| = O(e^{\varepsilon |x|})$, ε désignant un nombre positif arbitrairement petit.

le théorème cité de POINCARÉ $F(x) = xe^{-x}\prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{\gamma_\nu}\right)$. Observons maintenant que la relation $F(x) = O(x^{\frac{1}{4}-\delta})$ $(\delta > 0)$, x tendant vers l'infini sur l'axe réel positif, est inadmissible. Elle entraînerait en effet le résultat manifestement inexact que la fonction $\zeta(s)$ ne possède pas de zéros imaginaires. Mais si $F(x)$ était de la forme ci-dessus, il résulterait immédiatement du dit théorème de POINCARÉ $F(x) = O(e^{-x(1-\varepsilon)}) = O(x^{\frac{1}{4}-\delta})$. Nous avons donc démontré que la série $\sum \frac{1}{|\gamma_\nu|}$ est divergente.

Ainsi nous avons obtenu pour $F(x)$ la forme canonique suivante:

$$F(x) = xe^{\gamma x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{\gamma_\nu}\right)e^{\frac{x}{\gamma_\nu}}. \tag{7}$$

Le nombre γ est évidemment réel.

Nous allons maintenant démontrer que $F(x)$ *a une infinité de zéros imaginaires.* Ceci résultera d'un théorème important de M. PÓLYA qu'il a eu l'amitié de me communiquer lors d'un entretien à Göttingen l'été 1913. [1]

Le théorème en question peut s'énoncer de la manière suivante:

Supposons que la fonction entière $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *admette une représentation de la forme*

$$\Phi(x) = c\,x^r e^{-\gamma x^2 + \delta x}\prod_{\mu=1}^{r}(1 + \beta_\mu x)(1 + \bar\beta_\mu x)\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + \delta_\nu x)\,e^{-\delta_\nu x}, \tag{8}$$

γ étant $\geqq 0$, β_μ et $\bar\beta_\mu$ désignant des quantités imaginaires conjuguées, c, δ et δ_ν des quantités réelles, et $\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_\nu^2$ étant convergent. Alors, pour que la fonction $\Phi(x)$ n'admette pas en même temps une représentation de la forme

$$\Phi(x) = c\,x^r e^{\gamma x}\prod_{\mu=1}^{r}(1 + \beta_\mu x)(1 + \bar\beta_\mu x)\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + \delta_\nu x), \tag{9}$$

γ et tous les δ_ν étant des nombres réels de même signe et le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + \delta_\nu x)$ étant

[1] Le théorème se trouve établi dans le travail suivant de M. PÓLYA, paru pendant l'impression du travail présent: Algebraische Untersuchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte Null und Eins. J. f. Math (145) 1915; *cf.* p. 247—249.

absolument convergent, il faut et il suffit que chacune des deux suites $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ *et* $a_0, -a_1, \ldots (-1)^n a_n, \ldots$ *présente une infinité de changements de signe.*

En ce qui concerne notre fonction $F(x)$, il est manifeste, d'après ce que nous venons de démontrer, qu'elle ne peut admettre une représentation de la forme (9). D'autre part, il résulte de la formule (7) que si la fonction $F(x)$ n'avait qu'un nombre fini de zéros imaginaires, elle admettrait une représentation de la forme (8). La suite $\frac{1}{C_1 \Gamma(1)}, \frac{1}{C_2 \Gamma(2)}, \ldots$ ne présentant aucun changement de signe, il s'ensuivrait d'après le théorème de M. Pólya que $F(x)$ admet en même temps une représentation de la forme (9). Ceci étant impossible, il se trouve établi que $F(x)$ possède vraiment une infinité de zéros imaginaires.

D'autre part, de la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{n^2}\right) = x e^{-x}$$

et de l'inadmissibilité de la relation $F(x) = O(x^{\frac{1}{4}-\delta})$, il résulte immédiatement que $F(x)$ change de signe au moins une fois sur l'axe réel positif.

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES À COEFFICIENTS RATIONNELS.[1]

PAR

N. E. NÖRLUND

à Lund.

Introduction.

Le premier jet d'une théorie des équations linéaires aux différences finies a été donné par POINCARÉ[2] en 1885. En désignant par $u(x)$ une solution de l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=k} p_i(x)\, u(x+i) = 0, \tag{1}$$

POINCARÉ démontre que le quotient $u(x+1):u(x)$ tend, en certains cas, vers une limite quand x tend vers l'infini par des valeurs positives et il détermine cette limite.

L'objet principal du Mémoire de POINCARÉ était d'ailleurs l'étude des solutions des équations différentielles linéaires au voisinage du point à l'infini et il faisait ressortir l'analogie qu'il y a entre ces équations et celles aux différences finies. L'étude des valeurs asymptotiques des solutions $u(x)$ de l'équation (1) a

[1] L'impression de ce Mémoire, qui est arrivé à la Rédaction en octobre 1912, a été retardé par des circonstances imprévues. MITTAG-LEFFLER.

[2] Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. American Journal of Mathematics t. 7, p. 203—258, 1885.

été poursuivie plus loin par MM. PINCHERLE,[1] HORN,[2] PERRON,[3] VAN VLECK[4] et par le présent auteur.

Soient $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_k(x)$ des fonctions rationelles de x. En m'inspirant des résultats de POINCARÉ relatifs aux équations différentielles j'ai démontré[5] l'existence d'un système fondamental de solutions de l'équation (1), holomorphes dans un certain demi-plan.

J'ai obtenu des expressions asymptotiques de ces solutions pour des valeurs réelles et très grandes de x en formant des développements en séries de facultés qui, en certains cas, sont convergentes et en tous cas représentent asymptotiquement les solutions. Dans le Mémoire cité j'ai insisté surtout sur l'existence de *deux* systèmes fondamentaux de solutions que j'appelle le premier et le second systèmes canoniques de solutions. Elles se distinguent nettement, par leurs propriétés analytiques, de toutes les autres solutions qu'on sait former, et j'ai fait voir quel est le rôle que jouent ces solutions dans la théorie des fractions continues. Le but du présent Mémoire est d'approfondir l'étude de ces deux systèmes de solutions.

Ce sont des fonctions analytiques et uniformes de la variable complexe x. Je détermine leurs points singuliers et je mettrai en évidence le caractère analytique des singularités. Les resultats auxquels je suis parvenu sont d'une grande simplicité. L'équation (1) définit une classe de transcendantes nouvelles fort remarquables.

Jusqu'à ces derniers temps la fonction $\Gamma(x)$ était la seule d'entre elles

[1] Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle. Acta mathematica t. 16, p. 341—363, 1893; Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze, Rom. Acc. L. Rend. sér. 5, t. 7, p. 230—234, 1898.

[2] Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. Math. Annalen t. 53, p. 177—192, 1900; Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzen- und Differentialgleichungen für grosse Werte der Veränderlichen. Journal für die reine und angewandte Mathematik t. 138, p. 159—191, 1910.

[3] Über einen Satz des Herrn POINCARÉ. Journal für die reine und angewandte Mathematik t. 136, p. 17—37, 1909; Über die POINCARÉ'sche lineare Differenzengleichung ibid. t. 137, p. 6—64, 1909; Über lineare Differenzengleichungen. Acta mathematica t. 34, p. 109—137, 1910. Voir aussi:

T. ERB: Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differenzen-Gleichungen durch Potenreihen. Diss. Pirmasens, 1913.

P. KREUSER: Über das Verhalten der Integrale homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen. Diss. Borna-Leipzig, 1914.

[4] On the extension of a theorem of POINCARÉ for difference-equations. Transactions of the American Mathematical Society t. 13, p. 342—352, 1912.

[5] Fractions continues et différences réciproques. Acta mathematica t. 34, p. 1—108, 1910.

qu'on eût étudiée. Mais tout récemment MM. BIRKHOFF[1] et GALBRUN[2] ont publié des travaux remarquables concernant les équations aux différences. Je me suis rencontré avec ces auteurs sur plusieurs points. Mais nos recherches ont été poursuivies indépendamment les une des l'autres et par des voies différentes. Pour ce qui concerne la priorité des questions je fais remarquer que la partie essentielle de mes résultats a déjà été démontrée dans ma Thèse.[3]

M. HORN, dans les Mémoires cités, avait formé certaines séries de puissances qui satisfont formellement à l'équation aux différences et il avait démontré qu'elles représentent asymptotiquement les solutions pour des valeurs entières positives et très grandes de x. C'est sur la considération de ces séries de puissances que sont fondées les recherches de MM. BIRKHOFF et GALBRUN.

[1] General theory of linear difference equations. Transactions of the American Mathematical Society t. 12, p. 243—284, 1911. Plus récemment encore M. BIRKHOFF a publié un Mémoire très important qui va sans doute inspirer des recherches nouvelles sur le sujet mais que je dois me borner à citer ici. The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences p. 521—568, octobre 1913.

[2] Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable. Thèse, Acta mathematica t. 36, p. 1—68, 1912. Voir aussi Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 5 avril 1909, 6 décembre 1909, 24 janvier 1910, 12 décembre 1910.

Parmi les travaux récents qui se rapportent plus ou moins directement à notre sujet je cite encore:

K. P. WILLIAMS: The solutions of non-homogenous linear difference equations and their asymptotic form. Transactions of the American Mathematical Society t. 14, p. 209—240, 1913.

T. BRODÉN: Bemerkungen über sogenannte finite Integration. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik t. 7, 1911; Einige Anwendungen diskontinuierlicher Integrale auf Fragen der Differenzenrechnung. Lunds Universitets Årsskrift. N. F. Afd. 2, Bd 8, N:r 7.

R. D. CARMICHAEL: Linear difference equations and their analytic solutions. Transactions of the American Mathematical Society t. 12, p. 99—134, 1911; On the theory of linear difference equations. American Journal of Mathematics t. 35, p. 163—182, 1913; Linear mixed equations and their analytic solutions. Ibid. t. 35, p. 151—162, 1913.

C. B. HENNEL: Transformations and invariants connected with linear homogenous difference equations and other functional equations. Ibid. t. 35, p. 431—452, 1913.

G. WALLENBERG und A. GULDBERG: Theorie der linearen Differenzengleichungen. Leipzig, 1911.

S. LATTÈS: Sur les suites récurrentes non linéaires et sur les fonctions génératrices de ces suites. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Sér. 3, t. 3, p. 73—124.

E. E. LEVI: Sopra una classe di trascendenti meromorfe. Annali di Matematica, sér. 3, t. 14, p. 93—113.

N. KUYLENSTIERNA: Études sur les équations aux différences finies. Thèse. Lund, 1912.

M. FUJIWARA: Ueber Zusammenhang zwischen den linearen adjungierten Differenzen- und Differentialgleichungen. The Tôhoku mathematical Journal t. 1, p. 195—200, 1912.

[3] Bidrag til de lineaere Differensligningers Theori. Copenhague 1910. J'ai donné un résumé des resultats dans les Notes suivantes: »Sur la convergence des fractions continues. Comptes rendus de l'Académie des Sciences 5 oct. 1908; Sur les équations aux différences finies, ibid. 15 nov. 1909, 23 décembre 1912, 6 janvier 1913; Ueber lineare Differenzengleichungen. Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague, sér. 7, t. VI, p. 309—326, 1911.

Mais d'une part ces séries sont très difficiles à former, d'autre part elles sont toujours divergentes.[1] *La série de puissance* qui a rendu si grands services dans la théorie des équations différentielles se prête mal à l'étude des solutions des équations aux différences finies. C'est, dans ce cas, à *la série de facultés* qu'il faut avoir recours.

Dans ce Mémoire je me suis constamment servi de ces séries, toute la théorie en gagne beaucoup, en clarté et en beauté, ce me semble. Comme l'a démontré récemment M. Horn[2] les séries de facultés peuvent d'ailleurs aussi rendre service dans l'étude des équations différentielles linéaires.

Les propriétés des séries de facultés ont été étudiées par MM. Jensen, Nielsen, Pincherle et Landau. J'ai dû approfondir sur plusieurs points la théorie de ces séries avant d'écrire ce Mémoire. Dans ce qui suit je m'appuyerai souvent sur cette étude préliminaire.[3]

Dans le chapitre II je considère des équations aux différences finies de la forme (1), les coefficients $p_i(x)$ étant des polynomes du degré p en x. Je forme un système fondamental de solutions $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ qui se représentent sous la forme

$$u_i(x) = a_i^x \sum_{s=0}^{s=r} \Omega_s(x) \frac{\partial^s}{\partial \beta_i^s} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega} + \beta_i + 1\right)} \right]$$

ou, si l'on aime mieux, sous la forme

$$u_i(x) = a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_i + 1} \sum_{s=0}^{s=r} \Omega_s(x) \log^s \left(\frac{1}{x}\right);$$

les $\Omega_s(x)$ sont des fonctions qui se représentent par des séries de facultés convergentes de la forme

$$\Omega_s(x) = A_0^{(s)} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{A_{\nu+1}^{(s)}}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)};$$

ω est un nombre positif convenablement choisi. Les a_i et les β_i sont des nombres

[1] Il faut seulement excepter le cas trivial où la solution en question se réduit à une fonction rationnelle multipliée par une exponentielle.

[2] Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Mathematische Annalen t. 71, p. 510—532, 1911.

[3] Sur les séries de facultés. Acta mathematica t. 37, p. 327—387, 1914.

complexes indépendants de x. Ces solutions sont des fonctions méromorphes de x admettant pour pôles les points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2, \alpha_s - 3, \ldots (s = 1, 2, \ldots, p)$, et étant d'ailleurs holomorphes. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les zéros de $p_0(x)$. Quand x tend vers l'infini le long d'une droite qui forme avec l'axe des nombres positifs un angle qui est, en valeur absolue, inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$ l'expression

$$\frac{u_i(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_i + 1} \log^n \left(\frac{1}{x}\right)}$$

tend uniformément vers une limite finie et non-nulle; n désigne un entier $\leq r$.

Je forme ensuite un second système fondamental de solutions $\overline{u}_1(x)$, $\overline{u}_2(x), \ldots, \overline{u}_k(x)$ qui sont des fonctions méromorphes admettant pour pôles les points $\gamma_s, \gamma_s + 1, \gamma_s + 2, \ldots, (s = 1, 2, \ldots, p)$; les nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ sont les zéros de $p_k(x + k)$. Quand x tend vers l'infini le long d'une droite qui forme avec l'axe des nombres negatifs un angle qui est, en valeur absolue, inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$ l'expression

$$\frac{\overline{u}_i(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_i + 1} \log^n \left(\frac{1}{x}\right)}$$

tend uniformément vers une limite. Entre ces deux systèmes de solutions il existe des relations linéaires à coefficients périodiques fort remarquables.

Dans les chapitres III et IV je démontre par deux voies différentes que ces coefficients périodiques sont des fonctions rationnelles de $e^{2\pi i x}$. Je détermine la forme de ces fonctions et les constantes qui y entrent. L'établissement de ces relations linéaires est le point capital dans notre étude. Elles permettent en particulier de se rendre compte comment se comportent les solutions $u_i(x)$ et les solutions $\overline{u}_i(x)$ quand x tend vers l'infini d'une manière quelconque.

Dans le chapitre V on traite ce problème.

On peut, comme on sait, considérer les équations différentielles comme un cas limite des équations aux différences finies. Les équations dont nous venons de parler contiennent comme cas limite des équations différentielles admettant le point à l'infini comme *point singulier irrégulier*. Mais il arrive dans un cas particulier que ce point devient un *point singulier régulier*. J'ai considéré ce cas à part dans le chapitre I. L'équation aux différences peut alors se mettre sous la forme

$$\sum_{s=0}^{s=k} Q_s(x) \Delta^{s}_{-1}\, u(x) = 0,$$

les coefficients $Q_k(x), Q_{k-1}(x), \ldots, Q_0(x)$ étant des polynomes dont les degrés vont en décroissant avec les indices. Ce cas se distingue nettement du cas général par la simplicité des résultats auxquels on arrive. Remarquons en particulier que les solutions méromorphes $u_i(x)$ dont on vient de parler sont telles qu'on ait uniformément dans l'angle $\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon$

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_i(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_i+1} \log^{n}\left(\frac{1}{x}\right)} = \text{const.}$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut.

CHAPITRE I.

Formation de deux systèmes fondamentaux de solutions.

§ 1. Les expressions analytiques qui conviennent le mieux pour représenter les solutions d'une équation linéaire aux différences finies à coefficients rationnels sont: La série de facultés, la série de fractions rationnelles, la fraction continue et certaines intégrales définies intimement liées à la théorie des séries de facultés. Quant à la représentation par des fractions continues j'ai déjà eu l'occasion de donner quelques indications sur ce sujet[1] et je pense y revenir dans un autre Mémoire.

Dans ce chapitre nous allons faire voir que la théorie classique des équations différentielles linéaires nous amène directement aux autres expressions analytiques énumérées plus haut.

Comme nous allons voir par la suite de ce Mémoire ces développements ont l'avantage de donner, sans aucun calcul, les positions des points singuliers de nos solutions et elles mettent en évidence la nature des singularités.

Soit x une variable complexe; soit $u(x)$ la solution à déterminer. Posons

$$\Delta^{i}_{\omega} u(x) = \frac{u(x+i\omega) - \binom{i}{1} u(x+(i-1)\omega) + \cdots + (-1)^i u(x)}{\omega^i},$$

[1] l. c. Acta mathematica t. 34, p. 33—38, 1910.

et considerons d'abord une équation aux différences finies de la forme

$$Q(x) \equiv \sum_{i=0}^{i=k} Q_i(x)\, \Delta_{-1}^{i}\, u(x) = 0, \tag{1}$$

les coefficients $Q_k(x)$, $Q_{k-1}(x)$, ..., $Q_0(x)$ étant des polynômes en x dont les degrés vont en décroissant avec les indices; plus précisement, si p désigne le degré de $Q_k(x)$, on suppose que le degré de $Q_{k-i}(x)$ soit inférieur ou égal à $p-i$; on a donc necessairement $p \geq k$, car le degré de $Q_0(x)$ serait sans cela négatif. Les polynômes $Q_i(x)$ peuvent toujours se mettre sous la forme[1]

$$Q_i(x) = \sum_{s=0}^{s=p-k+i} c_{i,s}(x-i)(x-i+1)\ldots(x-i+s-1), \tag{2}$$

les $c_{i,s}$ étant indépendants de x; on peut sans diminuer la généralité supposer que $c_{k,p}$ soit égal à 1. Appliquons la transformation de LAPLACE et essayons de déterminer une fonction $v(t)$ et une ligne d'intégration de sorte que l'intégrale

$$u(x) = \int t^{x-1} v(t)\, dt \tag{3}$$

est une solution de l'équation (1).

En intégrant par partie on trouve:

$$x(x+1)\ldots(x+s-1)\, u(x) = (-1)^s \int t^{x+s-1} \frac{d^s v(t)}{dt^s}\, dt \qquad (s = 0, 1, \ldots p)$$

pourvu que les limites d'intégration aient été choisies de telle sorte que les termes tout intégrés disparaissent pour ces valeurs de t. En appliquant à $u(x)$ les opérations Δ_{-1}^{i} $(i = 1, 2, \ldots, k)$ on trouve de même:

$$(x-i)(x-i+1)\ldots(x-i+s-1)\, \Delta_{-i}^{i}\, u(x) = (-1)^s \int t^{x-i+s-1} \frac{d^s[(t-1)^i v(t)]}{dt^s}\, dt$$

pourvu que les termes

$$t^{x+s-i-1} \frac{d^{s-1}[(t-1)^i v(t)]}{dt^{s-1}} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, p \\ i = 0, 1, \ldots, k \end{pmatrix} \tag{4}$$

[1] Dans tout ce qui suit il faut remplacer le produit $x(x+1)\ldots(x+s-1)$ par 1, quand s est égal à zéro.

disparaissent dans les limites d'intégrations. Substituons ces intégrales dans l'équation (1) on voit que $v(t)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\sum_{i=0}^{i=k}\sum_{s=0}^{s=p}(-1)^s c_{i,s}\, t^{k+s-1}\frac{d^s[(t-1)^i v(t)]}{dt^s}=0, \tag{5}$$

où, par hypothèse, $c_{k-i,p-s}=0$, si $s<i$. Cette équation différentielle est d'ordre p, c'est à dire que l'ordre est égal au degré du coefficient de la plus haute différence de $u(x)$ dans l'équation (1).

Le coefficient de

$$\frac{d^p v(t)}{dt^p}$$

est égal à

$$(-t)^p(t-1)^k.$$

Les points singuliers de l'équation (5) sont 0, 1 et ∞, et l'on voit sans peine que ce sont des points singuliers réguliers. L'équation déterminante relative au point $t=1$ est

$$\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-p+k+1)\sum_{i=0}^{i=k}(-1)^i c_{k-i,p-i}(\varrho+1)(\varrho+2)\dots(\varrho+k-i)=0.$$

On remarque que les coefficients $c_{k,p}, c_{k-1,p-1},\dots, c_{0,p-k}$ qui entrent dans cette équation sont les coefficients des termes du degré maximal dans les polynomes $Q_k(x), Q_{k-1}(x),\dots, Q_0(x)$.

Désignons les racines de cette équation par $0, 1, \dots, p-k-1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$. Elles sont en nombre p, parce que par hypothèse $c_{k,p}=1$. L'équation différentielle (5) admet donc $p-k$ solutions holomorphes au voisinage de $t=1$ et k solutions, qui se représentent par des développements de la forme

$$v_s(t)=(t-1)^{\beta_s}\{A_0+A_1(1-t)+A_2(1-t)^2+\cdots\} \tag{6}$$

la série étant convergente pour $|t-1|<1$ et A_0 étant différent de zéro. A chaque nombre β_s il appartient ainsi une solution, déterminée à un facteur constant près, et en général non holomorphe au voisinage de $t=1$. On suppose pour le moment qu'aucune des différences entre les β_s ne soit égale à un entier. Le cas général où les recines β_s forment des groupes et où le développement correspondant (6) contient des logarithmes sera discuté plus loin.

§ 2. L'équation déterminante relative au point $t=0$ est $Q_k(k-\varrho)=0$, ϱ étant la variable, k étant l'ordre de l'équation aux différences et $Q_k(x)$ étant le coefficient de $\Delta^k_{-1} u(x)$. Désignons que $\alpha_1+k, \alpha_2+k, \ldots, \alpha_k+k$ les racines de $Q_k(x)=0$ et supposons, pour fixer les idées, qu'elles soient numérotées de sorte que

$$\Re(\alpha_1) \geqq \Re(\alpha_2) \geqq \cdots \geqq \Re(\alpha_p).$$

Toute solution de l'équation (5) se représente au voisinage de $t=0$ par une expression de la forme

$$v(t)=\sum_{i=1}^{i=p} c_i t^{-\alpha_i}\{\psi_{i,0}(t)+\psi_{i,1}(t)\log t+\cdots+\psi_{i,r}(t)\log^r t\}, \tag{8}$$

les $\psi_{i,s}(t)$ étant des fonctions holomorphes à l'intérieur du cercle $|t|=1$. L'équation déterminante relative au point $t=\infty$ est

$$\sum_{i=0}^{i=k} Q_i(-\varrho)=0.$$

Soit

$$\varrho=-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_p$$

les racines de cette équation et supposons qu'elles soient numérotées de sorte que

$$\Re(\gamma_1) \geqq \Re(\gamma_2) \geqq \cdots \geqq \Re(\gamma_p).$$

Au voisinage du point à l'infini la solution générale de notre équation différentielle s'écrit

$$v(t)=\sum_{i=1}^{i=p} c_i \left(\frac{1}{t}\right)^{\gamma_i}\left\{\psi_{i,0}(t)+\psi_{i,1}(t)\log\left(\frac{1}{t}\right)+\cdots+\psi_{i,r}(t)\log^r\left(\frac{1}{t}\right)\right\} \tag{9}$$

les $\psi_{i,s}(t)$ étant des fonctions holomorphes à l'extérieur du cercle $|t|=1$.

§ 3. Nous allons voir plus loin que les quantités α_i, β_i et γ_i, qui sont en nombre $2p+k$, caractérisent entièrement les singularités des solutions de notre équation aux différences. Elles se déterminent facilement à l'aide des coefficients de l'équation aux différences. Relativement à cette détermination nous

ajoutons encore la remarque suivante. En posant $U(x) = u(x-k)$ on peut donner à l'équation (1) la forme suivante

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_i(x) \Delta^i_{+1} U(x) = 0, \tag{10}$$

les coefficients $P_k(x), \ldots, P_0(x)$ étant des polynômes dont les degrés vont en décroissant avec les indices. *Les nombres γ_i sont les zéros du coefficient de la différence finie d'ordre le plus élevé dans l'équation* (10) *tandis que les $\alpha_i + k$ sont les zéros du coefficient de la différence d'ordre le plus élevé dans l'équation* (1). Il est souvent préferable d'écrire l'équation (1) sous la forme:

$$\sum_{i=0}^{i=k} p_i(x) u(x+i) = 0. \tag{11}$$

Les coefficients de cette équation sont des polynômes du degré p et l'on a

$$p_k(x) = P_k(x+k), \quad p_0(x) = (-1)^k Q_k(x+k),$$

on voit donc que *les $\gamma_i - k$ sont les zéros du coefficient de $u(x+k)$, et les α_i sont les zéros du coefficient de $u(x)$ dans l'équation* (11).

§ 4. Cela posé, nous pouvons définir deux systèmes fondamentaux de solutions de l'équation (1). Soit l une ligne d'intégration partant du point $t=0$ le long de l'axe des nombres positifs et y revenant, après avoir entouré le point $t=1$ dans le sens direct, comme l'indique la fig. 1. Soit L une ligne d'intégration partant de l'infini positif et y revenant après avoir entouré le point $t=1$ dans le sens direct.

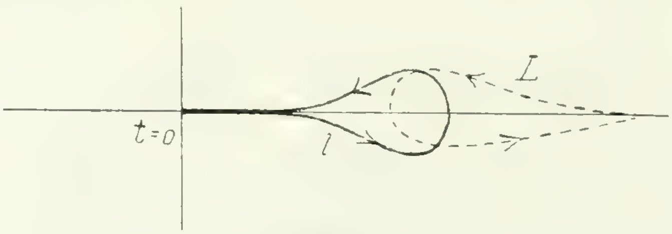


Fig. 1

Posons

$$u_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} t^{x-1} v_s(t)\,dt, \tag{12}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, k)$$

$$\bar{u}_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} t^{x-1} v_s(t)\,dt, \tag{13}$$

$v_s(t)$ étant une solution de l'équation différentielle (5), définie par le développement (6) et appartenant au nombre β_s.

A chaque nombre β_s il appartient ainsi une intégrale $u_s(x)$ et une intégrale $\bar{u}_s(x)$.

Considérons les termes (4). Quand t tend vers zéro tous ces termes disparaissent pourvu que la partie réelle de x soit supérieure à $\Re(\alpha_1 + k)$. Cette condition étant satisfaite, les $u_s(x)$ représentent donc des solutions de l'équation (1). Mais ces intégrales sont absolument convergentes dans le demi-plan $\Re(x - \alpha_1) > 0$, car au voisinage de $t = 0$ $v_s(t)$ est de la forme (8). Des théorèmes bien connus relativement au prolongement analytique il résulte donc que les $u_s(x)$ satisfont à l'équation (1) dans ce demi-plan. Si par exception on a $c_1 = 0$ l'intégrale $u_s(x)$ peut même être convergente dans un domaine plus étendu.

De même on voit que les $\bar{u}_s(x)$ sont absolument convergentes pourvu que $\Re(x - \gamma_p) < 0$ et qu'elles représentent des solutions de l'équation (1) dans ce demi-plan.

Pour définir complètement ces deux systèmes de solutions nous allons convenir que l'argument de $t - 1$ croît de $-\pi$ à $+\pi$ quand t se meut le long du contour l et de 0 à 2π quand t se meut le long du contour L. Pour l'argument de t on adoptera la valeur qui est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

Nous nommerons les solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$, définies pour le moment dans le demi-plan $\Re(x - \alpha_1) > 0$, *le premier système canonique*. De même nous nommerons $\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \ldots, \bar{u}_k(x)$, définies pour le moment dans le demi-plan $\Re(x - \gamma_p) < 0$, *le second système canonique*.

Nous démontrerons plus loin qu'elles forment deux systèmes fondamentaux de solutions entre lesquels il existe des relations linéaires fort remarquables.

Développements en séries de facultés.

§ 5. De l'intégrale eulérienne de première espèce on déduit aisément les relations suivantes

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} t^{x-1}(t-1)^{\beta}\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(-\beta)\,\Gamma(x+\beta+1)},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} t^{x-1}(t-1)^{\beta}\,dt = e^{\pi i(\beta+1)}\frac{\Gamma(-x-\beta)}{\Gamma(-\beta)\,\Gamma(1-x)}.$$

les arguments de t et de $t-1$ étant fixés comme il a été dit plus haut. Les deux intégrales sont convergentes respectivement pour $\Re(x)>0$ et pour $\Re(x+\beta)<0$.

Substituons dans l'intégrale (12) au lieu de $v_s(t)$ le développement (6); si l'on suppose que $\Re(x)>0$, $\Re(x-\alpha_1)>0$ il est permis d'intégrer terme par terme[1] et on trouve

$$u_s(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(-\beta_s)\,\Gamma(x+\beta_s+1)}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu \frac{(\beta_s+1)(\beta_s+2)\ldots(\beta_s+\nu)}{(x+\beta_s+1)(x+\beta_s+2)\ldots(x+\beta_s+\nu)}. \tag{14}$$

L'ordre de $v_s(t)(t-1)^{-\beta_s}$ dans le point $t=0$ est égal à la partie réelle de α_1. On sait donc trouver un nombre positif M tel qu'on ait pour $n=1, 2, 3, \ldots$

$$|A_n| < M\, n^{\Re(\alpha_1)-1}.$$

On en conclut immédiatement que la série de facultés converge absolument si $\Re(x-\alpha_1)>0$. On peut donc supprimer la condition $\Re(x)>0$, car la série (14) représente une fonction analytique holomorphe dans le demi-plan $\Re(x-\alpha_1)>0$. Il faut excepter pourtant les points $x=0, -1, -2, \ldots$ s'ils se trouvent dans le demi-plan de convergence. Le facteur $\Gamma(x)$ admet ces points comme des pôles simples; mais si $\Re(\alpha_1)<0$, on a

$$\lim_{t=0} v_s(t) = 0;$$

d'un théorème d'Abel il résulte donc que

$$0 = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots;$$

cette série représente la valeur de la série de facultés dans le point $x=0$. On voit donc que la série de facultés admet les points $x=0, -1, -2, \ldots$ comme des zéros. La fonction $u_s(x)$ est par conséquent holomorphe dans ceux de ces

[1] l. c. Sur les séries de facultés § 10, p. 361.

points qui se trouvent à l'intérieur du domaine de convergence; cela résulte d'ailleurs aussi de la convergence de l'intégrale (12).

Passons à l'intégrale (13). Le développement (6) n'étant pas convergent le long de la ligne d'intégration on ne peut pas intégrer terme par terme; on peut pourtant, en transformant convenablement ce développement en obtenir une série de facultés. Posons

$$v_s(t) = (t-1)^{\beta_s}\varphi(t)$$

la fonction $\varphi(t)$ est une branche d'une fonction analytique holomorphe au voisinage de $t=1$ et admettant comme points singuliers les points $t=0$ et $t=\infty$.

Posons $z=\frac{t-1}{t}$; la fonction

$$\varphi(t)=\varphi\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

se représente au voisinage de $z=0$ par une série de la forme

$$\varphi(t)=B_0-B_1z+B_2z^2-B_3z^3+\cdots, \tag{15}$$

ayant le cercle de convergence $|z|=1$. L'unique point singulier sur ce cercle est $z=1$, et l'ordre dans ce point est égal à $-\Re(\gamma_p+\beta_s)$. Substituons la série (15) dans l'intégrale (13). On vérifie aisément que les conditions pour que l'intégration terme par terme soit légitime sont satisfaites. On trouve donc:

$$\overline{u}_s(x)=e^{\pi i(\beta_s+1)}\frac{\Gamma(-x-\beta_s)}{\Gamma(-\beta_s)\Gamma(1-x)}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}B_\nu\frac{(\beta_s+1)(\beta_s+2)\ldots(\beta_s+\nu)}{(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu)}, \tag{16}$$

et on voit comme plus haut que la série de facultés est absolument convergente si $\Re(x-\gamma_p)<0$; elle représente $\overline{u}_s(x)$ dans ce demi-plan en exceptant les points $x=-\beta_s, -\beta_s+1, -\beta_s+2, \ldots$ s'ils sont situés dans le demi-plan de convergence. La série de facultés admet ces points comme zéros et le facteur $\Gamma(-x-\beta_s)$ les admet comme des pôles simples. La fonction $\overline{u}_s(x)$ est donc holomorphe dans le demi-plan $\Re(x-\gamma_p)<0$.

Il est facile d'exprimer les coefficients B_ν, qui entrent dans le développement (16), par les coefficients A_ν, qui entrent dans le développement de $u_s(x)$.

On a en effet

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}A_\nu(1-t)^\nu=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}B_\nu\left(\frac{1-t}{t}\right);$$

la série au second membre se déduit en appliquant à la série au premier membre une transformation bien connue, due à EULER, et qui a fait l'objet d'étude de MM. E. LINDELÖF, FABRY et PRINGSHEIM. De la transformation d'EULER il résulte qu'on a

$$B_0 = A_0, \quad B_1 = A_1,$$

$$B_{\nu+1} = A_{\nu+1} - \binom{\nu}{1} A_\nu + \binom{\nu}{2} A_{\nu-1} + \cdots + (-1)^\nu A_1, \tag{17}$$

c'est à dire que $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sont les différences successives des nombres $A_1, A_2, A_3, \ldots$.

Il est maintenant facile de voir comment se comportent nos solutions canoniques pour des valeurs très grandes de x situées dans l'un ou l'autre des deux demi-plans de convergence. En effet une fonction, représentée par une série de facultés, tend uniformément vers le terme constant de la série quand la variable x tend vers l'infini en restant dans le domaine de convergence de la série.[1] D'autre part on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Gamma(x)\, x^\beta}{\Gamma(x+\beta)} = 1, \quad \pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon,$$

x tendant vers l'infini en s'éloignant infiniment de l'axe des nombres négatifs.

Les développements (14) et (16) nous permettent donc de conclure qu'on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} x^{\beta_s+1}\, u_s(x) = \frac{A_0}{\Gamma(-\beta_s)}, \qquad \frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{\pi}{2}, \tag{18}$$

$$\lim_{x=\infty} x^{\beta_s+1}\, \bar{u}_s(x) = \frac{A_0}{\Gamma(-\beta_s)}, \qquad -\frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{3\pi}{2}, \tag{19}$$

x tendant vers l'infini en restant respectivement dans le demi-plan $\Re(x-\alpha_1) > 0$ et dans le demi-plan $\Re(x-\gamma_p) < 0$.

§ 6. Examinons quelques cas d'exception. Supposons d'abord que β_s soit égal à un entier non-négatif et qu'aucun des autres nombres $\beta_1, \ldots, \beta_k$ ne soit égal à un entier. $v_s(t)$ est en ce cas de la forme

$$v_s(t) = (t-1)^{\beta_s}\,[\varphi_1(t) + \varphi(t)\log(t-1)].$$

[1] l. c. Sur les séries de facultés § 6, p. 347.

On trouve donc

$$u_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l t^{x-1} v_s(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l t^{x-1}(t-1)^{\beta_s}\log(t-1)\,\varphi(t)\,dt.$$

On peut remplacer le contour l par la droite de *zéro* à *un* parcourue deux fois et en sens inverse; les deux intégrales contenant le logarithme se détruisent et on trouve

$$u_s(x) = -\int\limits_0^1 t^{x-1}(t-1)^{\beta_s}\varphi(t)\,dt.$$

La forme de notre développement n'est donc pas altérée dans ce cas si la fonction $\varphi(t)$ est différente de zéro; mais si $\varphi(t) = 0$ l'intégrale de contour est identiquement nulle. Comme on sait, ce cas d'exception ne peut arriver que si l'on a $\beta_s \geqq p-k$; on peut alors remplacer la ligne l par la droite de *zéro* à *un*, car les termes tout intégrés (4) disparaissent pour $t = 1$.

Si β_s est un entier négatif et si en même temps $\varphi(t) = 0$,[1] la série de facultés ne contient qu'un nombre fini de termes. Le série (14) peut en ce cas s'écrire comme il suit:

$$u_s(x) = -\left\{A_0\binom{x-1}{-\beta_s-1} - A_1\binom{x-1}{-\beta_s-2} + A_2\binom{x-1}{-\beta_s-3}\cdots + (-1)^{\beta_s-1}A_{-\beta_s-1}\right\}. \quad (20)$$

Les autres cas d'exceptions qui se présentent seront discutés dans le chapitre suivant.

L'avantage des développements que nous venons d'étudier consiste surtout en ce qu'ils nous montrent comment se comportent les solutions au voisinage du point à l'infini qui, en général, est un point essentiel pour ces fonctions. Mais ils représentent les solutions seulement dans un certain demi-plan.

Nous allons maintenant faire voir comment on peut prolonger analytiquement les $u_s(x)$ dans toute partie finie du plan.

Développement en série de fractions rationnelles.

§ 7. Nous supprimons maintenant les conditions restrictives imposées plus haut aux nombres β_s. La solution $v_s(t)$ appartenant à β_s peut donc contenir

[1] Ces deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour que $u_s(x)$ soit un polynome en x.

des logarithmes ou non. Prolongeons $v_s(t)$ analytiquement le long de l'axe des nombres positifs jusqu'au point $t=0$; on trouve une expression de la forme (8), $c_1, c_2, \ldots, c_p$ étant des constantes qu'on sait déterminer. Les fonctions $\psi_{i,n}(t)$ se développent en séries de puissances de la forme

$$\psi_{i,n}(t) = A_{i,0}^{(n)} + A_{i,1}^{(n)} t + A_{i,2}^{(n)} t^2 + A_{i,3}^{(n)} t^3 + \cdots \quad (n = 0, 1, \ldots, r),$$

qui sont convergentes pour $|t| < 1$. L'un au moins des nombres $A_{i,0}^{(n)}$ $(n=0, 1, \ldots, r)$ est différent de zéro. En prolongeant $v_s(t)$ le long d'un contour qui arrive au point $t=0$ après une rotation autour du point $t=1$ dans le sens positif on trouve une expression de la même forme, seulement il faut remplacer les constantes c_i par d'autres constantes que nous désignerons par c'_i. Supposons d'abord que la partie réelle de β_s soit supérieure à -1. On peut dans l'intégrale (12) remplacer le contour l par la droite de 0 à 1 parcourue deux fois et en sens inverse. Substituons dans cette intégrale les développements (8) et intégrons terme par terme; on trouve la série de fractions rationnelles:

$$u_s(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{i=p} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (c_i - c'_i) \left\{ \frac{A_{i,\nu}^{(0)}}{x - \alpha_i + \nu} - \frac{A_{i,\nu}^{(1)}}{(x-\alpha_i+\nu)^2} + \cdots + \right.$$
$$\left. + (-1)^r \frac{r!\, A_{i,\nu}^{(r)}}{(x-\alpha_i+\nu)^{r+1}} \right\}. \tag{21}$$

Les coefficients dans le développement en série de puissances de $v_s(t)$ au voisinage de $t=0$ nous donnent donc immédiatement les coefficients dans le développement de $u_s(x)$ en série de fractions rationnelles. Si $\Re(x-\alpha_1) > 0$, et si la série (21) est convergente, les conditions, pour que l'intégration terme par terme soit légitime, sont satisfaites. L'ordre des fonctions $\psi_{i,n}(t)$ $(n=0, 1, \ldots, r)$ sur le cercle de convergence $|t|=1$ est égal à $-\Re(\beta_s)$; on sait donc trouver un nombre positif M tel qu'on ait pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left| A_{i,\nu}^{(n)} \right| < \frac{M}{(1+\nu)^{\Re(\beta_s)+1-\varepsilon}} \qquad (n=0, 1, \ldots, r)$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. Soit Γ un domaine fini quelconque duquel on a exclu les points $\alpha_i, \alpha_i - 1, \alpha_i - 2, \ldots$ par des petits cercles; on sait trouver un nombre positif N tel qu'on ait pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left| \frac{\nu + 1}{x - \alpha_i + \nu} \right| < N$$

quel que soit x dans Γ.

En ramplaçant dans le développement (21) le module de chaque terme par les limites supérieures qu'on vient de donner on trouve l'inégalité

$$|u_s(x)| < \sum_{i=0}^{i=p} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (|c_i| + |c'_i|) \frac{MN}{(\nu+1)^{\Re(\beta_s)+2-\varepsilon}} \left\{1 + \frac{N}{\nu+1} + \cdots + \frac{r!\, N^r}{(\nu+1)^r}\right\}.$$

La série au second membre est convergente parce que par hypothèse $\Re(\beta_s) > -1$. La série (21) est par conséquent absolument et uniformément convergente dans le domaine Γ. Cette série nous donne un prolongement anlytique de la solution $u_s(x)$ dans tout le plan et on voit que $u_s(x)$ est une fonction méromorphe de x.

Si la partie réelle de β_s est inférieure à -1, la série de fractions rationnelles, obtenue en intégrant formellement terme par terme, est divergente. Soit q un entier positif tel que $\Re(\beta_s + q) > -1$; on sait, dans ce cas, trouver deux polynômes $f_{q-1}(x)$ et $f_q(x)$ respectivement du degré $q-1$ et q et tels que la fonction

$$\frac{u_s(x) - f_{q-1}(x)}{f_q(x)},$$

admet un développement de la forme (21). Pour le détail de la démonstration je renverrai le lecteur aux pag. 27—28 de ma Thèse.

Les solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ dans notre premier système canonique de solutions sont donc, quelles que soient les valeurs des nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, des fonctions méromorphes de x, admettant une représentation de la forme du second membre de (21), *multiplié par un polynôme convenablement choisi. Les pôles de ces fonctions sont*

$$\alpha_i,\ \alpha_i - 1,\ \alpha_i - 2,\ \alpha_i - 3, \ldots, (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les $\alpha_i + k$ étant les zéros du coefficient de $\Delta_{-1}^k u(x)$ dans l'équation (1). *Si $\alpha_i + k$ est un zéro simple qui ne diffère par un entier d'aucun des autres zéros, les pôles $\alpha_i, \alpha_i - 1, \alpha_i - 2, \ldots$ sont tous simples. Si $\alpha_i + k$ est un zéro d'ordre n, les pôles $\alpha_i, \alpha_i - 1, \alpha_i - 2, \ldots$ sont d'ordre de multiplicité n au moins.*

§ 8. Considérons maintenant les solutions $u(x)$. Les fonctions $\psi_{i,n}(t)$ dans l'expression (9) se développent en séries de puissances

$$\psi_{i,n}(t) = B_{i,0}^{(n)} + \frac{B_{i,1}^{(n)}}{t} + \frac{B_{i,2}^{(n)}}{t^2} + \cdots, \quad (n = 0, 1, \ldots, r),$$

convergentes pour $|t| > 1$. Substituons ces développements dans l'intégrale (13)

et intégrons terme par terme; on trouve, si la partie réelle de β_s est supérieure à -1, une série de fractions rationnelles de la forme

$$\overline{u}_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=0}^{i=p}\sum_{n=0}^{n=r}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(c_i - c'_i)\frac{B_{i,\nu}^{(n)}\,n!}{(x-\gamma_i-\nu)^{n+1}}. \tag{22}$$

Si $\Re(\beta_s) < -1$ il faut diviser $u_s(x)$ par un polynôme convenablement choisi et le quotient admet un développement de la même forme.

Les solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ *dans le second système canonique sont des fonctions méromorphes de* x *admettant pour pôles les points*

$$\gamma_i,\ \gamma_i+1,\ \gamma_i+2,\ \gamma_i+3, \ldots, \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les γ_i *étant les zéros du coefficient de* $\Delta^k U(x)$ *dans l'équation aux différences* (10). Il est naturel de convenir de dire que les solutions $\overline{u}(x)$ appartiennent à l'équation (10) et que les solutions $u(x)$ appartiennent à l'équation (1).

Nous avons maintenant vu: d'une part, comment se comportent nos solutions canoniques dans toute partie finie du plan et d'autre part comment elles se comportent quand x tend vers l'infini en restant dans un certain angle d'ouverture π.

Pour compléter nos résultats il nous reste à faire voire comment elles se comportent asymptotiquement quand x sort de cet angle. Nous traiterons plus loin ce problème pour une classe plus générale d'équations aux différences dont nous allons maintenant aborder l'étude.

CHAPITRE II.

Formation de deux systèmes fondamentaux de solutions.

§ 9. Nous préferons écrire ces équations sous la forme

$$\sum_{i=0}^{i=k} p_i(x)\,u(x+i) = 0, \tag{1}$$

et nous ferons relativement aux coefficients $p_i(x)$ l'hypothèse suivante. Nous supposerons qu'ils sont des polynômes en x de degré p mais d'ailleurs quelconques.

Plus précisement nous supposerons que le degré de $p_0(x)$ et de $p_k(x)$ est égal à p et que les degrés des autres coefficients sont inférieurs ou égaux à p. L'entier positif p peut être $\gtreqless k$.

Cette classe d'équations embrasse comme cas particulier celle que nous venons d'étudier. En effet, en écrivant l'équation (1) (Chap. I) sous la forme précitée, on verra que les coefficients $p_i(x)$ sont des polynômes du degré p; mais ces polynômes ne sont pas indépendants l'un de l'autre, il existe entre leurs coefficients des relations particulières dont nous avons tiré partie dans le chapitre précédent.

Dans le cas actuel nous écrivons les coefficients $p_i(x)$ de l'équation aux différences sous la forme suivante

$$p_i(x) = \sum_{s=0}^{s=p} C_{i,s}(x+i)(x+i+1)\ldots(x+i+s-1) \qquad (i=0, 1, \ldots, k). \tag{2}$$

On a, par hypothèse, $C_{0,p} \neq 0$, $C_{k,p} \neq 0$, mais les $C_{i,s}$ sont d'ailleurs des nombres complexes quelconques.

Posons

$$u(x) = \int t^{x-1} v(t)\, dt, \tag{3}$$

$v(t)$ étant une fonction de t mais indépendante de x. Essayons, s'il est possible, de déterminer la fonction $v(t)$ et une ligne d'intégration de sorte que $u(x)$ soit une solution de l'équation (1). En intégrant par partie on trouve

$$x(x+1)\ldots(x+s)\,u(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=s} (-1)^{\nu}(x+\nu+1)(x+\nu+2)\ldots(x+s\, t^{x+\nu}\frac{d^{\nu} v(t)}{dt^{\nu}} +$$

$$+ (-1)^{s+1} \int t^{x+s} \frac{d^{s+1} v(t)}{dt^{s+1}}\, dt.$$

On a, par conséquent, l'identité suivante

$$\sum_{i=0}^{i=k} p_i(x)\, u(x+i) = V(x, t) + \int t^{x-1} \sum_{i=0}^{i=p} (-t)^i Q_i(t) \frac{d^i v(t)}{dt^i}\, dt, \tag{4}$$

où nous avons posé

$$Q_i(t) = \sum_{s=0}^{s=k} C_{s,i}\, t^s, \qquad (i=0, 1, \ldots, p),$$

$$V(x, t) = \sum_{i=0}^{i=p-1} \sum_{s=0}^{s=p-i-1} (-1)^i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \frac{d^s [t^{x+i+s} Q_{i+s+1}(t)]}{dt^s}. \tag{5}$$

En choisissant $v(t)$ comme une solution de l'équation différentielle

$$\sum_{i=0}^{i=p} (-t)^i Q_i(t) \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0, \tag{6}$$

on voit que $u(x)$ est une solution de l'équation (1), si l'on prend pour chemin d'intégration une ligne telle que $V(x, t)$ s'annule à ses deux extrémités ou un contour fermé tel que $V(x, t)$ reprenne sa valeur initiale quand on revient au point de départ. Nous appelerons $Q_p(t) = 0$ *l'équation caractéristique* de l'équation aux différences (1). On remarque que les coefficients de cette équation sont les coefficients des termes du degré maximal dans $p_0(x), \ldots, p_k(x)$. C'est une équation algébrique du degré k dont toutes les racines sont différentes de zéro, car on a $C_{0,p} \neq 0$, $C_{k,p} \neq 0$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ces racines et posons

$$a_s = \varrho_s e^{i\zeta_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

Supposons que les a_s ont été numérotées de sorte qu'on ait

$$0 \leqq \zeta_1 \leqq \zeta_2 \leqq \cdots \leqq \zeta_k < 2\pi.$$

Si l'on a $\zeta_s = \zeta_{s+1}$, on suppose que $\varrho_s \leqq \varrho_{s+1}$.

§ 10. L'équation différentielle (6) admet les points singuliers $t = 0$ et $t = \infty$, qui sont des points singuliers réguliers, et les points $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Si a_i est une racine simple de l'équation caractéristique, a_i est un point singulier régulier de l'équation différentielle. Au voisinage de a_i il existe $(p-1)$ solutions holomorphes et une solution de la forme

$$(t - a_i)^{\beta_i} \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ étant une fonction holomorphe au voisinage de $t = a_i$.

Si a_i est n fois racine de l'équation caractéristique deux cas essentiellement différents se présentent.

1°. a_i est $(n-s)$ fois racine dans l'équation $Q_{p-s}(t) = 0$ et cela est vrai pour $s = 0, 1, \ldots, n-1$; a_i est alors un point singulier régulier de notre équation différentielle.

2°. a_i est un point singulier irrégulier.

Nous réserverons l'étude de ce dernier cas pour le § 16; nous supposerons donc pour le moment que a_i soit un point singulier régulier[1] de l'équation différentielle.

L'équation déterminante relative au point a_i admet les racines

$$\beta_{1,i},\ \beta_{2,i},\ \ldots,\ \beta_{n,i},\ 0,\ 1,\ \ldots,\ p-n-1. \tag{7}$$

Il correspond à ces racines p solutions indépendantes de l'équation (6); nous les désignerons par $v_{1,i}, v_{2,i}, \ldots, v_{p,i}$. Les $(p-n)$ dernières de ces solutions sont holomorphes au voisinage de a_i; les n autres solutions sont en général non-holomorphes.

On peut les former par les méthodes de L. Fuchs et de M. Frobenius. Résumons brièvement les principaux résultats obtenus par M. Frobenius relativement à ces solutions.

Les racines $\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \ldots, \beta_{n,i}$ se répartissent en différents groupes de sorte que toutes les racines qui sont différentes l'une de l'autre par un entier, se trouvent dans un même groupe.

Supprimons pour un moment, pour abréger l'écriture, le second indice i et soit $\beta_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+m-1}$ les membres d'un tel groupe. Supposons qu'on les affecte de numéros tels que l'on ait:

$$\Re(\beta_s) \geq \Re(\beta_{s+1}) \geq \Re(\beta_{s+2}) \geq \cdots$$

Soit $\beta_s, \beta_{s+h}, \beta_{s+j}, \beta_{s+k}, \ldots, \beta_{s+l}$ celles de ces racines qui sont distinctes. Soit β_s h fois racine, soit β_{s+h} $(j-h)$ fois racine, soit β_{s+j} $(k-j)$ fois racine etc. On répartit les racines en sous-groupes de la manière suivante. Dans le premier sous-groupe on place $\beta_s = \beta_{s+1} = \cdots = \beta_{s+h-1}$; dans le deuxième sous-groupe on place $\beta_{s+h} = \beta_{s+h+1} = \cdots = \beta_{s+j-1}$; dans le troisième sous-groupe on place $\beta_{s+j} = \beta_{s+j+1} = \cdots = \beta_{s+k-1}$ etc.

A la plus grande[2] racine $\beta_s = \beta_{s,i}$ de notre groupe il appartient une solution de l'équation (6) de la forme

$$v_{s,i} = (t-a_i)^{\beta_{s,i}}\varphi(t), \tag{8}$$

$\varphi(t)$ étant holomorphe et différente de zéro dans le point $t = a_i$.

[1] L'équation caractéristique de l'équation aux différences étudiée dans le chapitre I est $(t-1)^k = 0$. Toutes les a_i coïncident dans le point $t = 1$ et ce point est un point singulier régulier de l'équation différentielle.

[2] C'est à dire à la racine dont la partie réelle est la plus grande.

A une racine quelconque $\beta_{s+r,i}$ de notre groupe il appartient une solution de la forme

$$v_{s+r,i} = \frac{\partial^r}{\partial \beta_{s+r,i}^r}[(t-a_i)^{\beta_{s+r,i}}\varphi(t)] =$$

$$= (t-a_i)^{\beta_{s+r,i}}\{\varphi_0(t) + \varphi_1(t)\log(t-a_i) + \cdots + \varphi_r(t)\log^r(t-a_i)\}, \tag{9}$$

$\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de a_i. A chaque racine de notre groupe il appartient ainsi une solution non-holomorphe de l'équation différentielle, et ces solutions se trouvent rangées en groupes et sous-groupes de la même manière que les racines.

Si $v_{s+r,i}$ appartient au premier sous-groupe on a $\varphi_r(a_i) \neq 0$. Si $v_{s+r,i}$ appartient au deuxième sous-groupe on a $\varphi_{r-h}(a_i) \neq 0$ et $\varphi_{r-h+1}(a_i) = \cdots = \varphi_r(a_i) = 0$. Si $v_{s+r,i}$ appartient au troisième sous-groupe on a $\varphi_{r-j}(a_i) \neq 0$ et $\varphi_{r-j+1}(a_i) = \cdots = \varphi_r(a_i) = 0$ etc.

Au voisinage de $t=0$ l'équation (6) admet p solutions $v_{1,0}, v_{2,0}, \ldots, v_{p,0}$ qui sont de la forme

$$v_{s,0} = \frac{\partial^r[t^{-\alpha_s}\psi(t)]}{\partial(-\alpha_s)^r} = t^{-\alpha_s}\{\psi_0(t) + \psi_1(t)\log t + \cdots + \psi_r(t)\log^r t\}, \tag{10}$$

$\psi_0(t), \ldots, \psi_r(t)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de $t=0$ et α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant les zéros de $p_0(x)$. Au voisinage de $t=\infty$ l'équation (6) admet p solutions $v_{1,\infty}, v_{2,\infty}, \ldots, v_{p,\infty}$ qui sont de la forme.

$$v_{s,\infty} = \frac{\partial^r[t^{-\gamma_s}\psi(t)]}{\partial\gamma^r} = t^{-\gamma_s}\left\{\psi_0(t) + \psi_1(t)\log\left(\frac{1}{t}\right) + \cdots + \psi_r(t)\log^r\left(\frac{1}{t}\right)\right\}. \tag{11}$$

$\psi_0(t), \ldots, \psi_r(t)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de $t=\infty$, et $\gamma_1 - k, \ldots, \gamma_p - k$ étant les zéros de $p_k(x)$. Nous supposerons que les α_s et les γ_s ont été répartis en groupes et qu'elles soient numérotées de la manière indiquée dans le § 2.

Il faut donner à l'entier non-négatif r une valeur égale au nombre des racines plus grandes que $-\alpha_s$ (γ_s) qui figurent dans le même groupe que $-\alpha_s$ (γ_s).

§ 11. Cela posé, nous pouvons fixer la ligne d'intégration dans l'intégrale (3). Dessinons des coupures rectilignes des points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ à l'infini dans le prolongement des rayons vecteurs respectives et une coupure rectiligne de zéro à a_i.

Soit $v_{q,i}$ une des solutions non-holomorphes au voisinage de a_i. Dans le plan ainsi découpé la fonction $t^{x-1}v_{q,i}$ est uniforme. J'appelle bord gauche d'une coupure celui qu'on a sur la main gauche quand on chemine sur la coupure dans la direction vers l'infini. Soit l_i une ligne d'intégration partant de l'origine le long du bord droit de la coupure $(0, a_i)$ et y revenant le long du bord gauche, après avoir entouré le point $t = a_i$ dans le sens direct et en laissant à son extérieur tous les autres points singuliers $a_1, \ldots, a_k$. Soit L_i une ligne d'intégration partant de l'infini le long du bord gauche de la coupure (a_i, ∞) et y revenant le long du bord droit, après avoir entouré le point $t = a_i$ dans le sens direct et en laissant à son extérieur tous les autres points singuliers. Posons

$$u_{q,i}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_i} t^{x-1} v_{q,i}\, dt, \tag{12}$$

$$\bar{u}_{q,i}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_i} t^{x-1} v_{q,i}\, dt. \tag{13}$$

La première intégrale est absolument convergente et la fonction $V(x, t)$, déterminée par l'expression (5), s'annule aux deux extrémités de la ligne d'intégration l_i, si $\Re(x - \alpha_1) > 0$. L'intégrale définit donc une solution de l'équation (1) dans ce domaine.

De même on voit que $V(x, t)$ s'annule aux deux extrémités de la ligne L_i, si $\Re(x - \gamma_p + k) < 0$; mais la seconde intégrale est absolument convergente dans le demi-plan $\Re(x - \gamma_p) < 0$, elle définit donc une solution de l'équation (1) dans ce domaine. Pour définir complètement ces deux solutions admettons que l'argument de $t - a_i$ augmente de $\zeta_i - \pi$ à $\zeta_i + \pi$ quand t se meut le long de la ligne l_i et de ζ_i à $\zeta_i + 2\pi$ quand t se meut le long de ligne L_i. Pour l'argument de t on adoptera la valeur qui est égale à ζ_i le long des parties rectilignes des chemins d'intégrations.

Convenons de dire que les deux solutions ainsi définies appartiennent au nombre $\beta_{q,i}$. En prenant pour $v_{q,i}$ successivement toutes les solutions non-holomorphes au voisinage des points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ on obtiendra k solutions $u(x)$, que nous nommerons *le premier système canonique de solutions*, et k solutions $\bar{u}(x)$, que nous nommerons *le second système canonique de solutions*, k étant l'ordre de l'équation aux différences. Ces solutions se trouvent rangées en différents groupes et sous-groupes de la même manière que les nombres $\beta_{q,i}$.

Développements en séries. Propriétés analytiques des solutions.

§ 12. Pour étudier comment se comportent ces solutions aux environs de leurs points singuliers nous allons former différents développements en séries. Les plus importants d'entre eux sont les développements en séries de facultés. Considérons l'intégrale (12) et supposons d'abord que $v_{q,i}$ soit de la forme (8). $\varphi(t)$ se développe en série de puissances aux environs de $t = a_i$; cette série n'étant pas, en général, convergente le long de la ligne l_i on ne peut pas intégrer terme par terme[1] comme dans le chapitre précédent. Mais effectuons le changement de variable $t = a_i z$; on trouve une intégrale relativement à laquelle j'ai demontré[2] qu'elle se représente par une série de la forme

$$u_{q,i}(x) = a_i^{\frac{x}{\omega}} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega} + \beta_{q,i} + 1\right)} \Omega(x, \beta_{q,i}), \tag{14}$$

où

$$\Omega(x, \beta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \frac{(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + \nu)\omega^\nu}{(x + \omega\beta + \omega)(x + \omega\beta + 2\omega)\ldots(x + \omega\beta + \nu\omega)}; \tag{15}$$

cette série de facultés est absolument convergente pour $\Re(x - \alpha_1) > 0$ et divergente pour $\Re(x - \alpha_1) < 0$. Les coefficients A_ν sont indépendants de x; A_ν se compose linéairement des $\nu + 1$ premiers coefficients du développement de $\varphi(t)$ en séries de puissances aux environs de $t = a_i$.

Les A_ν peuvent donc se tirer des coefficients de l'équation aux différences (1) par des *opérations algébriques*. Remarquons en particulier que A_0 est égal à $\varphi(a_i)$ multiplié par une constante non-nulle; A_0 est donc différent de zéro, parce que par hypothèse $\varphi(a_i) \neq 0$.

[1] Dans ma Thèse j'ai démontré que la série de facultés divergente, obtenue en intégrant formellement terme par terme, représente asymptotiquement $u_{q,i}(x)$ dans l'angle $\frac{\pi}{2} - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, ε étant > 0. Cette série peut donc rendre quelque service dans l'étude de la valeur asymptotique de $u_{q,i}(x)$; elle est plus facile à former que la série (14) mais elle lui est inférieure sur un point important. Dans ce qui va suivre il est très important de savoir qu'elle est la valeur asymptotique de $u_{q,i}(x)$ quand x tend vers l'infini le long d'une ligne perpendiculaire à l'axe des abscisses. Or la série divergente ne permet rien de conclure relativement à cette valeur. Le développement convergent (14), au contraire, donne cette valeur avec autant d'approximation que l'on veut.

[2] l. c. Sur les séries de facultés. § 11, p. 364.

ω est un nombre positif qu'il faut choisir suffissamment grand pour assurer la convergence de la série. Le second membre de (14) ne dépend qu'apparemment de ω, mais il a été nécessaire d'introduire ce paramètre pour faire converger la série (15).

En raisonnant exactement comme dans le § 5, et en appliquant la transformation d'EULER, on trouve pour l'intégrale (13) un développement de la forme

$$\bar{u}_{q,i}(x) = a_i^x \frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \beta_{q,i}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)} e^{\pi i(\beta_{q,i}+1)} \bar{\Omega}(x, \beta_{q,i}), \tag{16}$$

où

$$\Omega(x, \beta) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} B_\nu \frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+\nu)\omega^\nu}{(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-\nu\omega)}, \tag{17}$$

la série de facultés étant absolument convergente, si $\Re(x-\gamma_p) < 0$. Il est supposé que ω ait été choisi suffisamment grand pour que les séries (15) et (17) soient toutes les deux convergentes dans les domaines indiqués. On voit, de la même manière que plus haut, que les coefficients B_ν et A_ν sont liés par les relations (17) Chapitre I, c'est à dire que $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sont les différences successives de $A_1, A_2, A_3, \ldots$; en particulier on a $B_0 = A_0$.

Les développements (14) et (16) nous montrent que $u(x)$ et $\bar{u}(x)$ sont des fonctions analytiques, holomorphes respectivement dans le demi-plan $\Re(x-\alpha_1) > 0$ et dans le demi-plan $\Re(x-\gamma_p) < 0$.

A cause de la convergence uniforme[1] de la série de facultés ces développements nous permettent d'apprécier avec autant d'approximation que l'on veut comment se comportent $u(x)$ et $\bar{u}(x)$ pour des valeurs très grandes de x, situées dans les domaines de convergence. En se bornant au premier terme de l'expression asymptotique on voit qu'on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} a_i^{-x} x^{\beta_{q,i}+1} u_{q,i}(x) = k, \qquad \frac{\pi}{2} \geq \operatorname{Arg} x \geq -\frac{\pi}{2}, \tag{18}$$

$$\lim_{x=\infty} a_i^{-x} x^{\beta_{q,i}+1} \bar{u}_{q,i}(x) = k, \quad -\frac{\pi}{2} \geq \operatorname{Arg} x \geq -\frac{3\pi}{2}, \tag{19}$$

k étant une constante qui est différente de zéro, x tendant vers l'infini en restant respectivement dans le demi-plan $\Re(x-\alpha_1) > 0$ et dans le demi-plan $\Re(x-\gamma_p) < 0$.

[1] l. c. Sur les séries de facultés, p. 346.

§ 13. Considérons maintenant le cas où $v_{q,i}$ soit de la forme (9). Dans le Mémoire souvent cité on a démontré qu'en ce cas $u_{q,i}(x)$ se développe en série de la forme

$$u_{q,i}(x) = a_i^x \sum_{s=0}^{s=r} \Omega_s(x) \frac{\partial^s}{\partial \beta_{q,i}^s} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega} + \beta_{q,i} + 1\right)} \right], \tag{20}$$

où

$$\Omega_s(x) = A_0^{(s)} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{A_{\nu+1}^{(s)}}{x(x+\omega)\ldots(x+\nu\omega)}, \qquad (s = 0, 1, \ldots, r) \tag{21}$$

ω étant convenablement choisi; les séries de facultés $\Omega_0(x), \ldots, \Omega_r(x)$ sont convergentes, pourvu que l'on ait:

$$\Re(x + \alpha_1) > 0, \ \Re(x) > 0, \ \Re\left(\frac{x}{\omega} + \beta_{q,i} + 1\right) > 0. \tag{22}$$

Soit dans l'expression (9) $\varphi_s(a_i) \neq 0$ et soit $0 = \varphi_{s+1}(a_i) = \varphi_{s+2}(a_i) = \cdots = \varphi_r(a_i)$. Il résulte de la démonstration à l'endroit cité qu'on a $A_0^{(s)} \neq 0$ et $0 = A_0^{(s+1)} = A_0^{(s+2)} = \cdots = A_0^{(r)}$. Cela posé, le développement (20) permet de calculer la valeur asymptotique de $u_{q,i}(x)$; on a, en effet, uniformément[1]

$$\lim_{x=\infty} \frac{\frac{\partial^s}{\partial \beta^s} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta)}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\beta \log^s \left(\frac{1}{x}\right)} = 1. \tag{23}$$

Considérons le groupe de solutions $u_{s,i}(x), u_{s+1,i}(x), \ldots, u_{s+m-1,i}(x)$ qui appartiennent au groupe de racines dont a été question dans le § 10.

Supprimons, pour abréger l'écriture, le second indice i.

Pour les solutions $u_s(x), u_{s+1}(x), \ldots, u_{s+h-1}(x)$ dans le premier sous-groupe on a uniformément:

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_{s+r}(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_s+1} \log^r \left(\frac{1}{x}\right)} = k_1, \ (r = 0, 1, \ldots, h-1); \ \frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{\pi}{2}, \tag{24}$$

k_1 étant une constante qui est différente de zéro, x tendant vers l'infini en restant à l'intérieur du domaine de convergence des séries (21).

[1] l. c. Sur les séries de facultés, p. 368.

Pour les solutions $u_{s+h}(x), u_{s+h+1}(x), \ldots, u_{s+j-1}(x)$ dans le deuxième sous-groupe on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_{s+h+r}(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_{s+h+1}} \log^r \left(\frac{1}{x}\right)} = k_2, \ (r = 0, 1, \ldots, j-h-1); \ \frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{\pi}{2}, \qquad (25)$$

k_2 étant une nouvelle constante, qui est différente de zéro, x tendant vers l'infini sous la même hypothèse que plus haut. Pour les solutions $u_{s+j}(x)$, $u_{s+j+1}(x), \ldots, u_{s+k-1}(x)$ dans le troisième sous-groupe on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_{s+j+r}(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_{s+j+1}} \log^r \left(\frac{1}{x}\right)} = k_3, \ (r = 0, 1, \ldots, k-j-1); \ \frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{\pi}{2}, \qquad (26)$$

etc.

On a donc toujours pour deux solutions appartenant au même groupe

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_n(x)}{u_{n+1}(x)} = 0.$$

Ce résultat nous permet de conclure à l'indépendance linéaire de nos solutions. On a, en effet, le théorème suivant:[1]

Soit une suite de fonctions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ finies et différentes de zéro pour toute valeur finie et positive de x qui surpasse une certaine valeur N. Supposons que le rapport $\eta_n(x) = u_n(x) : u_{n+1}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots, k-1)$, ou bien tend vers zéro quand x tend vers l'infini le long de l'axe des nombres positifs, ou bien reste compris entre des limites finies. Dans ce dernier cas on suppose que les nombres $\eta_n(\alpha), \eta_n(\alpha+1), \eta_n(\alpha+2), \ldots$ forment un ensemble dont la dérivée contient une infinité d'éléments, α étant un nombre quelconque supérieur à N. Cela étant, il n'existe aucune relation linéaire de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=k} \pi_i(x)\, u_i(x) = 0,$$

les $\pi_i(x)$ étant des fonctions périodiques satisfaisant à la condition $\pi_i(x) = -\pi_i(x+1)$.

De ce qui précède, il résulte que les k solutions formant notre pre-

[1] On trouve la démonstration de ce théorème dans mon Mémoire: Sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies par des séries de facultés. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. 35, p. 198, 1913.

mier système canonique peuvent être numérotées de sorte que le rapport $r_n(x) = u_n(x) : u_{n+1}(x)$, pour $n = 1, 2, \ldots, k-1$, tend vers zéro quand x tend vers l'infini. Il y a exception seulement, s'il y a deux nombres $\beta_{m,i}$ et $\beta_{n,j}$ qui ont la même partie réelle et si en même temps $|a_i| = |a_j|$.

En ce cas on a

$$\frac{u_{m,i}(x)}{u_{n,j}(x)} = e^{\sqrt{-1}\,(\gamma x + \delta \log x)} \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui tend vers une limite finie et non-nulle quand x tend vers $+\infty$ et γ et δ étant des nombres réels. Les conditions du théorème sont toujours satisfaites à moins que δ ne soit égal à zéro et que γ ne soit de la forme $\frac{2\pi}{p}$, p étant un entier; c'est ce qui arrive, si $\beta_{m,i} = \beta_{n,j}$ et si en même temps $a_i : a_j$ est une racine d'unité. On discutera sans aucune difficulté ce cas, et on verra que les $u_i(x)$ sont linéairement indépendantes même dans ce cas d'exception. *Notre premier système canonique de solutions forment donc un système fondamental de solutions.* Cela est vrai en particulier pour la classe de solutions étudiées dans le chapitre I.

§ 14. Pour les solutions $\bar{u}(x)$ on trouve des résultats du même ordre. En raisonnant comme plus haut on voit que, dans le cas où $v_{q,i}$ est de la forme (9), la solution $\bar{u}_{q,i}(x)$ se développe en série de la forme

$$\bar{u}_{q,i}(x) = a_i^x \sum_{s=0}^{s=r} \bar{\Omega}_s(x) \frac{\partial^s}{\partial \beta_{q,i}^s} \frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \beta_{q,i}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)}, \tag{27}$$

où

$$\bar{\Omega}_s(x) = B_0^{(s)} + \sum_{1}^{\nu=\infty} \frac{B_\nu^{(s)}}{(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-\nu\omega)}; \tag{28}$$

ω étant convenablement choisi, les séries de facultés sont convergentes pourvu que l'on ait: $\Re(x-\gamma_p) < 0$, $\Re(x-\omega) < 0$. Quand x tend vers l'infini en restant dans le demi-plan de convergence on trouve pour les $\bar{u}(x)$ les mêmes expressions asymptotiques que pour les $u(x)$. Par exemple, pour les solutions appartenant au premier sous-groupe de racines $\beta_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+h-1}$, on trouve

$$\lim_{x=\infty} \frac{\bar{u}_{s+r}(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_s+1} \log^r\left(\frac{1}{x}\right)} = k_1, \quad (r = 0, 1, \ldots, h-1); \quad -\frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{3\pi}{2}, \tag{29}$$

k_1 étant la même constante que dans l'égalité (24).

Ces expressions asymptotiques permettent en particulier de conclure que *les k solutions $u(x)$ dans notre second système canonique forment un système fondamental de solutions.*

§ 15. On peut, si l'on veut, donner à l'expression (20) une forme légèrement différente en introduisant, au lieu des fonctions gamma et leurs dérivées, des puissances et des logarithmes de x. On a en effet:[1]

$$\frac{\partial^n}{\partial \beta^n}\left[\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta+1)}\right] = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta+1} \sum_{s=0}^{s=n} F_s(x) \log^s\left(\frac{1}{x}\right),$$

$F_0(x), \ldots, F_n(x)$ étant des fonctions développables en série de facultés. En introduisant ce développement dans l'expression (20) et en remarquant que le produit de deux séries de facultés se représente par une série de facultés, on trouve une expression de la forme

$$u_{q,i}(x) = a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_{q,i}+1} \sum_{s=0}^{s=r} \Phi_s(x) \log^s\left(\frac{1}{x}\right), \tag{30}$$

$\Phi_0(x), \ldots, \Phi_r(x)$ étant des fonctions développables en séries de facultés de la forme (21) qui sont convergentes pourvu que x satisfasse aux trois inégalités (22). Mais il convient de remarquer que le calcul effectif des coefficients dans les séries $\Phi_s(x)$ est de beaucoup plus difficile que le calcul des coefficients dans les séries $\Omega_s(x)$.

§ 16. Considérons maintenant quelques cas d'exception. Admettons qu'il y ait deux racines distinctes dans l'équation caractéristique qui ont le même argument. Soit, pour fixer les idées, a_i et a_{i+1} ces racines. Déformons les contours l_{i+1} et L_i au moyen de petits arcs de cercle de manière à éviter respectivement les points a_i et a_{i+1}. Les expressions (12) et (13) des solutions canoniques correspondantes restent valables, mais les développements (20) et (27) ne sont convergents pour aucune valeur positive de ω. Il faut dans ce cas donner à ω

[1] l. c. Sur les séries de facultés, p. 368.

une valeur complexe d'argument très petit positif ou négatif et de module suffisamment grand. Nos développements deviennent alors convergents,[1] seulement il faut remplacer les conditions de convergence $\Re(x-\alpha_1)>0$, $\Re(x-\gamma_p)<0$ par les conditions

$$\Re\left(\frac{x-\alpha_i}{\omega}\right)>0, \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$
$$\Re\left(\frac{x-\gamma_i}{\omega}\right)<0.$$

Ce cas d'exception ne présente donc pas de difficultés.

Examinons ensuite le cas où l'équation caractéristique admet une racine multiple a qui est un point singulier irrégulier de l'équation différentielle (6).

Cette équation admet au voisinage de a une solution de la forme

$$v(t)=(t-a)^{\beta}\varphi(t),$$

$\varphi(t)$ étant une fonction uniforme aux environs de $t=a$, qui peut se décomposer en deux parties $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$:

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t),$$

dont l'une est holomorphe au voisinage de a et l'autre se représente par un développement de la forme

$$\varphi_2(t)=\frac{B_1}{a-t}+\frac{B_2}{(a-t)^2}+\frac{B_3}{(a-t)^3}+\cdots.$$

La solution de notre équation aux différences

$$u(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_l t^{x-1}v(t)\,dt,$$

se décompose donc en deux parties dont la première admet un développement de la forme de celles que nous venons d'étudier; pour la seconde intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l t^{x-1}(t-a)^{\beta}\varphi_2(t)\,dt,$$

[1] l. c. Sur les séries de facultés, p. 369.

on trouve en intégrant terme par terme le développement

$$a^{x+\beta}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(x+\beta+1)}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{B_{\nu+1}}{a^{\nu+1}}\,\frac{(x+\beta)(x+\beta-1)\dots(x+\beta-\nu)}{\beta(\beta-1)\dots(\beta-\nu)},$$

qui est convergent dans tout le plan. La solution $u(x)$ se représente donc par un développement de la forme

$$u(x)=a^{x+\beta}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(x+\beta+1)}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}A_\nu\frac{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+\nu)\,\omega^\nu}{(x+\omega\beta+\omega)(x+\omega\beta+2\omega)\dots(x+\omega\beta+\nu\omega)}+\\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{B_{\nu+1}}{a^{\nu+1}}\,\frac{(x+\beta)(x+\beta-1)\dots(x+\beta-\nu)}{\beta(\beta-1)\dots(\beta-\nu)}\end{array}\right\}$$

la première série étant convergente sous les conditions indiquées plus haut, la dernière série étant convergente dans tout le plan. Ce développement joue pour nous un rôle semblable à celui que jouent dans la théorie des équations différentielles linéaires les séries de puissances contenant une infinité de puissances positives et négatives. Nous n'en ferons d'ailleurs aucun usage pour le moment; nous nous bornerons à une courte remarque relative à la manière dont se comporte $u(x)$ au voisinage de l'infini.

Traçons un cercle autour de l'origine avec le rayon $R>|a|$ et deux rayons vecteurs avec les arguments $\Theta-\varepsilon$ et $\Theta+\varepsilon$, où

$$a=|a|\,e^{i\Theta}.$$

Soit A et B les points d'intersection avec la circonférence

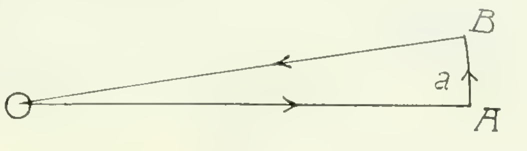


Fig. 2.

Remplaçons le lacet l par le contour $OABO$ et supposons que $v(t)$ soit holomorphe à l'intérieure et sur ce contour en exceptant le point $t=a$. Soit $t=\varrho e^{i\zeta}$, et posons

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi} R^x \int\limits_{\Theta-\varepsilon}^{\Theta+\varepsilon} e^{i\zeta x}\, v(R\, e^{i\zeta})\, d\zeta,$$

$$Q_2 = \frac{1}{2\pi i}\, e^{ix(\Theta-\varepsilon)} \int\limits_0^R \varrho^{x-1}\, v[\varrho e^{i(\Theta-\varepsilon)}]\, d\varrho,$$

$$Q_3 = -\frac{1}{2\pi i}\, e^{ix(\Theta+\varepsilon)} \int\limits_0^R \varrho^{x-1}\, v[\varrho e^{i(\Theta+\varepsilon)}]\, d\varrho,$$

on a

$$u(x) = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Soit $x = \sigma + i\tau$, et remarquons qu'on sait trouver un nombre positif M tel qu'on ait, le long de la ligne d'intégration, $|v(t)| < M$; on trouve les inégalités suivantes

$$|Q_1| < \frac{R^\sigma}{2\pi} M \int\limits_{\Theta-\varepsilon}^{\Theta+\varepsilon} e^{-\zeta\tau}\, d\zeta = \frac{M}{2\pi} R^\sigma\, e^{-\Theta\tau}\, \frac{e^{\varepsilon\tau} - e^{-\varepsilon\tau}}{\tau},$$

$$|Q_2| < \frac{M}{2\pi}\, e^{-\tau(\Theta-\varepsilon)} \int\limits_0^R \varrho^{\sigma-1}\, d\varrho = \frac{M}{2\pi\sigma}\, e^{\tau(\varepsilon-\Theta)} R^\sigma,$$

$$|Q_3| < \frac{M}{2\pi\sigma}\, e^{-(\Theta+\varepsilon)\tau} R^\sigma.$$

Soit μ un nombre dont le module est supérieur à R d'aussi peu qu'on veut et dont l'argument est égal à Θ

$$\mu = (R + \eta)\, e^{i\Theta}.$$

Faisons tendre x vers l'infini dans l'angle

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon' > \operatorname{Arg} x > -\frac{\pi}{2} + \varepsilon'.$$

Quelle que soit la valeur donnée de $\eta > 0$, on sait choisir ε suffisamment petit pour qu'on ait

$$\lim_{x=\infty} \mu^{-x} Q_1 = 0, \quad \lim_{x=\infty} \mu^{-x} Q_2 = 0, \quad \lim_{x=\infty} \mu^{-x} Q_3 = 0.$$

Il en résulte que l'on a

$$\lim_{x=\sigma} u(x)\,\mu^{-x} = 0\,.$$

Cela posé, soit η' un nombre positif, on voit qu'on sait trouver un nombre positif N tel que l'inégalité

$$e^{-\eta'\sigma} < \left|\frac{u(x)}{a^x}\right| < e^{\eta'\sigma},$$

soit satisfaite, pourvu que $\sigma > N$. On peut donc, si non indiquer la valeur asymptotique de $u(x)$, du moins se faire une idée sur l'ordre de grandeur de cette fonction quand σ tend vers l'infini.

§ 17. Jusqu'ici les solutions $u(x)$ ont été définies seulement dans le demi-plan $\Re(x-\alpha_1) > 0$, mais il est facile de les prolonger analytiquement. Soit b un point, situé sur le contour l_i et plus rapproché de l'origine que l'un quelconque des points singuliers $a_1, \ldots, a_k$. Soit l'_i un lacet avec les extrémités dans le point b et entourant le point a_i dans le sens direct. L'intégrale (12) peut se décomposer en deux parties

$$u_{q,i}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l'_i} t^{x-1} v_{q,i}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\sum_{s=1}^{s=p}(c_s - c'_s)\int_0^b t^{x-1} v_{s,0}\,dt;$$

c_s et c'_s étant des constantes. La première intégrale est une fonction entière, la seconde intégrale peut se développer en une série de la forme (21) chapitre I, multipliée par b^x.

Les k solutions $u(x)$ dans notre premier système canonique de solutions sont donc des fonctions méromorphes admettant pour pôles les points

$$\alpha_s,\ \alpha_s - 1,\ \alpha_s - 2, \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Les résidus dans les points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2, \ldots$ sont les coefficients dans le développement de $v_{s,0}$ au voisinage de l'origine. Ils satisfont donc à des formules de récursions faciles à former. Supposons pour plus de simplicité que $-\alpha_s$ soit une racine simple et que $v_{s,0}$ ne contient pas de logarithme. Soit A_0, A_1, $A_2, \ldots$ les résidus dans les points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2 \ldots$ On voit que ces quantités satisfont aux relations suivantes

$$A_1 p_0(\alpha_s - 1) + A_0 p_1(\alpha_s - 1) = 0,$$

$$A_2 p_0(\alpha_s - 2) + A_1 p_1(\alpha_s - 2) + A_0 p_2(\alpha_s - 2) = 0,$$

. . . .

$$A_\nu p_0(\alpha_s - \nu) + A_{\nu-1} p_1(\alpha_s - \nu) + \cdots + A_{\nu-k} p_k(\alpha_s - \nu) = 0,$$

. . . .

$p_0(x), \ldots, p_k(x)$ étant les coefficients dans l'équation aux différences (1).

De la même manière on voit que l'intégrale (13) peut se décomposer en deux parties dont l'une est une fonction entière pendant que l'autre se développe en une série de fractions rationnelles de la forme (22) chapitre I. *Les k solutions $u(x)$ dans notre second système canonique de solutions sont donc des fonctions méromorphes admettant pour pôles les points*

$$\gamma_s, \gamma_s + 1, \gamma_s + 2, \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Les résidus dans ces points sont les coefficients dans le développement de $v_{s,\infty}$ au voisinage du point à l'infini. Supposons que γ_s soit une racine dans l'équation déterminante telle que $v_{s,\infty}$ ne contienne pas de logarithme. Soit $B_0, B_1, B_2, \ldots$ les résidus dans les points $\gamma_s, \gamma_{s+1}, \gamma_{s+2}, \ldots$. Ces quantités satisfont aux relations suivantes

$$B_1 p_k(\gamma_s - k + 1) + B_0 p_{k-1}(\gamma_s - k + 1) = 0,$$

$$B_2 p_k(\gamma_s - k + 2) + B_1 p_{k-1}(\gamma_s - k + 2) + B_0 p_{k-2}(\gamma_s - k + 2) = 0,$$

. . . .

$$B_\nu p_k(\gamma_s - k + \nu) + B_{\nu-1} p_{k-1}(\gamma_s - k + \nu) + \cdots + B_{\nu-k} p_0(\gamma_s - k + \nu) = 0,$$

. . . .

Entre les expressions analytiques qui conviennent pour représenter nos solutions $u(x)$ on peut mentionner encore les séries de la forme

$$u_{i,q}(x) = a_i^x \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-s)}{s!};$$

pour ce qui concerne ces développements je me borne à renvoyer à ma Thèse p. 50—51.

Les développements déjà considérés suffisent pour l'étude des solutions au

voisinage de leurs points singuliers.[1] Avant d'aller plus loin dans cette étude nous allons chercher des relations linéaires à coefficients périodiques entre les $u(x)$ et les $\bar{u}(x)$.

CHAPITRE III.

Les relations linéaires entre les deux systèmes canoniques de solutions.

§ 18. On peut arriver à ces relations par deux voies différentes. La première consiste en une déformation de la ligne d'intégration dans l'intégrale (12) chapitre II. Dans cette intégrale on désigne par $v_{q,i}$ la branche de fonction avec laquelle on revient à l'origine après la rotation autour de a_i. Soit $v'_{q,i}\,(v'_{q,0})$ ce que devient $v_{q,i}\,(v_{q,0})$, après une rotation autour de $a_i(0)$ dans le sens direct.

Soit $v''_{q,i}\,(v''_{q,0})$ ce que devient $v_{q,i}\,(v_{q,0})$ après une rotation autour de $a_i(0)$ dans le sens indirect. Prolongeons analytiquement $v_{q,i}$, respectivement $v''_{q,i}$, le long du bord gauche de la coupure $(a_i, 0)$ jusqu'au point 0; on trouve des relations de la forme:

$$v_{q,i} = \sum_{s=1}^{s=p} c_{q,s}\, v_{s,0}\,, \qquad v''_{q,i} = \sum_{s=1}^{s=p} c''_{q,s}\, v_{s,0}, \tag{1}$$

$c_{q,s}$ et $c''_{q,s}$ étant des constantes qu'on sait déterminer.

Et inversement en prolongeant analytiquement $v_{s,0}$ le long du bord gauche de la coupure $(0, a_i)$ on trouve:

$$v_{s,0} = \sum_{n=1}^{n=p} d_{s,n}\, v_{n,i}; \tag{2}$$

les fonctions $v'_{s,0}$ et $v''_{s,0}$ s'expriment par des relations linéaires de la même forme; désignons les coefficients de celles-ci respectivement par $d'_{s,n}$ et par $d''_{s,n}$.

[1] Les égalités asymptotiques, indiquées plus haut, se trouvent démontrées pourvu que x tende vers l'infini en restant dans un certain demi-plan $\Re(x) > k$. On peut, sans faire intervenir les relations linéaires à coefficients périodiques, généraliser un peu ce résultat. On a

$$u(x) = -\sum_{i=1}^{i=k} \frac{p_i(x)}{p_0(x)}\, u(x+i).$$

On sait comment la fonction au second membre se comporte asymptotiquement dans le demi-plan $\Re(x) > k - 1$. Notre expression asymptotique de $u(x)$ reste donc valable dans ce demi-plan. En reprenant ce raisonnement un nombre quelconque de fois on voit que les expressions asymptotiques, trouvées plus haut pour les solutions canoniques, restent vraies *quand x tend vers l'infini le long d'une droite quelconque parallèle à l'axe des nombres purement imaginaires.*

Cela posé, supposons pour un moment que tous les nombres $\beta_{1,i}, \ldots, \beta_{q,i}, \ldots, \beta_{p,i}$ ont la partie réelle supérieure à -1.

On peut remplacer le contour l_i par la droite de o à a_i parcourue deux fois et en sens inverse; on trouve

$$u_{q,i}(x) = \int_0^{a_i} t^{x-1} v''_{q,i}\,dt - \int_0^{a_i} t^{x-1} v_{q,i}\,dt = \sum_{s=1}^{s=p} (c''_{q,s} - c_{q,s}) \int_0^{a_i} t^{x-1} v_{s,0}\,dt, \tag{3}$$

les intégrations étant étendues le long du bord gauche de la coupure. Posons

$$v_{s,0} = \frac{\partial^r}{\partial(-\alpha_s)^r}[t^{-\alpha_s}\psi(t)\mu_s], \tag{4}$$

où

$$\mu_s = \frac{1}{e^{2\pi i(x-\alpha_s)} - 1},$$

et soit C_i le lacet $(a_i F G a_i)$ fig. 3.

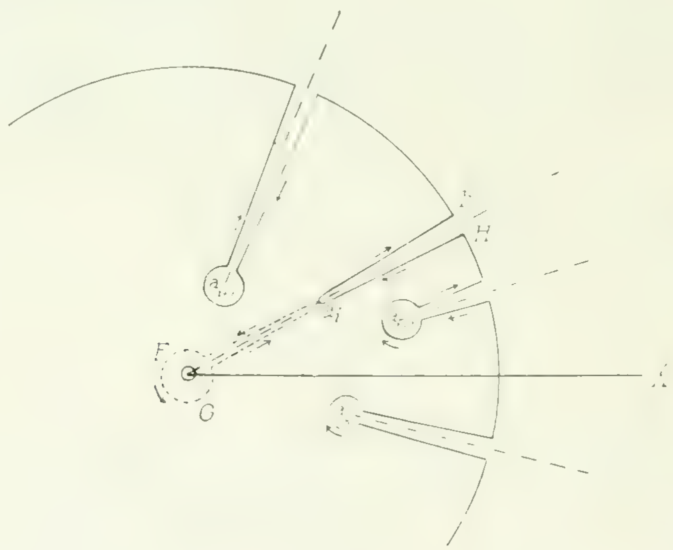


Fig. 3.

Remplaçons dans (3) le chemin d'intégration rectiligne par le lacet C_i; on trouve:

$$u_{q,i}(x) = \sum_{s=1}^{p} (c''_{q,s} - c_{q,s}) \int_{C_i} t^{x-1} v_{s,0}\,dt =$$

$$= \sum_{s=1}^{s=p} (c''_{q,s} - c_{q,s}) \int_{C_i} t^{x-1} \left\{ \mu_s v_{s,0} + \binom{r}{1} \frac{\partial \mu_s}{\partial(-\alpha_s)} v_{s-1,0} + \cdots + \frac{\partial^r \mu_s}{\partial(-\alpha_s)^r} v_{s-r,0} \right\} dt. \tag{5}$$

Je veux démontrer que le dernier membre est une fonction linéaire des solutions $u_{q,i}(x)$. Je déforme la ligne d'intégration sans franchir aucune des coupures donc a été question dans le § II. Comme l'indique la figure le contour C_i peut se remplacer par deux droites $a_i E$ et $a_i H$, une circonférence avec un rayon très grand et une suite de lacets $L_{i+1}, L_{i+2}, \ldots, L_1, \ldots, L_{i-1}$ autour des points $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_1, \ldots, a_{i-1}$.

Supposons que la partie réelle de $x-\gamma_p$ soit négative. Faisons tendre le rayon du cercle vers l'infini, les intégrales prises le long des arcs de cercle tendent vers zéro.

Il ne reste que les intégrales prises le long des lacets $L_{i+1}, L_{i+2}, \ldots,$ ayant leurs extrémités à l'infini, et les intégrales prises le long des deux droites $(a_i E \infty)$ et $(a_i H \infty)$.

Désignons ces deux dernières intégrales par E et H respectivement.

On a:

$$E = \sum_{s=1}^{s=p} (c''_{q,s} - c_{q,s}) \int_{a_i}^{\infty} t^{x-1} \left\{ u_s \sum_{n=1}^{n=p} d_{s,n} v_{n,i} + \binom{r}{1} \frac{\partial u_s}{\partial(-\alpha_s)} \sum_{n=1}^{n=p} d_{s-1,n} v_{n,i} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^r u_s}{\partial(-\alpha_s)^r} \sum_{n=1}^{n=p} d_{s-r,n} v_{n,i} \right\} dt,$$

$$H = e^{2\pi i x} \sum_{s=1}^{s=p} (c''_{q,s} - c_{q,s}) \int_{\infty}^{a_i} t^{x-1} \left\{ u_s \sum_{n=1}^{n=p} d'_{s,n} v_{n,i} + \binom{r}{1} \frac{\partial u_s}{\partial(-\alpha_s)} \sum_{n=1}^{n=p} d'_{s-1,n} v_{n,i} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^r u_s}{\partial(-\alpha_s)^r} \sum_{n=1}^{n=p} d'_{s-r,n} v_{n,i} \right\} dt,$$

la première intégrale étant étendue le long du bord gauche, la dernière intégrale étant étendue le long du bord droit de la coupure (a_i, ∞).

Admettons que $-\alpha_{s-r}, \ldots, -\alpha_s, \ldots$ forment un groupe de racines. On voit sans peine qu'on a la relation

$$d'_{s,n} = e^{-2\pi i \alpha_s}\left[d_{s,n} + \binom{r}{1} 2\pi i\, d_{s-1,n} + \binom{r}{2} (2\pi i)^2 d_{s-2,n} + \cdots + (2\pi i)^r d_{s-r,n}\right);$$

correspondant aux autres groupes de racines (s'il y en a) on trouve des expressions semblables. Substituons ces expressions dans H. Soit H_1 la somme d'intégrales qu'on déduit de $H \,.\, e^{-2\pi i x}$ en remplaçant partout d' par d. Par un calcul un peu long on démontre qu'on a

$$H - H_1 = \sum_{s=1}^{s=p} \sum_{n=1}^{n=p} (c''_{q,s} - c_{q,s})\, d_{s,n} \int_{\gamma}^{a_i} t^{x-1} v_{n,i}\, dt;$$

mais cette somme peut se réduire encore.

Des équations (1) et (2) on déduit en effet les relations suivantes

$$\sum_{s=1}^{s=p} c_{q,s} d_{s,n} = \begin{cases} 0, & n \gtrless q \\ 1, & n = q \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{s=p} c''_{q,s} d_{s,n} = \begin{cases} 0, & \text{si } n > q, \text{ et si } n < q - r \\ \binom{r}{m} (2\pi i)^m e^{-2\pi i \beta_{q,i}}, & \text{si } n = q - m, \end{cases}$$

m étant un entier tel que $r \geq m \geq 0$. On en conclut qu'on a

$$H - H_1 = \int_{L_i} t^{x-1} v_{q,i}\, dt = \bar{u}_{q,i}(x).$$

Pour la somme des deux intégrales E et H on trouve donc l'expression suivante:

$$E + H = (E + H_1) + (H - H_1) =$$

$$= \sum_{s=1}^{s=p} (c_{q,i} - c''_{q,s}) \int_{L_i} t^{x-1} \Big\{ \mu_s \sum_{n=1}^{n=p} d_{s,n} v_{n,i} + \binom{r}{1} \frac{\partial \mu_s}{\partial(-\alpha_s)} \sum_{n=1}^{n=p} d_{s-1,n} v_{n,i} +$$

$$+ \frac{\partial^r \mu_s}{\partial(-\alpha_s)^r} \sum_{n=1}^{n=p} d_{s-r,n} v_{n,i} \Big\} dt + \bar{u}_{q,i}(x),$$

les sommations étant cette fois étendues seulement sur les solutions $v_{n,i}$, non-holomorphes au voisinage de a_i, car les intégrales holomorphes, ayant la même valeur sur les deux bords de la coupure, se détruisent. Soit a_i n fois racine dans l'équation caractéristique. On voit que $E + H$ s'exprime linéairement par les solutions canoniques $u_{1,i}(x), u_{2,i}(x), \ldots, u_{n,i}(x)$.

Les coefficients qui figurent dans cette expression sont des combinaisons linéaires des fonctions périodiques μ_s et de leurs dérivées par rapport à $-\alpha_s$.

Il reste à examiner les intégrales prises le long des contours $L_{i+1}, L_{i+2}, \ldots$ Prolongeons analytiquement $v_{s,0}$ jusqu'aux points singuliers $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$ en

suivant le contour déformé $o\,a_i\,E\,F\ldots$; $v_{s,0}$ s'exprime comme une fonction linéaire à coefficients constants des p solutions $v_{1,i+1},\ldots,v_{p,i+1}$; mais l'intégrale

$$\int\limits_{L_{i+1}} t^{x-1}\,v_{n,i+1}\,dt,$$

est égal à zéro, si $v_{n,i+1}$ est holomorphe au voisinage de a_{i+1}. Dans l'expression finale de $u_{q,i}(x)$ il ne figure donc que les k solutions canoniques $\overline{u}(x)$, tous les termes contenant des solutions $v_{n,s}$, holomorphes aux environs de a_s, étant égaux à zéro.

Nous pouvons dès maintenant simplifier les notations de manière à éviter les doubles indices. L'équation caractéristique admet k racines $a_1, a_2, \ldots, a_k$ distinctes ou non. Soit a_i une racine d'ordre de multiplicité n $(a_i = a_{i+1} = \cdots = a_{i+n-1})$.[1] L'équation déterminante relative au point a_i admet n racines auxquelles appartiennent n solutions non-holomorphes au voisinage. Nous désignons ces racines par $\beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{i+n-1}$. Il correspond à ces racines n solutions canoniques $u_i(x), u_{i+1}(x), \ldots, u_{i+n-1}(x)$, et n solutions canoniques $u_i(x), u_{i+1}(x), \ldots, u_{i+n-1}(x)$.

Soit a_j une des racines $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+n-1}$, nous sommes arrivés à l'équation suivante

$$u_j(x) = u_j(x) + \sum_{\nu=i}^{\nu=k} \pi_{j,\nu}(x)\,u_\nu(x) + e^{2\pi i x}\sum_{\nu=1}^{\nu=i-1} \pi_{j,\nu}(x)\,\overline{u}_\nu(x), \tag{6}$$

où

$$\pi_{j,\nu}(x) = \sum_{s=1}^{s=p}\left\{\frac{A_{j,s}^{(\nu)}}{e^{2\pi i(x-a_s)}-1} + \frac{B_{j,s}^{(\nu)}}{[e^{2\pi i(x-a_s)}-1]^2} + \cdots + \frac{M_{j,s}^{(\nu)}}{[e^{2\pi i(x-a_s)}-1]^{m_s}}\right\}; \tag{7}$$

m_s est égal au nombre des racines de $p_0(x)$ appartenant au même groupe que a_s et non-supérieures à a_s, chaque racine comptée avec son ordre de multiplicité. Le facteur $e^{2\pi i x}$, qui figure dans le dernier terme au second membre de (6), provient de ce qu'en suivant le contour déformé on arrive au point a_s avec l'argument ζ_s, si $s > i$ mais avec l'argument $\zeta_s + 2\pi$, si $s < i$.

Dans la démonstration de la relation (6) nous avons supposé que $\Re(x-\gamma_p) < 0$ et que $\Re(\beta_s) > -1$ $(s = i, i+1, \ldots, i+n-1)$. Mais les solutions sont des fonctions analytiques de x et de β_s; la relation subsiste donc quelle que soit la valeur de β_s et pour toutes valeurs non-singulières de x.

[1] On suppose que a_i soit un point singulier régulier de l'équation différentielle.

Le calcul explicite des constantes $A, B, \ldots, M$ par la méthode précédente est quelquefois assez facile; j'en donnerai un exemple dans le § 25. Mais le plus souvent il est préferable d'appliquer la méthode plus directe que je vais maintenant exposer.

CHAPITRE IV.

Méthode directe pour former les relations linéaires entre les solutions canoniques.

§ 19. Démontrons d'abord un lemme relatif au déterminant $D(x)$

$$D(x)=\begin{vmatrix} u_1(x), & u_2(x), \ldots, & u_k(x) \\ u_1(x+1), & u_2(x+1), \ldots, & u_k(x+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1(x+k-1), & u_2(x+k-1), \ldots, & u_k(x+k-1) \end{vmatrix}, \tag{1}$$

formé des solutions du premier système canonique. Écrivons dans ce déterminant $x+1$ au lieu de x, et joignons aux éléments de la dernière ligne ceux des lignes précédentes multipliés respectivement par $p_{k-1}(x), p_{k-2}(x), \ldots, p_0(x)$

En remarquant qu'on a

$$p_k(x)\,u(x+k)+\cdots+p_i(x)\,u(x+i)+\cdots+p_0(x)\,u(x)=0, \tag{2}$$

on trouve le relation suivante

$$D(x+1)=(-1)^k\frac{p_0(x)}{p_k(x)}D(x). \tag{3}$$

Mais on a

$$(-1)^k\frac{p_0(x)}{p_k(x)}=a\,\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_p)}{(x-\gamma_1+k)\ldots(x-\gamma_p+k)}, \tag{4}$$

a étant égal au produit des racines de l'équation caractéristique

$$a=a_1\,a_2\ldots a_k,$$

et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ étant les nombres dont il a été question plus haut. De la relation (3) on conclut que $D(x)$ est égal à

$$D(x) = a^x \frac{\Gamma(x-\alpha_1)\,\Gamma(x-\alpha_2)\ldots\Gamma(x-\alpha_p)}{\Gamma(x-\gamma_1+k)\,\Gamma(x-\gamma_2+k)\ldots\Gamma(x-\gamma_p+k)}\,\pi(x), \tag{5}$$

π étant une fonction périodique ($\pi(x) = \pi(x+1)$) dont nous allons déterminer la valeur. Dans cette expression le facteur $\Gamma(x-\alpha_i)$ figure n fois, si α_i est une racine d'ordre de multiplicité n. On peut trouver une autre expression du même déterminant en substituant à chaque élément son développement en série de facultés. Pour abréger, je discuterai seulement les deux cas extrêmes suivants:

1°. Les racines de l'équation caractéristique sont distinctes.

2°. Toutes les racines de l'équation caractéristique sont égales à 1 et le point $t = 1$ est un point singulier régulier de l'équation différentielle. C'est le cas étudié dans le chapitre I.

Dans le premier cas nous avons vu que $u_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ est de la forme

$$u_s(x) = a_s^x \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta_s+1\right)}\left[A_0^{(s)}+\varepsilon(x)\right], \tag{6}$$

$A_0^{(s)}$ étant une constante arbitraire qui est, par hypothèse, différente de zéro, $\varepsilon(x)$ étant une fonction qui tend uniformément vers zéro quand x tend vers l'infini le long d'une droite qui forme avec l'axe des nombres positifs un angle qui est en valeur absolue inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.

Divisons la première, la deuxième etc.... colonne du déterminant respectivement par $a_1^x x^{-\beta_1-1} A_0^{(1)}$, $a_2^x x^{-\beta_2-1} A_0^{(2)}$, ... Il vient

$$D(x) = a^x x^{-\beta_1-\beta_2\ldots-\beta_k-k} A_0^{(1)} A_0^{(2)} \ldots A_0^{(k)}\,\varphi(x), \tag{7}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui tend vers

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots a_k \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots a_k^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \ldots a_k^{k-1} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

quand x tend vers l'infini par des valeurs positives. Ce déterminant est égal au produit des différences deux à deux des racines a_i.

$$\Pi(a_i - a_s), \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, k;\ i > s);$$

il est donc différent de zéro.

Soit une équation différentielle d'ordre p de la classe de Fuchs. Supposons qu'elle admette, outre le point à l'infini, $k+1$ points singuliers réguliers à distance finie. Soit

$$\varrho_{\infty,1},\ \varrho_{\infty,2},\ \ldots,\ \varrho_{\infty,p};\ \ldots;\ \varrho_{i,1},\ \varrho_{i,2},\ \ldots,\ \varrho_{i,p},\ \ldots$$

les racines des équations déterminantes relatives à ces points. On sait que L. Fuchs a démontré qu'il existe entre ces nombres la relation suivante

$$\sum_{i=0}^{i=k}\sum_{s=1}^{s=p}\varrho_{i,s} - \sum_{s=1}^{s=p}\varrho_{\infty,s} = k\,\frac{p(p-1)}{2}.$$

Dans notre cas cette relation s'écrit:

$$\sum_{s=1}^{s=p}(\gamma_s - \alpha_s) + \sum_{s=1}^{s=k}\beta_s = k\,\frac{p(p-1)}{2} - k\,\frac{(p-1)(p-2)}{2} = k(p-1). \tag{9}$$

Cela posé, en égalant les secondes membres de (5) et de (7), on trouve

$$\pi(x) = F(x)\,A_0^{(1)}A_0^{(2)}\ldots A_0^{(k)}\varphi(x),$$

où

$$F(x) = \frac{\Gamma(x-\gamma_1+k)\ldots\Gamma(x-\gamma_p+k)}{\Gamma(x-\alpha_1)\ldots\Gamma(x-\alpha_p)}\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k+k};$$

mais en vertu de la relation (9):

$$\lim_{x=\infty} F(x) = 1.$$

La fonction périodique $\pi(x)$ est donc égale à une fonction qui tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Elle est par conséquent elle-même une constante.

On a

$$\pi(x) = A_0^{(1)}A_0^{(2)}\ldots A_0^{(k)}\,\Pi(a_i - a_s).$$

Considérons maintenant l'autre cas extrême, où $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$. Nous écrivons le déterminant $D(x)$ sous la forme

$$D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x), & u_2(x), \ldots, & u_k(x) \\ \Delta_1 u_1(x), & \Delta_1 u_2(x), \ldots, & \Delta_1 u_k(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_1^{k-1} u_1(x), & \Delta_1^{k-1} u_2(x), \ldots, & \Delta_1^{k-1} u_k(x) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Je suppose qu'aucune des différences entre les racines $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ de l'équation déterminante relative au point $t = 1$ ne soit égale à un entier. Nos solutions canoniques se représentent par des développements de la forme

$$u_s(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta_s+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(s)} \frac{(\beta_s+1)\ldots(\beta_s+\nu)}{(x+\beta_s+1)\ldots(x+\beta_s+\nu)}, \tag{11}$$

$A_0^{(s)}$ étant différent de zéro. On en déduit aisément

$$(-1)^n \Delta_1^n u_s(x) =$$
$$= (\beta_s+1)\ldots(\beta_s+n) \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta_s+n+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(s)} \frac{(\beta_s+n+1)\ldots(\beta_s+n+\nu)}{(x+\beta_s+n+1)\ldots(x+\beta_s+n+\nu)}. \tag{12}$$

Substituons ces développements dans le déterminant (10); divisons la $s^{\text{ième}}$ colonne $(s = 1, 2, \ldots, k)$ par $A_0^{(s)} \dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta_s+1)}$; multiplions enfin la deuxième, la troisième etc.... ligne respectivement par $(-x)$, $(-x)^2$, etc.... Il vient

$$D(x) = \left(\frac{-1}{x}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[\Gamma(x)]^k A_0^{(1)} \ldots A_0^{(k)}}{\Gamma(x+\beta_1+1)\ldots\Gamma(x+\beta_k+1)} \varphi(x), \tag{13}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui tend vers

$$\begin{vmatrix} 1 & , \quad 1 & , \ldots, \quad 1 \\ \beta_1+1 & , \quad \beta_2+1 & , \ldots, \quad \beta_k+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\beta_1+1)(\beta_1+2)\ldots(\beta_1+k-1), & (\beta_2+1)\ldots(\beta_2+k-1), & \ldots, (\beta_k+1)\ldots(\beta_k+k-1) \end{vmatrix} \tag{14}$$

car la série de facultés qui figure dans un élément quelconque tend vers son terme constant $A_0^{(s)}$ quand x tend vers $+\infty$. Or ce déterminant est égal au produit des différences deux à deux des racines β_s:

$$\Pi(\beta_i - \beta_s), \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, k;\ i > s).$$

La relation de Fuchs entre les racines des équations déterminantes est dans le cas actuel

$$\sum_{s=1}^{s=p} (\gamma_s - \alpha_s) + \sum_{s=1}^{s=k} \beta_s = pk - \frac{k(k+1)}{2}. \tag{15}$$

En égalant les seconds membres de (5) et de (13) on trouve

$$\pi(x) = F(x)(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} A_0^{(1)} \ldots A_0^{(k)} \varphi(x),$$

où

$$F(x) = \frac{\Gamma(x-\gamma_1+k) \ldots \Gamma(x-\gamma_p+k)}{\Gamma(x-\alpha_1) \ldots \Gamma(x-\alpha_p)} \frac{[\Gamma(x)]^k x^{-\frac{k(k-1)}{2}}}{\Gamma(x+\beta_1+1) \ldots \Gamma(x+\beta_k+1)}.$$

Mais on a, en vertu de la relation (15)

$$\lim_{x=\infty} F(x) = 1.$$

On en conclut que $\pi(x)$ est une constante et égale à:

$$\pi(x) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} A_0^{(1)} \ldots A_0^{(k)} \Pi(\beta_i - \beta_s);$$

elle est donc différente de zéro parce que, par hypothèse, les racines β_s sont distinctes.

On voit de la même manière que le déterminant $D(x)$ formé des solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ dans notre second système canonique est égal à l'expression

$$\frac{\Gamma(1-x-\gamma_1-k) \ldots \Gamma(1-x-\gamma_p-k)}{\Gamma(1+\alpha_1-x) \ldots \Gamma(1+\alpha_p-x)},$$

multipliée par une constante qui est la même que celle qui figure plus haut.

§ 20. Entre ces deux systèmes de solutions il existe nécessairement des relations[1] linéaires de la forme

$$\bar{u}_j(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} \pi_{j,\nu}(x)\, u_\nu(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{16}$$

[1] Voir mon Mémoire: Sur l'existence de solutions d'une équation linéaire aux différences finies. Annales de l'Ecole Normale supérieure, sér. 3, t. 31, 1914, p. 205.

où

$$\pi_{j,\nu}(x) = \pi_{j,\nu}(x+1).$$

Il s'agit maintenant de calculer ces fonctions périodiques.

En écrivant dans les équations (16) au lieu de x successivement $x+1$, $x+2, \ldots, x+k-1$ on trouve k^2 équations à l'aide desquelles on sait déterminer les $\pi_{j,\nu}(x)$. Soit $D_{j,\nu}(x)$ ce que devient $D(x)$ quand on remplace $u_\nu(x)$ par $\bar{u}_j(x)$; on trouve

$$\pi_{j,\nu}(x) = \frac{D_{j,\nu}(x)}{D(x)}. \tag{17}$$

De cette expression on conclut que $\pi_{j,\nu}(x)$ est une fonction méromorphe de x admettant les points

$$\ldots, \gamma_s - 2, \gamma_s - 1, \gamma_s, \gamma_s + 1, \gamma_s + 2, \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

pour pôles et étant d'ailleurs holomorphe. Le numérateur admet en effet les points $\gamma_s - k + 1 + n$ et les points $\alpha_s - n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots,)$ pour pôles. Le dénominateur admet les points $\alpha_s - n$ pour pôles du même ordre que le numérateur; il admet enfin les points $\gamma_s - k - n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ pour zéros.

Posons $x = \sigma + i\tau$. Pour déterminer la forme des fonctions périodiques il suffit d'étudier comment elles se comportent pour des valeurs très grandes positives et négatives de τ. On y arrive à l'aide de la formule (17) et des expressions asymptotiques des solutions canoniques indiquées dans le chapitre II.[1] Considérons d'abord le cas où toutes les racines de l'équation caractéristique sont égales à 1. On se rappelle qu'on a

$$\bar{u}_s(x) = \frac{\Gamma(-x-\beta_s)}{\Gamma(1-x)} e^{\pi i(\beta_s+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} B_\nu^{(s)} \frac{(\beta_s+1)\ldots(\beta_s+\nu)}{(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu)}. \tag{18}$$

On en déduit:

$$\Delta_1^n u_s(x) = e^{\pi i(\beta_s+1)} \frac{\Gamma(-x-\beta_s-n)}{\Gamma(1-x)} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} B_\nu^{(s)} \frac{(\beta_s+1)(\beta_s+2)\ldots(\beta_s+\nu+n)}{(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu)}.$$

Substituons ces développements dans le déterminant $D_{j,\nu}(x)$ et appliquons à $D_{j,\nu}(x)$ les mêmes opérations qu'on vient d'appliquer à $D(x)$. On voit que $\pi_{j,\nu}(x)$ est égal à l'expression

$$e^{\pi i(\beta_j+1)} \frac{\Gamma(-x-\beta_j)}{\Gamma(1-x)} \frac{\Gamma(x+\beta_\nu+1)}{\Gamma(x)},$$

[1] Voir en particulier la note à la page 225.

multipliée par un quotient de deux déterminants dans lesquels chaque élément tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Le dénominateur tend vers le déterminant (14) et le numérateur tend vers ce que devient ce déterminant quand on remplace β_ν par β_j. Le numérateur tend donc vers zéro, si $\nu \gtrless j$; mais si $\nu = j$ il tend vers la même limite que le dénominateur. On a par conséquent

$$\lim_{x=+\infty} x^{\beta_j-\beta_\nu}\pi_{j,\nu}(x) = 0, \qquad j \gtrless \nu,$$

$$\lim_{x=-\infty} \pi_{j,j}(x) = 1, \tag{19}$$

$$\lim_{x=+\infty} \pi_{j,j}(x) = e^{2\pi i\beta_j}. \tag{20}$$

Si la partie réelle de $(\beta_j - \beta_\nu)$ est positive ce résultat nous suffit; sinon, il faut aller un peu plus loin. En faisant usage des relations linéaires qui existent entre les nombres $A_0, A_1, A_2, \ldots$ et entre les nombres $B_0, B_1, B_2, \ldots$ on voit qu'on peut dans le déterminant $D_{j,\nu}(x)$ faire disparaître un nombre quelconque des premiers termes dans les développements qui figurent dans la $j^{\text{ième}}$ et dans la $\nu^{\text{ième}}$ colonne. Notre raisonnement permet donc de conclure qu'on a

$$\lim_{x=+\infty} x^{\mu}\pi_{j,\nu}(x) = 0, \qquad j \gtrless \nu, \tag{21}$$

μ étant un nombre positif quelconque. Ce résultat nous permet de déterminer la forme des fonctions $\pi_{j,\nu}(x)$. On sait[1] en effet qu'une fonction uniforme et périodique avec la période 1 qui est méromorphe dans tout domaine fini, et qui tend vers une limite quand x tend vers l'infini en restant dans la bande $a \leq \sigma \leq a+1$, est nécessairement une fonction rationnelle de $e^{2\pi ix}$. De ce qui précède il résulte donc qu'on a

$$\pi_{j,\nu}(x) = \varepsilon_{j,\nu} + \sum_{s=1}^{s=n}\left[\frac{A^{(\nu)}_{j,s}}{e^{2\pi i(x-\gamma_s)}-1} + \frac{B^{(\nu)}_{j,s}}{\left(e^{2\pi i(x-\gamma_s)}-1\right)^2} + \cdots + \frac{M^{(\nu)}_{j,s}}{\left(e^{2\pi i(x-\gamma_s)}-1\right)^{m_s}}\right], \tag{22}$$

m_s étant l'ordre de multiplicité du pôle γ_s et $\varepsilon_{j,\nu}$:

$$\varepsilon_{j,\nu} = \begin{cases} 1, & \nu = j, \\ 0, & \nu \gtrless j. \end{cases}$$

[1] Voir par exemple, Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. I, p. 404—405, Leipzig 1907.

Des égalités (20) et (21) on conclut que les constantes $A, B, \ldots, M$ satisfont aux relations suivantes

$$\sum_{s=1}^{s=p} [-A_{j,s}^{(\nu)} + B_{j,s}^{(\nu)} + \cdots + (-1)^{m_s} M_{j,s}^{(\nu)}] = \begin{cases} e^{2\pi i \beta_j} - 1, & \nu = j, \\ 0, & \nu \gtrless j. \end{cases} \tag{23}$$

Nous avons supposé dans ce chapitre qu'aucune des différences entre les β_j n'est égale à un entier (y compris zéro). La discussion se fera de la même manière dans le cas général où les racines β_j forment des groupes et des sous-groupes. Je me borne à renvoyer le lecteur à mon Mémoire[1] cité plus haut, où l'on a discuté avec détail comment se modifient les déterminants en ce cas. Les relations (16) et (22) restent vraies dans ce cas mais les relations (23) prennent une forme un peu plus compliquée. On vérifie d'ailleurs que ce résultat est en accord avec celui trouvé dans le chapitre III.

§ 21. Considérons ensuite le cas où toutes les racines de l'équation caractéristique sont distinctes. Changeons légèrement les notations dans la relation fondamentale (16) et écrivons

$$\bar{u}_j(x) = e^{2\pi i x} \sum_{\nu=1}^{\nu=j-1} \pi_{j,\nu}(x)\, u_\nu(x) + \sum_{\nu=j}^{\nu=k} \pi_{j,\nu}(x)\, u_\nu(x). \tag{24}$$

Rappelons qu'on a

$$u_j(x) = a_j^x \frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \beta_j\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)} e^{\pi i(\beta_j + 1)} [A_0^{(j)} + \varepsilon_1(x)],$$

$\varepsilon_1(x)$ étant une fonction qui, dans tout intervalle fini de σ tend uniformément vers zéro quand τ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Substituons cette expression dans le déterminant $D_{j,\nu}(x)$.

En raisonnant exactement comme plus haut on démontre les égalités

$$\lim_{\tau=-\infty} \pi_{j,j}(x) = 1, \quad \lim_{\tau=+\infty} \pi_{j,j}(x) = e^{2\pi i \beta_j}, \tag{25}$$

$$\lim_{\tau=-\infty} \pi_{j,\nu}(x) = 0, \quad \lim_{\tau=+\infty} e^{2\pi i x} \pi_{j,\nu}(x) = 0, \qquad \nu \gtrless j, \tag{26}$$

car on se rappelle que les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ont été numérotés de sorte qu'on ait $0 \leqq \operatorname{Arg} a_1 \leqq \operatorname{Arg} a_2 \leqq \operatorname{Arg} a_3 < \cdots$. De ces égalités on conclut que $\pi_{j,\nu}(x)$ est

[1] l. c. Sur l'intégration des équations etc., chapitre III.

de la forme (22) et que la relation (23) subsiste dans le cas où $\nu = j$, mais non si l'on a $\nu \lesseqgtr j$, car on n'a pas en général $\lim\limits_{\tau = +\infty} \pi_{j,\nu}(x) = 0$.

Pour abréger j'ai discuté seulement les deux cas extrêmes susmentionnés. Dans le cas général où l'équation caractéristique admet plusieurs racines multiples on peut appliquer un raisonnement qui est intermédiaire entre ceux qui conviennent dans les cas extrêmes.

Soit a_i une des racines multiples, soit n son ordre de multiplicité $(a_i = a_{i+1} = \cdots = a_{i+n-1})$. L'équation déterminante relative au point a_i admet les racines $\beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{i+n-1}$ non-entières en général. Soit β_j une de ces racines. Supposons enfin qu'aucun des points $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ne soit un point singulier irrégulier de l'équation différentielle. Le lecteur verra sans peine qu'on trouve la relation

$$u_j(x) = e^{2\pi i x} \sum_{\nu=1}^{\nu=i-1} \pi_{j,\nu}(x)\, u_\nu(x) + \sum_{\nu=i}^{i=k} \pi_{j,\nu}(x)\, u_\nu(x) \tag{27}$$

où $\pi_{j,\nu}(x)$ est de la forme (22). L'exactitude de cette relation a d'ailleurs été démontrée dans toute sa généralité dans le chapitre III. Si la solution appartenant à β_j ne contient pas de logarithme, la relation (23) est vraie pour $\nu = i$, $i+1, \ldots, i+n-1$, mais non pour les autres valeurs de ν. Elle est donc vraie en particulier pour $\nu = j$.

§ 22. Pour compléter cette étude il nous reste à déterminer les constantes $A, B, \ldots, M$. Supposons pour plus de simplicité que les pôles γ_s soient simples, mais restons d'ailleurs dans le cas général où nous venons de nous placer. On a donc

$$0 = B_{j,s}^{(\nu)} = \cdots = M_{j,s}^{(\nu)}.$$

Soit m un des nombres $0, 1, \ldots, k-1$. Multiplions les deux membres de (27) par $(x - \gamma_s + m)$ et faisons tendre x vers $\gamma_s - m$.

Il vient

$$e^{2\pi i \gamma_s} \sum_{\nu=1}^{\nu=i-1} A_{j,s}^{(\nu)} u_\nu(\gamma_s - m) + \sum_{\nu=i}^{\nu=k} A_{j,s}^{(\nu)} u_\nu(\gamma_s - m) = \begin{cases} R_{j,s}, & m = 0 \\ 0, & m = 1, 2, \ldots, k-1 \end{cases}, \tag{28}$$

$2\pi i R_{j,s}$ étant le résidu de $u_j(x)$ dans le point γ_s. Ces k équations suffisent pour déterminer les nombres $A_{j,s}^{(1)}, \ldots, A_{j,s}^{(k)}$. Leur déterminant est en effet égal à

$$e^{2\pi \sqrt{-1}\, \gamma_s (i-1)} D(\gamma_s - k + 1)$$

il est donc différent de zéro. Je veux démontrer que les $A_{j,s}^{(\nu)}$ s'expriment par les multiplicateurs de l'équation aux différences (2). Divisons celle-ci par $p_k(x)$; il vient

$$P[u(x)] \equiv u(x+k) + P_{k-1}(x)\, u(x+k+1) + \cdots + P_0(x)\, u(x) = 0.$$

On entend[1] par un multiplicateur de cette équation une fonction $\mu_i(x)$ telle que le produit $\mu_i(x)\, P[u(x)]$ soit la différence finie d'une fonction linéaire en $u(x)$, $u(x+1), \ldots, u(x+k-1)$:

$$\mu_i(x)\, P[u(x)] = \Delta \sum_{i=0}^{i=k-1} Q_i(x)\, u(x+i).$$

On sait qu'il existe k multiplicateurs linéairement indépendants qui sont des solutions de l'équation adjointe

$$\mu(x) + P_{k-1}(x)\,\mu(x+1) + P_{k-2}(x+1)\,\mu(x+2) + \cdots + P_0(x+k-1)\,\mu(x+k) = 0,$$

et qui satisfont aux relations suivantes

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=k} \mu_\nu(x)\, u_\nu(x+m) = \begin{cases} 0, & m = 1, 2, \ldots, k-1, \\ 1, & m = k. \end{cases}$$

En comparant ces équations avec les équations (28) on trouve

$$A_{j,s}^{(\nu)} = R_{j,s} \,.\, \mu_\nu(\gamma_s - k) \,.\, e^{-2\pi i \gamma_s \varepsilon_\nu},$$

où

$$\varepsilon_\nu = \begin{cases} 0; & \text{si } \nu \geq i, \\ 1, & \text{si } \nu < i. \end{cases}$$

Théorème. *Entre les deux systèmes canoniques de solutions il existe des relations linéaires à coefficients périodiques. Ces coefficients périodiques sont des fonctions rationnelles de $e^{2\pi i x}$. Les seules constantes qui entrent dans ces fonctions sont:*

1°. *Les nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, racines de l'équation $p_k(x) = 0$.*

2°. *Les résidus des solutions canoniques $u_j(x)$ dans les points γ_s.*

3°. *Les valeurs des multiplicateurs de l'équation aux différences dans les points $\gamma_s - k$.*

[1] S. Pincherle & U. Amaldi: Le Operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi. Bologna 1901, p. 242—246.

E. Bortolotti: Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**, (1896).

G. Wallenberg und A. Guldberg: Theorie der linearen Differenzengleichungen. Leipzig 1911, p. 78—86.

CHAPITRE V.

Étude des solutions au voisinage du point à l'infini.

§ 23. Nous sommes maintenant en mesure de voir comment se comportent nos solutions canoniques quand x, en suivant *une droite quelconque*, tend vers le point à l'infini qui est le seul point essentiel de ces fonctions. Considérons par exemple la solution $\overline{u}_j(x)$. Nous avons déjà vu comment se comporte asymptotiquement cette solution quand x tend vers l'infini de sorte que la partie réelle de x reste inférieure à un nombre positif. La relation (27) chapitre IV montre immédiatement comment elle se comporte quand x tend vers l'infini en suivant un rayon vecteur formant avec l'axe des nombres positifs un angle non-nul et inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue. Il suffit en effet d'introduire dans le second membre de cette relation les développements convergents obtenus pour les solutions $u_1(x), u_2(x) \ldots$. Remarquons que, si l'argument de x est compris entre 0 et $-\pi$, les produits $e^{2\pi i x} \pi_{j,\nu}(x)$ $(\nu \gtreqless j)$ tendent vers une limite finie et non-nulle en général; mais si $\nu = j$ la fonction $\pi_{j,j}(x)$ tend vers la limite 1. Si l'argument de x est compris entre zéro et π les fonctions $\pi_{j,\nu}(x)$ tendent vers une limite finie et non-nulle en général, si $\nu = 1, 2, \ldots, i-1, i+n, i+n+1, \ldots, k$. Mais les fonctions $\pi_{j,\nu}(x)$ décroissent plus vite qu'une puissance quelconque de x, si $\nu = i, i+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, i+n-1$. On a, en effet, en vertu des relations (23) chapitre IV, pour ces valeurs de ν

$$\lim_{x=\infty} e^{-2\pi i x} \pi_{j,\nu}(x) = \text{const.},$$

et enfin

$$\lim_{x=\infty} \pi_{j,j}(x) = e^{2\pi i \beta_j}.$$

Les termes contenant $u_i(x), u_{i+1}(x), \ldots, u_{j-1}(x), u_{j+1}(x), \ldots, u_{i+n-1}(x)$ *sont donc sans influence sur la valeur asymptotique de* $\overline{u}_j(x)$, car ils décroissent beaucoup plus vite que le terme contenant $u_j(x)$, le facteur exponentiel a_i^x étant le même en tous ces termes.

Cette remarque est très importante. On en conclut par exemple que dans le cas étudié dans le chapitre I, où toutes les racines de l'équation caractéristique sont égales à 1, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\overline{u}_j(x)}{u_j(x)} = 1,$$

si l'argument de x est compris entre o est $-\pi$ et

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_j(x)}{\overline{u}_j(x)} = e^{2\pi i \beta_j},$$

si l'argument de x est compris entre o et π les limites exclues. Les égalités (18) et (19) (chapitre I) sont donc vraies, non seulement dans les angles indiqués, mais respectivement pour $\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon$ et pour $-\varepsilon > \operatorname{Arg} x > -2\pi + \varepsilon$, ε étant un nombre positif. Plus généralement, si β_j appartient à un groupe de racines et n est un entier convenablement choisi, on a uniformément dans l'angle $\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon$:

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_j(x)\, x^{\beta_j+1}}{\log^n\left(\frac{1}{x}\right)} = \text{const.}$$

Ce résultat est, ce nous semble, très remarquable. Les fonctions méromorphes $u_j(x)$ se montrent par là comme les plus simples en leur genre.

§ 24. Retournons au cas général où les racines de l'équation caractéristique sont des nombres quelconques. Faisons tendre x vers l'infini le long d'un rayon vecteur fixe différent de l'axe des nombres positifs. On voit qu'on sait former une expression $\eta_s(x)$,

$$\eta_s(x) = a_s^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_s+1} \log^n\left(\frac{1}{x}\right),$$

telle que $\overline{u}_j(x) : \overline{\eta}_s(x)$ tend vers une limite finie. n désigne un entier et on suppose que l'argument de a_s soit convenablement choisi. Cette limite existe à l'intérieur d'un certain angle facile à déterminer. Quand l'argument de x varie, les différents expressions $\eta_s(x)$ se permutent entre elles. Pour un rayon vecteur qui sépare deux de ces angles il arrive que l'expression asymptotique de $u_j(x)$ soit de la forme

$$\sum_s k_s \eta_s,$$

les k_s étant des constantes.

On sait donc former une somme $\sum\limits_s k_s \eta_s$ qui représente asymptotiquement $u_j(x)$ dans l'angle $\frac{\pi}{2} > \operatorname{Arg} x > \varepsilon$ et une autre somme $\sum\limits_s k_s \eta_s$ qui représente

asymptotiquement $\overline{u}_j(x)$ dans l'angle $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg}\, x < -\varepsilon$. Les arguments des nombres a_s doivent être choisis d'une manière différente dans les deux cas. *La direction de l'axe des nombres positifs est une direction singulière. Il n'existe aucune fonction* $\gamma_s(x)$ *qui représente* $u_j(x)$ *asymptotiquement quand* x *tend vers l'infini le long d'une droite parallèle à l'axe des nombres positifs.* Mais la relation (27) permet toutefois de se rendre compte de la manière dont varient les valeurs de $u_j(x)$ le long d'une telle droite.

Pour les solutions $u_j(x)$ on trouve des résultats du même ordre. C'est la direction de l'axe des nombres négatifs qui est singulière pour ces fonctions.

CHAPITRE VI.

Exemples particuliers.

§ 25. Je veux maintenant appliquer ce qui précède à l'étude de deux équations particuliers. A l'équation différentielle de Laplace

$$\sum (c_i + b_i x) \frac{d^i y}{dx^i} = 0,$$

il correspond l'équation aux différences finies suivante

$$P[u(x)] \equiv \sum_{i=0}^{i=k} [c_i + b_i(x+i)]\, u(x+i) = 0, \tag{1}$$

les c_i et les b_i étant indépendants de x. Supposons que $b_k = 1$ et que $b_0 \neq 0$.

Posons

$$u(x) = \int t^{x-1} v(t)\, dt. \tag{2}$$

En substituant cette intégrale dans l'équation (1) il viendra

$$P[u(x)] = t^x v(t) \sum_{i=0}^{i=k} b_i t^i + \int t^{x-1} Q[v(t)]\, dt, \tag{3}$$

où

$$Q[v(t)] = t \frac{dv(t)}{dt} \sum_{i=0}^{i=k} b_i t^i - v(t) \sum_{i=0}^{i=k} c_i t^i. \tag{4}$$

Déterminons $v(t)$ comme une solution de l'équation différentielle $Q = 0$. On a

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\beta_0}{t} + \frac{\beta_1}{t - a_1} + \frac{\beta_2}{t - a_2} + \cdots + \frac{\beta_k}{t - a_k}.$$

Supposons d'abord que les racines $a_1, \ldots, a_k$ de l'équation caractéristique soient distinctes et que les nombres $\beta_1, \ldots, \beta_k$ ne soient pas des entiers non-négatifs. Prenons pour $v(t)$ la solution suivante

$$v(t) = t^{\beta_0}(t - a_1)^{\beta_1}(t - a_2)^{\beta_2} \ldots (t - a_k)^{\beta_k}. \tag{5}$$

Les solutions canoniques se déterminent par les équations

$$u_s(x) = \int_{l_s} t^{x-1} v(t)\, dt, \qquad \bar{u}_s(x) = \int_{L_s} t^{x-1} v(t)\, dt. \tag{6}$$

Pour les définir complètement convenons que l'argument de $t - a_n$ tend vers $\zeta_n + \pi$ quand t revient à l'origine le long de la dernière partie de la ligne l_s et vers

$$\begin{cases} \zeta_s, & \text{si } n < s, \\ \zeta_s + 2\pi, & \text{si } n > s, \end{cases}$$

quand t revient à l'infini le long de la dernière partie de la ligne L_s. Pour l'argument de t on prend la valeur qui est égale à ζ_s le long de la partie rectiligne du chemin d'intégration. Les $u(x)$ et les $\bar{u}(x)$ se trouvent ainsi définies respectivement pour $\Re(x + \beta_0) > 0$ et pour $\Re(x + \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k) < 0$.

Quand x tend vers l'infini de sorte que la partie réelle de x tend vers $+\infty$, ou reste finie, on a

$$\lim_{x=\infty} a_s^{-x} x^{\beta_s+1} u_s(x) = k, \qquad \frac{\pi}{2} \geq \operatorname{Arg} x > -\frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

k étant une constante.

Mais si la partie réelle de x tend vers $-\infty$, ou reste finie, on a

$$\lim_{x=\infty} a_s^{-x} x^{\beta_s+1} \bar{u}_s(x) = k, \qquad -\frac{\pi}{2} \geq \operatorname{Arg} x \geq -\frac{3\pi}{2}, \tag{8}$$

k étant la même constante.

La solution $u_s(x)$ peut s'exprimer par l'intégrale

$$u_s(x) = \frac{e^{-2\pi i\beta_s} - 1}{e^{2\pi i(x+\beta_0)} - 1} \int_{C_s} t^{x-1} v(t)\, dt, \tag{9}$$

C_s étant un contour partant du point a_s et y revenant après avoir entouré l'origine dans le sens direct et en laissant à son extérieur tous les autres points singuliers. En déformant le contour C_s de la manière indiquée dans le § 18 on trouve la relation suivante

$$\begin{aligned} u_s(x) = u_s(x) &+ \frac{\sin \pi \beta_s}{\sin \pi (x + \beta_0)} e^{-\pi i (x + \beta_0 + \beta_s)} \left\{ \bar{u}_s(x) + u_{s+1}(x) + \cdots + \bar{u}_k(x) \right\} \\ &+ \frac{\sin \pi \beta_s}{\sin \pi (x + \beta_0)} e^{\pi i (x + \beta_0 - \beta_s)} \left\{ \bar{u}_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_{s-1}(x) \right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

A l'aide de cette relation et des égalités (7) et (8) on peut voir comment se comporte $u_s(x)$ quand x tend vers l'infini d'une manière quelconque.

L'intégrale qui figure au second membre de (9) est une fonction entière de x. Elle s'évanouit si $x + \beta_0$ est un entier positif. Les solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ sont donc des fonctions méromorphes de x admettant les points $-\beta_0$, $-\beta_0 - 1$, $-\beta_0 - 2, \ldots$ pour pôles simples. De même on voit que les solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots, \bar{u}_k(x)$ sont des fonctions méromorphes de x admettant les points

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k + p \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

pour pôles simples et étant d'ailleurs holomorphes.

Si $\beta_n (n \gtreqless s)$ est un entier non-négatif il faut dans l'équation (10) remplacer $\bar{u}_n(x)$ par zéro. L'intégrale de contour $u_n(x)$ s'évanouit en ce cas; mais pour obtenir une solution appartenant à β_n il suffit de remplacer le contour l_n par la droite de zéro à a_n. Le premier terme au second membre de (3) est en effet égal à zéro pour $t = a_n$.

§ 26. On a supposé jusqu'ici que les racines a_s étaient distinctes. Si a_s est n fois racine dans l'équation $\sum_{i=0}^{i=k} b_i t^i = 0$, deux cas essentiellement différents se présentent

1°. a_s est $(n-1)$ fois racine dans l'équation $\sum_{i=0}^{i=k} c_i t_i = 0$. On vérifie aisément que l'équation aux différences finies admet les solutions suivantes

$$a_s^x,\ a_s^x x,\ a_s^x x^2, \ldots,\ a_s^x x^{n-2},$$

qui, joignées aux solutions définies ci-dessus, forment un système fondamental de solutions.

2°. L'équation $\sum_{i=0}^{i=k} c_i t^i = 0$ n'admet pas a_s comme racine d'ordre de multiplicité $(n-1)$. Supposons pour abréger que a_s n'est point du tout racine dans cette équation. $v(t)$ est en ce cas de la forme

$$v(t) = t^{\beta_0}(t-a_1)^{\beta_1} \ldots (t-a_s)^{\beta_s} e^{\frac{\beta_s^{(1)}}{t-a_s} + \cdots + \frac{\beta_s^{(n-1)}}{(t-a_s)^{n-1}}} \ldots (t-a_k)^{\beta_k}.$$

Les lacets $l_1, l_2, \ldots$ nous donneront seulement un nombre de solutions indépendantes qui est égal au nombre de racines distinctes dans l'équation caractéristique. On peut former des nouvelles solutions de la manière suivante. Le voisinage de a_s se partage en $2(n-1)$ secteurs

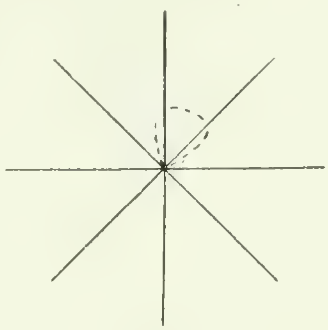


Fig. 4.

tels que lorsque t tend vers a_s, $v(t)$ tend vers 0, si t se meut dans un des secteurs de rang impair et vers ∞ s'il reste dans un secteur de rang pair. Prenons pour ligne d'intégration une ligne qui part du point a_s, et s'en éloigne suivant le premier secteur, traverse le second et revienne en a_s par le troisième; $v(t)$ s'annule aux deux extrémités de ce contour, on obtient donc une solution de

l'équation (1). Cette solution est une fonction entière de x. En intégrant suivant une ligne qui s'éloigne de a_s suivant le troisième secteur et y revient par le cinquième secteur on obtient une nouvelle solution. On peut former en tout $(n-1)$ solutions semblables qui sont linéairement indépendantes.

§ 27. Outre les solutions canoniques il y a un certain nombre d'autres solutions qui, pour la raison suivante, méritent l'attention. Pour les solutions canoniques $u_s(x)$ la direction de l'axe des nombres négatifs est une direction singulière et pour les solutions canoniques $u_s(x)$ c'est la direction de l'axe des nombres positifs qui est singulière. Mais les nouvelles solutions que nous allons former n'admettent pas de direction singulière. Supposons que les racines $a_1, \ldots, a_k$ de l'équation caractéristique soient distinctes. Soit C un point quelconque du plan. Joignons-le aux points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ par les lacets $A_1, A_2, \ldots, A_k$ entourant ces points dans le sens direct. Désignons par A_s^{-1} le lacet A_s parcouru dans le sens indirect. Soit $[s]$ la valeur de l'intégrale $\int t^{x-1} v(t)\, dt$ prise le long du contour A_s et avec une détermination initiale convenable de la fonction à intégrer. Soit $[s-1, s]$ la valeur de la même intégrale prise le long du contour $A_{s-1} A_s A_{s-1}^{-1} A_s^{-1}$. L'intégrale $[s-1, s]$ est une solution de l'équation (1). En effet, $t^x v(t)$ se reproduira après les deux rotations successives autour des points a_{s-1} et a_s. Le premier terme au second membre de (3) est donc nul. La solution $[s-1, s]$ est une fonction entière de x. Il est facile de l'exprimer par les solutions canoniques. En ayant égard aux changements que subira $v(t)$ par les rotations autour des points singuliers on trouve la relation suivante

$$[s-1, s] = (1 - e^{2\pi i \beta_s})[s-1] - (1 - e^{2\pi i \beta_{s-1}})[s].$$

Mais la valeur de l'intégrale $[s-1, s]$ est indépendante du choix qu'on a fait du point C. On peut donc faire tendre C vers l'origine. Quand on se rappelle le choix qu'on a fait des arguments de $t-a_1, t-a_2, \ldots$ dans les solutions canoniques on voit qu'il existe la relation suivante

$$[s-1, s] = e^{2\pi i \beta_{s-1}} (1 - e^{2\pi i \beta_s})\, u_{s-1}(x) - e^{2\pi i \beta_s} (1 - e^{2\pi i \beta_{s-1}})\, u_s(x).$$

De même en faisant tendre C vers l'infini d'une manière convenable il vient

$$[s-1, s] = (1 - e^{2\pi i \beta_s})\, u_{s-1}(x) - e^{2\pi i \beta_s} (1 - e^{2\pi i \beta_{s-1}})\, u_s(x).$$

Ces relations font voir comment se comporte la fonction entière $[s-1, s]$ quand x tend vers l'infini *le long d'un rayon vecteur quelconque.* Les coefficients dans ces relations ne sont plus des fonctions périodiques mais des constantes; on voit donc *qu'il n'y a pas de direction singulière pour ces solutions.*

Il y a en tout $k-1$ solutions[1] de ce genre $[1, 2], [2, 3], \ldots, [k-1, k]$ qui sont linéairement indépendantes.

§ 28. Considérons en dernier lieu l'équation aux différences finies

$$(x-\alpha)(x-\beta)\Delta_1^2 u(x) + \{\alpha\beta-\gamma-\alpha-\beta-1+(\gamma-\alpha-\beta+3)x\}\Delta_1 u(x) \\ + (\gamma-\alpha-\beta+1)u(x) = 0,$$

qui rentre dans la classe de celles étudiées dans le chapitre I. En écrivant $x+2$ au lieu de x elle peut se mettre sous la forme

$$(x-\alpha+2)(x-\beta+2)u(x+2) \\ -\{\alpha\beta-(\alpha+\beta+\gamma+1)(x+1)+2(x+1)(x+2)\}u(x+1)+x(x-\gamma+1)u(x)=0.$$

En posant

$$u(x) = \int t^{x-1} v(t)\,dt,$$

on voit que $v(t)$ doit satisfaire à l'équation différentielle de GAUSS

$$t(1-t)\frac{d^2v(t)}{dt^2} + [\gamma-(\alpha+\beta+1)t]\frac{dv(t)}{dt} - \alpha\beta v(t) = 0.$$

Cette équation admet aux environs de $t=1$ les deux solutions

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-t),$$

$$(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-t);$$

les solutions canoniques $u_1(x)$ et $u_2(x)$ se représentent donc par les séries de facultés

[1] Plus généralement on sait démontrer qu'une équation aux différences d'ordre k, ayant pour coefficients des polynômes du degré $p\,(p<k)$, possède $k-p$ solutions entières qui n'admettent pas de direction singulière.

$$u_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta-\gamma+1)\,x(x+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{(\alpha+\beta-\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)\,x(x+1)(x+2)} + \cdots$$

$$u_2(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\alpha-\beta+\gamma+1)}\left\{1 + \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{1.(x+\gamma-\alpha-\beta+1)} + \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)}{1.2.(x+\gamma-\alpha-\beta+1)(x+\gamma-\alpha-\beta+2)} + \cdots\right\},$$

convergentes pouvu que

$$\Re(x-\gamma+1) > 0.$$

Quand on se rappelle la formule

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)},$$

on voit que $u_2(x)$ est égal à

$$u_2(x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x-\gamma+1)}{\Gamma(x-\beta+1)\,\Gamma(x-\alpha+1)}.$$

Les solutions canoniques $\bar{u}_1(x)$ et $\bar{u}_2(x)$ sont

$$\bar{u}_1(x) = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{\alpha(\alpha-\gamma+1)}{(\alpha+\beta-\gamma+1)(x-\alpha)(x-\alpha-1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)}{(\alpha+\beta-\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)(x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\alpha-2)} + \cdots$$

$$\bar{u}_2(x) = \frac{\Gamma(\alpha-x)\,\Gamma(\beta-x)}{\Gamma(1-x)\,\Gamma(\gamma-x)}.$$

On trouve entre ces solutions les relations linéaires

$$u_2(x) = \frac{\sin\pi x \sin\pi(x+1-\gamma)}{\sin\pi(x-\alpha)\sin\pi(x-\beta)}\,\bar{u}_2(x),$$

$$u_1(x) = \bar{u}_1(x) - \frac{\pi^2\,\Gamma(1+\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(1+\beta-\gamma)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\,\frac{\bar{u}_2(x)}{\sin\pi(x-\alpha)\sin\pi(x-\beta)}.$$

$u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont des fonctions méromorphes admettant pour pôles simples les points $0, -1, -2, \ldots; \gamma-1, \gamma-2, \gamma-3, \ldots$, et on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} x u_1(x) = 1,$$

$$\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon.$$

$$\lim x^{\alpha+\beta-\gamma-1} u_2(x) = 1.$$

$\bar{u}_1(x)$ et $u_2(x)$ sont des fonctions méromorphes admettant pour pôles simples les points $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots; \beta, \beta + 1, \beta + 2, \ldots$

Goettingue, octobre 1912.

ABHANDLUGNEN ZUR THEORIE DER KONFORMEN ABBILDUNG.

(H. A. Schwarz zu seinem 50-jährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 zugeeignet.)

II. Die Fundamentalabbildung beliebiger mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche nebst einer Anwendung auf die Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche.

Von

PAUL KOEBE

in Jena.

Inhaltsübersicht.

A. Einleitung.

Nachdem ich in der Abhandlung I[1] dieser Serie mich lediglich mit der konformen Abbildung des einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs beschäftigt habe, lege ich der Untersuchung nunmehr einen beliebigen mehrfach [$(p+1)$-fach] zusammenhängenden schlichten Bereich B zu Grunde, ohne übrigens über die Natur seiner Begrenzung irgend welche spezialisierenden Voraussetzungen zu machen. Auch ist es für die Lösung des sogleich zu erwähnenden, in dieser Abhandlung in erster Linie behandelten Abbildungsproblems nicht von wesentlichem Belang, ob der Bereich von endlicher Ordnung des Zusammenhanges ist oder als der allgemeinste schlichte Bereich von unendlich hohem Zusammenhange vorgestellt wird.

Das Abbildungsproblem, das wir in § 1—4 (*erster u. zweiter Teil*) behandeln, ist eine Verallgemeinerung der in der Abhandlung I für einfach und zweifach zusammenhängende Bereiche behandelten Kreisabbildung (d. i. Abbildung auf eine Kreisfläche, zu unterscheiden von der Kreisring-Abbildung beim zweifach zusammenhängenden Bereiche). Im Bereiche B (exklusive dessen Grenze), welcher in der z-Ebene liegend vorgestellt wird, soll eine durchaus reguläre, grenzstellenfreie Funktion $f(z) = \zeta$ erklärt werden, welche ihn auf das vollständige schlichte Innere des Einheitskreises der ζ-Ebene in der Weise konform abbildet, dass jeder dem Innern des Einheitskreises der ζ-Ebene angehörende Wert von der Funktion $f(z)$ innerhalb B einmal und nur einmal angenommen wird. Diese Funktion stellt die zum Bereiche B im Sinne der »Grenzkreisuniformisierung« gehörende uniformisierende Variable dar. Sie liefert von der über B ausgebreitet zu denkenden

[1] »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.« Journal f. Math. Bd 145 S. 177—223. Die ganze Serie ist auf ca. vier Abhandlungen berechnet.

einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche Φ dieses Bereichs eine ein-eindeutige, als die *Fundamentalabbildung* oder präziser *unverzweigte Fundamentalabbildung* zu bezeichnende konforme Abbildung auf das Innere des ζ-Einheitskreises[1] und ist, abgesehen von einer linearen Transformation, welche das Innere des Einheitskreises in sich transformiert, vollständig bestimmt. Die Existenz dieser Funktion wird hier durch ein rein funktionentheoretisches Verfahren bewiesen, bei welchem insbesondere die Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie nicht benötigt wird. Dieses von uns ebenfalls als *Schmiegungsverfahren* bezeichnete Verfahren ist die sinngemässe Ausdehnung des in der Abhandlung I von mir zur ausführlichen Entwickelung gebrachten, in einer Gött. Nachr.-Note (1912)[2] vorläufig mitgeteilten »Schmiegungsverfahrens«, eine Ausdehnung, auf welche ich in jener Note ebenfalls hingewiesen habe.

Die Entwicklungen der vorliegenden Abhandlung können dabei doch wesentlich unabhängig von der Abhandlung I verstanden werden. Was insbesondere das Schmiegungsverfahren anbetrifft, so biete ich hier in dem allgemeineren Falle des *mehrfach* zusammenhängenden Bereichs eine Beweisform, welche gegenüber der in I gegebenen Beweisform wesentlich neues bietet und daher auch in Anwendung auf das in I behandelte speziellere Problem der Abbildung des *einfach* zusammenhängenden Bereichs gegenüber der dortigen Darstellung ein besonderes Interesse beanspruchen darf. Für beide Methoden charakterisch ist die Anwendung des sogenannten *Schwarzschen Lemmas*, welches besagt, dass jede für $|z| < 1$ reguläre, für $z = 0$ den Wert null annehmende analytische Funktion, welche dem absoluten Betrage ihrer Werte nach in dem genannten z-Gebiete unterhalb eins

[1] Für diese Überlagerungsfläche ist die der POINCARÉ'schen Majorantenmethode (Bull. Soc. Math. de France t. 11. 1883) zugrundeliegende Bedingung des Vorhandenseins von drei völlig unbedeckten Punkten der Ebene erfüllt. Diese POINCARÉ'sche Arbeit in Verbindung mit dem Aufsatze von OSGOOD (Am. Trans. 1900) liefert daher bereits eine Lösung der Abbildungsaufgabe, eine Lösung, welche indessen die von uns nicht benötigten SCHWARZ'schen Entwicklungen über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ zur Voraussetzung hat. Auf unsere Problemstellung geht auch Herr F. SCHOTTKY ein in der Arbeit: »Über die Beziehung zwischen veränderlichen Grössen, die auf gegebene Gebiete beschränkt sind«. (Sitzungsb. d. Kgl. Preuss. Ak. d. Wiss., 1907 S. 919 ff. und 1908, S. 117 ff). Die Problemstellung ist ein Spezialfall des allgemeinen von mir in den Gött. Nachr. (1907) zuerst behandelten Problems der Grenzkreis-Uniformisierung und findet sich auch unter den von mir ebenda (1907) behandelten spezielleren Problemen der »Uniformisierung reeller algebraischer Kurven« vor, insofern als nach SCHOTTKY (Dissertation, Journal f. Math. Bd. 83) jedem schlichten mehrfach zusammenhängenden Bereiche eine reelle algebraische Kurve zugeordnet werden kann. Vgl. auch FRICKE's auf orthosymmetrische Riemannsche Flächen bezügliches Fundamentaltheorem II in FRICKE-KLEIN, »Automorphe Funktionen« Bd. II, S. 46.

[2] »Über eine neue Methode der konformen Abbildung und Uniformisierung.« Gött. Nachr. 1912 p. 844—848; siehe insbesondere Absatz 4. Absatz 2 und 3 derselben Note kommen im dritten und vierten Teile vorliegender Abhandlung zur ausführlichen Entwickelung.

bleibt, die Eigenschaft hat, im Gebiete $|z| \leq q$ ihrerseits dem absoluten Betrage der Werte nach unterhalb q zu bleiben. Ein Erreichen der Schranke q kann nur eintreten, wenn die Funktion die Gestalt $\alpha \cdot z$ hat, unter α eine Konstante vom absoluten Betrage 1 verstanden. Das vorstehend bezeichnete SCHWARZ'sche Lemma wird bei der Anwendung vielfach in transformierter Gestalt (»*erweitertes Schwarzsches Lemma*») zur Geltung kommen.

Um das Schmiegungsverfahren zur Anwendung bringen zu können, ist, wie in I, eine, im allgemeinen elementare *vorbereitende Abbildung* des Bereichs B auf einen Bereich B_1 innerhalb des Einheitskreises notwendig. Im Falle eines vollständig ausgearteten (d. i. nur von isolierten Punkten begrenzten) Bereichs wird dieselbe durch die Umkehrungsfunktion der elliptischen Modulfunktion geleistet, die ihrerseits hier als Abbildungsfunktion des Spitzendreiecks gewonnen wird.

Nachdem im ersten Teile die Abbildungsfunktion $f(z)$ gewonnen ist, wird im *zweiten Teile* das Verhalten der Abbildungsfunktion bei geschlossenen Umläufen und insbesondere auch das Verhalten derselben auf der Grenze des Bereichs B näher untersucht.

Im *dritten Teile* schliesslich wird die *verzweigte Fundamentalabbildung* (d. i. verzweigte Abbildung auf das Innere des Einheitskreises, in speziellen Fällen ganze Ebene exkl. bezw. inkl. des unendlich fernen Punktes) der schlichten Bereiche durchgeführt. Der allgemeinste Fall lässt sich auf den Fall der gewöhnlichen signierten Kreisscheibe zurückführen, wobei hier der Fall endlich vieler innerhalb der Kreisfläche gegebener relativer Verzweigungspunkte $a_\varkappa$ mit vorgegebenen Verzweigungszahlen $n_\varkappa$ und der von unendlich vielen solchen Verzweigungspunkten auf gleicher Linie mittels des Schmiegungsverfahrens zu behandeln sind, wobei namentlich die Feststellung des tatsächlichen Eintretens der erwarteten Schmiegungswirkung durch besondere Überlegungen geleistet werden muss.

Für den Reduktionsprozess dient als Grundlage die Kenntnis der SCHWARZ'schen *Dreiecksfunktionen* und des elliptischen Integrals erster Art, deren hier gegebene Behandlung ein gewisses Interesse für sich darbieten dürfte.

Der vierte Teil enthält eine Anwendung der verzweigten Fundamentalabbildung der schlichten Vollebene auf die Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche, jenes Riemannsche Problem, welches bekanntlich zuerst (1870) durch SCHWARZ eine in sich geschlossene potentialtheoretische Lösung von spezifischer methodischer Tragweite fand. Als eine Besonderheit unserer Lösung ist ihr rein funktionentheoretischer, im Geiste von WEIERSTRASS durchaus potenzreihentheoretisch bestimmter Charakter hervorzuheben.

Überhaupt ist die ganze Abhandlung II, wie auch die Abhandlung I von

der Idee einer rein funktionentheoretischen, allein den Potenzreihenbegriff zugrundelegenden Behandlungsweise beherrscht.[1]

B. Erster Teil.

Existenzbeweis der unverzweigten Fundamentalabbildung: das Schmiegungsverfahren.

§ 1.

Problemstellung und Unitätssatz. Vorbereitende Abbildung des abzubildenden Bereichs auf einen Bereich innerhalb des Einheitskreises.

Es werde mit B ein schlichter $(p+1)$-fach zusammenhängender Bereich der z-Ebene bezeichnet, für welchen jedoch $p \geq 2$ ist, aber auch $= \infty$ sein kann. Die Zahl $p+1$ heisst die Zusammenhangszahl des Bereichs B, die Zahl p das Geschlecht des Bereichs B. Über die Natur der Begrenzungslinien des Bereichs B werde keinerlei spezialisierende Voraussetzung gemacht. Überhaupt wird unter dem Bereich B lediglich das eigentliche Innere desselben verstanden, d. i. die Gesamtheit aller derjenigen Bereichpunkte, mit welchen zugleich eine vollständige Umgebung derselben zum Bereiche gehört. Wir unterscheiden, wie in der Abhandlung I, zwischen inneren Punkten, Grenzpunkten und äusseren Punkten des Bereichs. Von den $p+1$ Begrenzungslinien können sich einzelne oder auch alle

[1] Der Gedanke einer rein funktionentheoretischen Behandlung der Uniformisierungsprobleme, insbesondere der Grenzkreisuniformisierung ist, wie ich auch in der Abhandlung I erwähnte, in gewissem Umfange schon früher zur Geltung gekommen: so bei Gauss (Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels), bei Poincaré (Acta mathematica Bd. IV), Schlesinger [Crelles Journal Bd. 105 und 110 (V)]. Insbesondere haben Poincaré (l. c. § 17) und Schlesinger (l. c.) eine Darstellung der Uniformisierungstranszendenten für die schlichte Vollebene, unter der Voraussetzung lauter reeller Verzweigungsstellen unendlich hoher Ordnung, durch algebraische Näherungsfunktionen behandelt, die bei Poincaré durch sukzessive Quadratwurzelausziehungen gefunden werden. Diese Untersuchungen tragen jedoch in der dargebotenen Form nicht den Charakter selbständiger Existenzbeweise, vielmehr den hypothetischer Konstruktionen, insofern als ihre Gültigkeit den anderweitig (bei Poincaré durch die Kontinuitätsmethode) erbrachten Existenzbeweis voraussetzt.

Bezüglich der Frage einer rein funktionentheoretischen Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche ist hier noch eine Arbeit von Schlesinger in den Ann. de l'Ecole Norm. sup. t. 20, 1903 zu erwähnen. Schlesinger beschränkt sich dabei jedoch auf den allgemeinen Fall, indem er eine Vervollständigung in Aussicht stellt. Wesentlich früher (1873 und 1881) behandelte Thomae in Math. Ann. Bd. VI und XVIII den Fall drei- und vierblättriger Riemannscher Flächen von beliebigem Geschlecht. Schliesslich sei hier auch auf die Methode der Integralgleichungen in Anwendung auf das Riemannsche Problem der Bestimmung von linear polymorphen Funktionssystemen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe (Hilbert, Plemelj) sowie auf die Kontinuitätsmethode in Anwendung auf dasselbe Problem (Schlesinger, Plemelj) hingewiesen.

auf Punkte reduzieren. Wir sprechen dann, wie in I, von einfach, zweifach, $\ldots (p+1)$-fach ausgearteten Bereichen. Der unendlich ferne Punkt der z-Ebene kann innerer Punkt, äusserer Punkt oder Grenzpunkt des Bereichs B sein.

Wir stellen uns nun folgendes Problem.

Problemstellung: Es soll in B eine durchweg reguläre analytische Funktion $\zeta = f(z)$ definiert werden, welche die Eigenschaft hat, eine konforme Abbildung des Bereichs B auf das Innere des Einheitskreises der ζ-Ebene zu vermitteln, so zwar, dass die Umkehrungsfunktion $z = \varphi(\zeta)$ für das ganze Innere des Einheitskreises $|\zeta| < 1$ mit dem Charakter einer rationalen Funktion überall hin fortgesetzt werden kann und dabei nur Werte annimmt, deren repräsentierende Punkte in B liegen.

Die geforderte Abbildung des Bereichs B werde als die *Fundamentalabbildung* dieses Bereichs bezeichnet.

Wird speziell angenommen, dass der Bereich B den unendlich fernen Punkt nicht in seinem Innern (höchstens auf seiner Grenze) enthalte, was immer durch eine lineare Transformation des Bereichs erreicht werden kann, so würde sowohl die Funktion $f(z)$ in B als auch die Funktion $\varphi(\zeta)$ im Einheitskreise überall regulär sein. Letztere Funktion würde ausserdem offenbar eine eindeutige Funktion sein, was man von der Funktion $f(z)$ jedoch nicht sagen kann. Diese wird sich vielmehr stets als eine unendlich-vieldeutige Funktion herausstellen. Man kann das formulierte Abbildungsproblem auch so formulieren:

Neue Formulierung des Abbildungsproblems: Es soll zwischen dem Bereiche B und der Fläche des Einheitskreises eine durchweg konforme, unverzweigte, im Innern der beiden genannten Gebiete grenzstellenfreie Abbildung gefunden werden.

Eine solche Abbildung haben wir in der Abhandlung I zwischen der Fläche des nichtausgearteten einfach zusammenhängenden Bereichs B und des nicht zweifachausgearteten zweifach zusammenhängenden Bereichs B herstellen können, indem wir insbesondere im letzteren Falle über dem Bereich B die zugehörende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche konstruierten und diese zunächst mittels logarithmischer Abbildung auf einen schlichten einfach zusammenhängenden Bereich brachten, sodann diesen vermöge des Schmiegungsverfahrens auf die Fläche des Einheitskreises.

Die zu bestimmende Funktion $f(z)$ ist sofort als eine *unendlich-vieldeutige analytische Funktion charakterisierbar*, nämlich als eine Funktion, welche bei Ausführung von Umläufen um die verschiedenen Begrenzungslinien des Bereichs B

und Wiederholung derselben in beliebiger Kombination immer neue Zweige darbietet. Nehmen wir zum Beweise das Gegenteil an, nämlich, dass sie nur endlich viele Zweige besitze. Alsdann gehört zu $f(z)$ eine gewisse, über B endlich-vielblättrig ausgebreitete Riemannsche Fläche F, deren Blätterzahl mit der Anzahl der verschiedenen Zweige der Funktion $f(z)$ genau übereinstimmt. Auf dieser Fläche F kann nun die Funktion $f(z)$ niemals an zwei von einander verschiedenen Stellen z_1 und z_2 einen und denselben Wert ζ^* annehmen, weil hieraus folgen würde, dass die Umkehrungsfunktion $\varphi(\zeta)$ an der Stelle ζ^* die beiden verschiedenen Werte z_1 und z_2 besitzt, welche aus einander durch eine gewisse analytische Fortsetzung innerhalb des Einheitskreises entstehen. Die Funktion $\varphi(\zeta)$ könnte dann aber nicht mehr innerhalb des Einheitskreises überall regulär sein, da eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiete überall regulär oder mit dem Charakter rationaler Funktionen fortsetzbare analytische Funktion in diesem Gebiete auch eindeutig sein muss. Wir konstatieren ferner, dass die Funktion $f(z)$ auch nicht an zwei koinzidierenden, jedoch verschiedenen Blättern angehörenden Punkten z^* der Fläche F einen und denselben Wert ζ^* haben kann. Denn in diesem Falle würde nun $f(z)$ in einer gewissen Nachbarschaft der erwähnten Stelle z^* in den erwähnten Blättern jedenfalls immer verschiedene Werte haben, weil sonst die betreffenden Zweige überhaupt übereinstimmen müssten. Wir würden demnach an der Stelle ζ^* jetzt zwei von einander verschiedene Elemente der Funktion $\varphi(\zeta)$ erhalten, welche allerdings an der Stelle ζ^* selbst einen und denselben Wert z^* aufweisen, was jedoch nicht hindert, die Funktion $\varphi(\zeta)$ nun als mehrdeutige analytische Funktion anzusprechen. Wir folgern jetzt, dass die Fläche F unter den bestehenden Annahmen eineindeutig und konform auf das Innere des Einheitskreises der ζ-Ebene abgebildet erscheint durch Vermittlung der Funktion $f(z)$. Das ist aber topologisch unmöglich, weil die Fläche F mindestens $p + 1$ voneinander verschiedene getrennte Begrenzungslinien[1] hat, während die Fläche des Einheitskreises einfach zusammenhängend ist.

Die soeben angestellte Betrachtung lehrt uns nun aber nicht nur dieses, dass die zu $f(z)$ gehörende Riemannsche Fläche F unendlich-vielblättrig sein muss, sondern sie lehrt uns auch unmittelbar, eben wegen der gefundenen Eineindeutigkeit der Beziehung zwischen F und der Fläche des ζ-Einheitskreises die wichtige Tatsache, dass F seinerseits eine einfach zusammenhängende Fläche sein muss. Die Möglichkeit der Lösung unseres Abbildungsproblems involviert somit die Existenz einer über B ausgebreitet zu denkenden, relativ unverzweigten,

[1] Wir gebrauchen hier und im folgenden den Ausdruck Begrenzungslinien in dem weiteren Sinne, dass wir dabei zulassen, dass eine solche »Linie» den allgemeinsten Begrenzungstypus darbiete oder sich auch auf einen Punkt reduziert.

grenzstellenfreien, einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche F, welche nunmehr als die *zu B gehörende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ* bezeichnet werde. Wir stellen zunächst den für das gestellte Abbildungsproblem geltenden Unitätssatz fest.

Unitätssatz: Das gestellte Abbildungsproblem kann, abgesehen von einer linearen Transformation, welche das Innere des ζ-Einheitskreises in sich transformiert, nur eine Lösung haben.

Der Beweis ergibt sich sofort aus folgenden Bemerkungen. Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ zwei Funktionen von z, welche eine Lösung des gestellten Abbildungsproblems liefern, so stellt sich die damit gesetzte Abhängigkeit zwischen f_1 und f_2 als eine überall reguläre, grenzstellenfreie Beziehung des Innern des Einheitskreises auf sich selbst dar, welche Beziehung daher auch eineindeutig sein muss, also gemäss einem bekannten Satze in Gestalt einer ganzen oder gebrochenen linearen Funktion darstellbar.[1]

Es bietet keine Schwierigkeit dar, die erwähnte einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ über B direkt nach topologischen Prinzipien zu konstruieren. Ebenfalls ergibt sich leicht, dass die Fläche Φ durch die Eigenschaft, eine einfach zusammenhängende, innerhalb B grenzstellenfreie, unverzweigte Überlagerungsfläche des Bereichs B zu sein, vollständig bestimmt ist. Wir begnügen uns in dieser Hinsicht auf andern Ortes von uns gegebene Ausführungen hinzuweisen. Insbesondere haben wir im Journ. f. Math. Bd. 139 bereits den allgemeinsten Fall unendlich-vielfach zusammenhängender Riemann'scher Flächen behandelt. Wir können uns mit diesem Hinweise umsomehr begnügen, als tatsächlich ein vorausgehender selbständiger topologischer Existenzbeweis der Fläche Φ für unsere unten gegebenen Entwicklungen zur Bestimmung der gesuchten Abbildungsfunktion nicht erfordert wird. Gleichwohl werden wir gelegentlich im folgenden auf die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ anspielen.

Der Nachweis der *Existenz der Abbildungsfunktion $f(z)$* kommt hinaus auf die Ausführung der eineindeutigen konformen Abbildung der Fläche Φ auf das Innere des Einheitskreises. Wir wollen diesen Nachweis führen mittelst eines konvergenten Prozesses, bei welchem nur Quadratwurzeloperationen zur Anwendung gelangen, die übrigens auch durch $\sqrt[n]{\ }$-Operationen oder Log-Operationen ersetzt werden können ohne wesentliche Modifikation der Beweisführung. Das Verfahren bezeichnen wir, wie in Abhandlung I, als *Schmiegungsverfahren*, weil wieder als wesentliche Eigenschaft der einzelnen Operationen die durch dieselbe be-

[1] Vgl. meine Abhandlung I im Journal f. Math. Bd. 145.

wirkte immer stärkere Anschmiegung der Begrenzung des abzubildenden Bereichs an die Peripherie des Einheitskreises von innen her zu nennen ist.

Wie in Abhandlung I benötigen wir auch hier zunächst eine *vorbereitende Abbildung* des Bereichs B und damit zugleich des ihm übergelagerten einfach zusammenhängenden Bereichs Φ auf einen Bereich B_1, welcher ganz innerhalb des Einheitskreises liegt. Dieser Bereich B_1 wird, wenn B nicht ein vollständig, d. i. $(p+1)$-fach ausgearteter Bereich ist, dessen Begrenzung somit nur von Punkten gebildet wird, auf dieselbe Weise wie in I gefunden durch eine eineindeutige Transformation des Bereichs B, welche im Falle des Vorhandenseins äusserer Punkte durch eine lineare Transformation geliefert wird, im Falle des Fehlens von äusseren Punkten durch eine lineare Funktion in Verbindung mit einer Quadratwurzeloperation.

Liegt jedoch der Fall eines vollständig ausgearteten Bereichs B vor, so ist eine eineindeutige konforme Abbildung des Bereichs B auf einen schlichten ganz innerhalb des Einheitskreises liegenden Bereich B_1 nicht möglich.

Wir betrachten zunächst den Fall des *dreifach zusammenhängenden Bereichs* B, dessen vollständige Begrenzung von drei Punkten gebildet wird, die wir mit $0, 1, \infty$ zusammenfallend annehmen können. Wir überzeugen uns in folgender Weise von der Existenz der zu diesem Bereiche gehörenden gesuchten Abbildungsfunktion $f(z)$.

Wir gehen aus von einem von drei Orthogonalkreisbögen gebildeten Spitzendreieck S innerhalb des Einheitskreises der ζ-Ebene und bilden das Innere dieses Dreiecks konform auf die obere Halbebene ab auf Grund des Schmiegungsverfahrens der Abhandlung I, wobei nun zu zeigen ist, dass die so gefundene Abbildungsfunktion $z=\varphi(\zeta)$ sich auf den begrenzenden Kreisbögen des Spitzendreiecks regulär verhält und in den drei äussersten Punkten desselben sich bestimmt verhält. Beide Tatsachen gewinnen wir nach der Methode §§ 9 u. 10 Abhandlung I in folgender Weise. Wir bilden ein Kreisbogenzweieck, welches man erhält durch Erweiterung des Bereichs S über einen der begrenzenden Kreisbögen hinaus durch das Äussere des Einheitskreises hindurch bis zu dem, jenem überschrittenen Kreisbogen in S gegenüberliegenden Eckpunkte E von S, mittels der Exponentialfunktion konform auf die obere Halbebene ab, sodass dem Punkte E der Nullpunkt entspricht und den beiden andern Eckpunkten von S zwei Punkte a und $-a$ der Achse des Reellen entsprechen. Bei dieser Operation wird S auf einen Bereich S' abgebildet, welcher der erwähnten oberen Halbebene angehört. Nunmehr wird zu S' der zu ihm spiegelbildlich symmetrische Bereich in Bezug auf die Achse des Reellen hinzugenommen und der so erweiterte Bereich, S'', auf die Fläche des Einheitskreises abgebildet, wobei die Strecke $a \ldots (-a)$ nach

dem Satze S. 207 unten der Abhandlung I in einen Orthogonalkreisbogen und folglich S' in ein Kreisbogenzweieck mit zwei rechten Winkeln übergeht, welches nun seinerseits elementar auf die Fläche einer z-Halbebene abgebildet wird. Das Resultat ist wieder die konforme Abbildung des Spitzendreiecks S auf die obere Halbebene. Hierdurch ist nicht nur festgestellt, dass die oben genannte Abbildungsfunktion $z = \varphi(\zeta)$ des Spitzendreicks S auf den begrenzenden Orthogonalkreisbögen von S sich regulär und in den Spitzen selbst sich bestimmt verhält, sondern es ist auch klar, dass der analytische Charakter der Funktion $f(z)$ in den Punkten $0, 1, \infty$ durch die Form der dort geltenden analytischen Entwicklung näher bestimmt ist. Es ergibt sich, dass eine gewisse lineare Funktion von $f(z)$ im Nullpunkte die Entwicklung $\log z + f(z)$ hat, unter $f(z)$ eine reguläre Potenzreihe von z verstanden, und dass Entsprechendes in den Punkten 1 und ∞ stattfindet.

Dass bei den nun in Betracht zu ziehenden symmetrischen Wiederholungen des Spitzendreiecks S sich tatsächlich eine vollständige Ausfüllung des Einheitskreises ergibt, ist bekannt und wird wohl am einfachsten so nachgewiesen. Man bringt die Fläche des Einheitskreises auf die Fläche der oberen Halbebene durch diejenige lineare Transformation, welche eine Spitze ins Unendliche bringt, die beiden andern nach 0 und 1, sodass das neue Spitzendreieck in bekannter Weise von zwei Halbgeraden und einem Halbkreise begrenzt erscheint. Nun spiegelt man an dem Halbkreise. Dadurch wird das Spitzendreieck erweitert zu einem Viereck, welches unten von zwei Halbkreisen mit einem Durchmesser der Länge $\frac{1}{2}$ begrenzt wird. Nunmehr spiegelt man das ganze Viereck an jedem dieser beiden Halbkreise. Dann wird das ganze jetzt erschlossene Gebiet nach unten von vier Halbkreisen begrenzt, deren einzelner, einen Durchmesser $\leq \frac{1}{4}$ hat u. s. w. Hierdurch übersieht man unmittelbar die allmähliche vollständige Ausfüllung des von den beiden Halbgeraden und der Achse des Reellen begrenzten Parallelstreifens, ebenso die Ausfüllung der nach rechts und links benachbarten, sich sukzessive anschliessenden unendlich vielen Parallelstreifen und damit der ganzen oberen Halbebene. Die Übereinstimmung der als Umkehrungsfunktion von $\varphi(\zeta)$ nunmehr gewonnenen Funktion $f(z)$ mit der gesuchten Funktion $f(z)$ ist evident.

Nachdem wir in der angegebenen Weise in den Besitz der *elliptischen Modulfunktion* bezw. deren Umkehrungsfunktion gelangt sind, können wir diejenige Hilfsabbildung vornehmen, welche wir im Falle eines $(p+1)$-fach ausgearteten $(p+1)$-fach zusammenhängenden Bereichs B benötigen, bevor wir das eigentliche Schmiegungsverfahren zur Anwendung bringen können. Es sei B ein $(p+1)$-fach zusammenhängender schlichter Bereich in der z-Ebene, dessen vollständige Be-

grenzung von $p+1$ getrennten Punkten gebildet wird. Alsdann können wir vermöge linearer Transformation annehmen, dass drei dieser Punkte mit den Punkten 0, 1, ∞ der z-Ebene zusammenfallen. Wir bilden nunmehr, mit $I(z)$ die Umkehrungsfunktion der Modulfunktion bezeichnend, den Bereich B mittels der Funktion $I(z)$ konform ab, welche Funktion in B eine unendlich-vieldeutige Funktion ist, die jeden Wert der oberen Halbebene einmal und nur einmal annimmt mit Ausnahme derjenigen unendlich vielen Werte, die $I(z)$ in den von 0, 1, ∞ verschiedenen Begrenzungspunkten von B annimmt. Es wird demnach der Bereich B unendlich-eindeutig auf einen Bereich B' abgebildet, welcher von der ganzen oberen Halbebene gebildet wird excl. der Achse des Reellen selbst und excl. unendlich vieler Punkte innerhalb der oberen Halbebene, welche sich nur gegen die Achse des Reellen hin häufen. Durch lineare Transformation können wir die genannte Halbebene in das Innere des Einheitskreises verwandeln und damit den Bereich B' in einen Bereich B_1, welcher auch den Nullpunkt in seinem Innern enthaltend angenommen werden kann.

Man bemerkt ohne weiteres, dass unsere vorbereitenden Hülfsabbildungen mittels linearer Funktionen, Quadratwurzelfunktionen, elliptischer Modulfunktion sich auch auf den Fall unendlich hohen Zusammenhanges des Bereichs B erstrecken. Hierdurch ist die von uns gestellte Abbildungsaufgabe reduziert auf die andere, *in* B_1 *eine unendlich-vieldeutige analytische, reguläre, unverzweigte, grenzstellenfreie Funktion* $f(z_1)$ *zu bestimmen, welche in* B_1 *jeden Wert, welcher dem absoluten Betrage nach* <1 *ist, einmal und nur einmal annimmt.*

§ 2.

Das Schmiegungsverfahren.

Den Bereich B_1 haben wir im Folgenden als einen endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängenden Bereich aufzufassen, der vollständig innerhalb des Einheitskreises der z_1-Ebene liegt und den Nullpunkt in seinem Innern enthält. In der Tat wird auch unser Beweisverfahren keine grundsätzlich neue Betrachtung erforderlich machen, wenn wir diese Allgemeinheit zu Grunde legen. Die zu bestimmende Funktion heisse $f(z_1)$. Wir werden sie als Grenzfunktion einer Folge endlich-vieldeutiger Näherungsfunktionen $z_n = f_n(z_1)$ ermitteln, deren erste z_1 selbst ist, während die $(n+1)$-te aus der n-ten mittels einer bestimmten Quadratwurzeloperation entsteht, sodass die Funktion $f_n(z_1)$ eine 2^{n-1}-deutige Funktion von z_1 in dem Gebiete B_1 ist. Diese Funktion $f_n(z_1)$ nimmt in B_1 keinen Wert mehr als einmal an, sie wird im Punkte $z_1 = 0$ in einem und nur einem ihrer Zweige (dem *Hauptzweige*) null und leistet eine 2^{n-1}-deutige konforme Abbildung

des Bereichs B_1 auf einen schlichten Bereich B_n, dessen Ordnungszahl des Zusammenhanges mit unbegrenzt wachsendem n unendlich gross wird, wenn nicht bereits der Zusammenhang von B_1 selbst unendlich gross war. Diese unendlich gross werdende Ordnung des Zusammenhanges wird jedoch in der Grenze selbst bedeutungslos werden auf Grund des folgenden wesentlichen Umstandes, der die Bezeichnung des Verfahrens als *Schmiegungsverfahren* rechtfertigt. Es werden, wenn mit α_n der dem Nullpunkte am nächsten liegende Punkt der Begrenzung des Bereichs B_n bezeichnet wird, wie in I, die Beziehungen gelten

$$(*) \qquad |\alpha_1| < |\alpha_2| < |\alpha_3| < \ldots; \quad \lim_{n=\infty} |\alpha_n| = 1,$$

sodass als Grenze des Bereichs B_n die *einfach* zusammenhängende Fläche des Einheitskreises sich ergeben wird.

Die *Konstruktion der Funktion* $f_{n+1}(z_1) \equiv z_n$ geschieht, wie in I, unter Zuhilfenahme einer im Punkte α_n verzweigten Windungsfläche W_n erster Ordnung. Da jedoch jetzt die Funktionen $f_n(z_1)$ in B_1 sich nicht mehr, wie damals, als eindeutige Funktionen ergeben werden, so ist für die spätere Vergleichung der Funktionen $f_n(z_1)$ mit einander zum Zwecke des Konvergenzbeweises noch besonders hervorzuheben, dass jedenfalls in der Umgebung der Stelle $z_1 = 0$ für alle diese Funktionen $f_n(z_1)$ ein bestimmter *Hauptzweig* vorhanden ist, nämlich derjenige, in welchem die Funktionen für $z_1 = 0$ verschwinden.

Gehen wir zum *Konvergenzbeweise* selbst über, so können wir zunächst ohne weiteres, wie in der Abhandlung I, mittels des *Schwarzschen Lemmas*, in Anwendung desselben auf die Funktion $z_n(z_{n+1})$, d. i. z_n in Abhängigkeit von z_{n+1}, schliessen, dass die Beziehungen (*) bestehen. Wir können dies so aussprechen: Die Funktion $f_n(z_1)$ kommt dem von uns gewünschten Ziele mit wachsendem n insofern näher und näher, als sie tatsächlich in B_1 eine in einem ihrer Zweige im Nullpunkte verschwindende, in B_1 reguläre, unverzweigte und grenzstellenfreie analytische Funktion ist, die keinen Wert mehr als einmal annimmt und mit der Gesamtheit ihrer Werte zwar noch nicht die volle Fläche des Einheitskreises erfüllt, jedoch ein Gebiet B_n innerhalb des Einheitskreises, welches bereits eine Kreisfläche K_n mit dem Nullpunkte als Mittelpunkt und einem Radius $|\alpha_n|$ vollständig enthält, der seinerseits mit unbegrenzt wachsendem n gegen 1 konvergiert.

Wir wollen die Untersuchung zunächst für das Gebiet $|z_1| < q|\alpha_1|$ durchführen, indem wir unter q eine positive von null verschiedene reelle Grösse unterhalb 1 verstehen. Die durch die erwähnte Ungleichheitsbeziehung definierte Kreisfläche möge mit K'_1 bezeichnet werden. Wir bemerken jetzt, dass nach dem Schwarz'schen Lemma, angewandt auf die im Kreise K_1 regulär und eindeutig

erklärte Funktion $z_n \equiv f_n(z_1)$, die Werte z_n, bei Beschränkung der Grösse z_1 auf die Kreisfläche K'_1, ihrerseits auf die Kreisfläche $K^{(q)}$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius q beschränkt bleiben. Um nun die gleichmässige Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(z_1)$ in K'_1 zu beweisen, genügt es jetzt, die gleichmässige Konvergenz der Grösse $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ gegen 1 innerhalb derselben Kreisfläche zu beweisen, woraus dann eben die gleichmässige Konvergenz der Grösse $(z_{n+m} - z_n)$ gegen 0 in demselben Gebiete folgen würde. Vgl. § 3 der Abhandlung I.

Wir betrachten zu dem Zwecke die Grösse $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ als Funktion der Grösse z_n. Auf der Peripherie des Kreises K_n mit dem Radis $|\alpha_n|$ wird diese Grösse dem absoluten Betrage nach unterhalb $\frac{1}{|\alpha_n|}$ bleiben. Sie bleibt demnach, da sie inner-

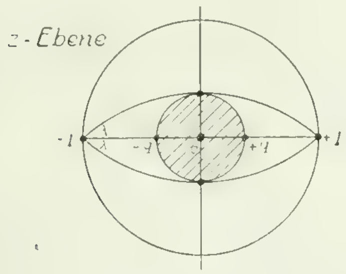


Fig. 1.

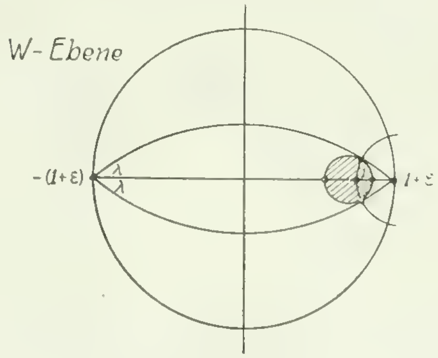


Fig. 2.

halb desselben Kreises regulär ist, innerhalb dieses Kreises dem absoluten Betrage nach unterhalb ebenderselben Grösse, welche Grösse ihrerseits oberhalb 1 liegt und mit wachsendem n gegen 1 konvergiert. Nun ist noch zu bemerken, dass die zu untersuchende Funktion $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ für $z_n = 0$ einen positiv reellen Wert oberhalb 1 annimmt. Hieraus folgt für diese Funktion, dass sie im Kreise $|z_n| \leq q$ gleichmässig gegen 1 konvergiert und zwar auf Grund des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz: Ist $W = F(z)$ eine für $|z| < 1$ regulär und eindeutig erklärte, im Nullpunkte den Wert 1 annehmende analytische Funktion, deren Werte für alle genannten Werte z innerhalb des Kreises $K^{(1+\varepsilon)}$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und $1+\varepsilon$ als Radius $(\varepsilon > 0)$ bleiben, so bleibt dieselbe Funktion für $|z| < q < 1$ ihren Werten nach auf die Fläche eines den Einheitspunkt umschliessenden Kreises K beschränkt, welcher von der Wahl der Funktion unabhängig ist und dessen Durchmesser unendlich klein wird, wenn die positive Grösse ε unendlich klein wird.

Dieser Satz ist eine Folge des SCHWARZ'schen Lemmas. Er ergibt sich aus

diesem durch eine lineare Transformation der Funktionsebene, welche den Einheitspunkt in den Nullpunkt überführt und die Punkte $1 + \varepsilon$ und $1 - \varepsilon$ in die Punkte $+1$ und -1. Man erkennt ohne weiteres aus den beigefügten Figuren, wie der Kreis K (in Figur 2 schraffiert) aus den Daten der z-Ebene als Bild der Kreisfläche $|z| < q$ gefunden wird. Der Winkel λ der W-Ebene ist aus der Figur der z-Ebene zu entnehmen.

Damit ist für die Kreisfläche K'_1 die gleichmässige Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(z_1)$ in deren Hauptzweigen bewiesen.

Nunmehr werde irgend eine Linie L vom Nullpunkte der z_1-Ebene aus gezogen und ein dieselbe einbettender Flächenstreifen β betrachtet, der nicht bis an die Grenze des Bereichs B_1 heranreicht. Indem wir der Funktion $f_n(z_1)$ im Anfangspunkte der Linie L den Hauptwert 0 beilegen, ist damit der Verlauf der Funktion $f_n(z_1)$ längs L und damit in z_1 bestimmt. Der Nachweis der gleichmässigen Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(z_1)$ für β ist unmittelbar durch den vorhergehenden Beweis mitgeliefert, sobald nachgewiesen ist, dass die Werte $f_n(z_1)$, wie sie in β erklärt sind, dem absoluten Betrage nach unterhalb einer Grösse $Q < 1$ bleiben. Dass dies in der Tat der Fall ist, ist nun eine Folge des *erweiterten Schwarz'schen Lemmas*, welches wir jetzt kettenförmig längs der Linie L zur Anwendung zu bringen haben, auf dieser eine Folge hinreichend benachbarter Punkte $P_1, P_2, \ldots$ wählend und um dieselben als Mittelpunkte je zwei in B_1 verbleibende Kreisflächen mit einem Radienverhältnis q so bestimmend, dass jedesmal $P_{\nu+1}$ der inneren Kreisscheibe des ν-ten Kreisscheibenpaares angehört. Als erweitertes Schwarz'sches Lemma bezeichnen wir hierbei den folgenden Satz:

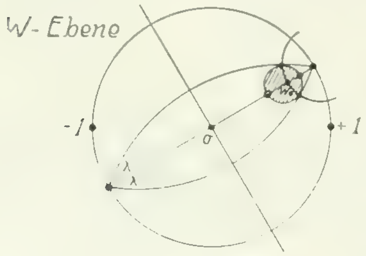


Fig. 3.

Erweitertes Schwarz'sches Lemma: Ist $W = F(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre, im Nullpunkte den Wert W_0 annehmende, dem absoluten Betrage nach unterhalb 1 bleibende analytische Funktion, so bleiben für $|z| < q < 1$ die Funktionswerte beschränkt auf die Fläche eines Kreises, der den Punkt W_0 umschliesst und dessen Konstruktion gemäss Figur 3 erfolgt. Diese Kreisfläche hat von der Peripherie des Einheitskreises einen endlichen, von null verschiedenen Abstand.

Aus dem Vorstehenden geht hervor, dass die Funktionenfolge $f_n(z_1)$ innerhalb B_1 gleichmässig konvergiert. Die Grenzfunktion $f_\infty(z_1) = z_\infty$ wird offenbar einen Hauptzweig besitzen, der im Punkte $z_1 = 0$ verschwindet. Im Übrigen ist die Funktion $f_\infty(z_1)$ innerhalb B_1 in allen ihren Zweigen regulär und bleibt dem absoluten Betrage der Werte nach unterhalb 1.

Wir wollen jetzt zeigen dass die Funktion $f_\infty(z_1)$ eine schlichte, unendlich-eindeutige Abbildung des Bereichs B_1 auf das vollständige Innere des Einheitskreises leistet.

Zu dem Zwecke machen wir zunächst die Bemerkung, dass die Funktion nicht identisch verschwinden kann. Denn sie verschwindet im Hauptzweige für $z_1 = 0$ und ferner ist im Hauptzweige für $0 < |z_1| < |\alpha_1|$ stets $|z_\infty| > |z_n| > |z_1|$.

Weiter bemerken wir, dass stets im Hauptzweige z'_∞ von z''_∞ verschieden ist, sofern z'_1 von z''_1 verschieden ist, unter z'_1 und z''_1 zwei verschiedene z_1-Werte verstanden. Diesen Nachweis führen wir in der Weise, dass wir für die Differenz $|z''_n - z'_n|$ eine von n unabhängige, von null verschiedene untere Schranke bestimmen mittels des SCHWARZ'schen Lemmas.

Nehmen wir in der Tat zunächst an, dass z'_1 und z''_1 innerhalb des Kreises K'_1 liegen, so bleiben die entsprechenden Grössen z'_n und z''_n in dem Bezirke $|z| < q < 1$, wie wir wissen. Diese beiden Grössen sind jedenfalls von einander verschieden. Stellen wir uns nun vor, dass durch hinreichend grosse Wahl von n die Entfernung der Punkte z'_n und z''_n beliebig klein werden könnte, so würde man um z'_n als Mittelpunkt einen ganz in K_n (d. i. $|z_n| \leqq |\alpha_n|$) enthaltenen Kreis $\varkappa_n$ mit dem Radius $|\alpha_n| - q$ beschreiben können, wobei das Verhältnis $\dfrac{|z''_n - z'_n|}{|\alpha_n| - q}$ beliebig klein werden würde. Hieraus aber würde sich nun durch Anwendung des SCHWARZ'schen Lemmas auf die Umkehrungsfunktion der Funktion $f_n(z_1)$, d. i. die Funktion $z_1 = \varphi_n(z_n)$ für das Gebiet $\varkappa_n$, wobei der Punkt z'_n als Nullpunkt zu denken ist, sofort eine Abschätzung für die Differenz $|z''_1 - z'_1|$ ergeben, derzufolge dieser Abstand unterhalb einer beliebig kleinen Grösse liegen müsste, während er doch bestimmt und von null verschieden ist.

Betrachten wir nunmehr irgend zwei Werte $z'_\infty = f_\infty(z'_1)$ und $z''_\infty = f_\infty(z''_1)$, setzen dabei jedoch z'_1 von z''_1 zunächst verschieden voraus, im übrigen aber *beliebig* innerhalb B_1 liegend. Wir behaupten dann, dass die genannten beiden Werte z'_∞ und z''_∞ von einander verschieden sind. Zu dem Zwecke denken wir uns zwecks genauerer Definition der Zweige die Punkte z'_1 und z''_1 durch eine Linie L'_1 bezw. L''_1 mit dem Nullpunkte verbunden. Indem man von diesem Punkte ausgehend die Linie L'_1 bezw. L''_1 durchläuft, gelangt man, mit dem Hauptzweige der Funktion $f_\infty(z_1)$ beginnend, zu den Werten $f_\infty(z'_1)$ bezw. $f_\infty(z''_1)$. Wir können nun wie oben schliessen, dass alle $f_n(z'_1)$ und $f_n(z''_1)$, (diese Grössen auch in den durch die Linien L'_1 bezw. L''_1 festzulegenden Zweigen genommen), für $n = 1, 2, 3, \ldots$ unterhalb einer Grösse $q < 1$ bleiben, folglich innerhalb der Kreise K_n liegen von einem gewissen n ab, das mit N bezeichnet werde. Die Grössen

z_n' und z_n'' sind nun aber offenbar von einander verschieden für jeden Wert des Index n. Folglich ergibt sich, indem man sich denkt, dass man etwa in der z_N-Ebene erst beginne mit dem Schmiegungsverfahren, genau wie vorher, die Ungleichheit der Grössen z_∞' und z_∞'' und gleichzeitig erkennt man die Möglichkeit, eine untere Schranke für den Abstand der beiden Punkte z_∞' und z_∞'' zu berechnen.

Nehmen wir jetzt an, dass z_1' und z_1'' zusammenfallen. Alsdann ist Übereinstimmung der Werte z_∞' und z_∞'' dann und nur dann vorhanden, wenn die aus L_1' und L_1'' zusammengesetzte geschlossene Linie L als solche innerhalb B_1 auf einen Punkt zusammenziehbar ist. In der Tat wird man wieder sagen können, dass von einem gewissen n ab die Punkte z_n' und z_n'' einschliesslich der Bildkurven L_n' und L_n'' (Bilder von L_1' bezw. L_1'' in der z_n-Ebene) auch in diesem Falle innerhalb K_n liegen und dass sie innerhalb eines Kreises mit einem Radius $q < 1$ bleiben, der von n unabhängig bestimmbar ist. Es ist nun auf Grund der vorstehenden Herleitungen klar, dass für das Zusammenfallen der Punkte z_∞' und z_∞'' notwendig und hinreichend ist die Bedingung: $z_n' = z_n''$. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist offenbar die als Bild von L in der z_n-Ebene sich ergebende Linie L_n innerhalb der Kreisfläche K_n auf einen Punkt zusammenziehbar, was sich unmittelbar auf die Linie L mit Bezug auf den Bereich B_1 überträgt und das oben bezeichnete Resultat ergibt.

Es bleibt schliesslich noch die Frage der vollständigen Ausfüllung des Einheitskreises bei der durch die Funktion $f_\infty(z_1)$ vermittelten konformen Abbildung zu erledigen. Diese Frage aber ist leicht zu beantworten. Es sei $r < 1$. Um dann für die Fläche $K^{(r)}$ des Kreises mit dem Radius r um den Nullpunkt der z_1-Ebene als Mittelpunkt zu zeigen, dass dieselbe vollständig ausgefüllt wird, bestimmen wir eine Zahl N so, dass K_N den Kreis $K^{(r)}$ vollständig umschliesst. Der Kreisfläche $K^{(r)}$ der z_N-Ebene entspricht in der z_1-Ebene ein gewisses mehrblättriges windungspunktfreies Flächenstück H, dessen vollständige Begrenzung von der Begrenzung des Bereichs B_1 einen endlichen Abstand hat. Innerhalb H ist die Funktion $f_N(z_1)$ eindeutig erklärt und leistet eben die eineindeutige Abbildung dieses Flächenstücks auf die Kreisfläche $K^{(r)}$, wobei der Begrenzungslinie der Fläche H die Peripherie von $K^{(r)}$ entspricht. Ist $n > N$ so wird $f_n(z_1)$ in H ebenfalls eindeutig erklärt sein und eine Abbildung vermitteln, bei welcher die Begrenzungslinie des Bildbereichs offenbar eine geschlossene, die Kreislinie $K^{(r)}$ einfach umschliessende Linie l_n ist. Daraus ergibt sich, dass nun auch die Grenzkurve l_∞ ganz ausserhalb $K^{(r)}$ verläuft und dass mithin H durch die Funktion $f_\infty(z_1)$ auf ein die Kreisfläche $K^{(r)}$ vollständig enthaltendes schlichtes Flächenstücke ineindeutig und regulär abgebildet wird.

C. Zweiter Teil.

Nähere Untersuchung der Abbildung.

§ 3.

Parabolische und hyperbolische Umlaufssubstitutionen zu isolierten Begrenzungspunkten bezw. Begrenzungslinien.

Die Kenntnis der durch die Funktion $\zeta = f(z)$ vermittelten konformen Abbildung führt dazu, eine *zum Bereiche B gehörende eigentlich diskontinuierliche Gruppe G* von linearen Substitutionen ins Auge zu fassen, bestehend aus lauter Substitutionen, welche die Fläche des ζ-Einheitskreises in sich transformieren. Betrachten wir nämlich irgend zwei Zweige der Funktion $f(z)$, etwa ζ_1 und ζ_2, so wird die zwischen ζ_1 und ζ_2 bestehende analytische Abhängigkeit eine solche sein, bei welcher sowohl die Funktion $\zeta_2(\zeta_1)$ als auch die Funktion $\zeta_1(\zeta_2)$ innerhalb des ζ-Einheitskreises eine reguläre und grenzstellenfreie analytische Funktion ist. D. h.: die Abhängigkeit zwischen ζ_1 und ζ_2 stellt sich dar als eine eineindeutige konforme Abbildung der Fläche des ζ-Einheitskreises auf sich selbst. Diese Abhängigkeit wird daher durch eine lineare Substitution vermittelt. Die Gesamtheit dieser Substitutionen bildet eine Gruppe G.

Wir beweisen folgenden Satz.

Satz: Die Funktion $f(z)$ erleidet bei einer einfachen vollständigen Umlaufung einer Begrenzungslinie des Bereichs B eine hyperbolische oder parabolische Substitution, jenachdem die betreffende Begrenzungslinie eine allgemeine Begrenzung oder eine ausgeartete Begrenzung ist, d. i. ein einzelner Punkt. —

Bekanntlich unterscheiden sich die hyperbolischen Substitutionen von den parabolischen dadurch, dass sie zwei getrennte Fixpunkte haben, die hier auf der Peripherie des Einheitskreises liegen müssen, während die parabolischen Substitutionen nur einen einzigen Fixpunkt haben, der hier ebenfalls auf der Peripherie des Einheitskreises liegen muss.

Betrachten wir etwa zunächst den Fall eines isolierten Begrenzungspunktes a des Bereichs B. Wir konstruieren um den Punkt a eine geschlossene Linie L, welche diesen Punkt in dessen unmittelbarer Umgebung einfach umschlingt. Wir wollen zeigen, dass der vollständigen Durchlaufung von L eine parabolische Substitution entspricht. Zunächst ist klar, dass die Funktion $f(z)$ sich nicht bei endlich vielen Umläufen um den Punkt a reproduzieren kann. Denn dies würde bedeuten, dass die zugehörende Substitution eine elliptische Substitution wäre, welche das Innere des Einheitskreises in sich transformiert und folglich einen Fixpunkt im Innern des Einheitskreises haben muss. Ein solcher innerer Fix-

punkt kann aber offenbar für keine Substitution der Gruppe G vorhanden sein, weil dann die Funktion $f(z)$ in mehreren von einander verschiedenen Zweigen einen und denselben Wert annehmen würde (entsprechend dem Fixpunkte), während sie doch, wie wir wissen, keinen Wert mehr als einmal annimmt. Wir schliessen somit, dass sich als Bild der Linie L im ζ-Einheitskreise eine Linie Λ ergibt, welche, wenn die zu untersuchende Substitution nicht parabolisch ist, zwei voneinander verschiedene Punkte der Peripherie des Einheitskreises miteinander verbindet. Durch Λ wird das Innere des Einheitskreises in zwei Gebiete zerlegt, deren eines, γ, als das Bild der durch L abgegrenzten Umgebung des Punktes a zu gelten hat. Ist λ derjenige Teil der Peripherie des Einheitskreises, welcher an der Begrenzung des Gebietes γ teilnimmt, so stellt sich uns nunmehr die Umkehrungsfunktion $z(\zeta)$ der Funktion $f(z)$ als eine Funktion dar, welche längs λ stetig in den Wert a übergeht und sich folglich nach einem Schwarz'schen Satze (Abhandlung I S. 210) überhaupt auf eine Konstante reduzieren muss. Das ist aber unmöglich. Mithin ist die der Umlaufung eines isolierten Begrenzungspunktes entsprechende Substitution eine parabolische Substitution.

Die Untersuchung zeigt zugleich, dass der Wertevorrat der Funktion $f(z)$ in einem in sich zusammenhängenden, durch die Linie L abgegrenzten Gewinde von Zweigen bei Zusammenziehung der Linie L auf den Punkt a sich auf einen einzigen Wert reduziert, nämlich den dem Fixpunkte der Umlaufssubstitution entsprechenden Wert.

Lassen wir jetzt an Stelle des Punktes a eine allgemeine Begrenzungslinie A treten. Wir ziehen wieder eine Linie L, welche einen sich an A anschliessenden zweifach zusammenhängenden Streifen S vom Bereiche B abtrennt. Der Linie L entspricht im ζ-Einheitskreise eine Linie Λ, welche, wenn angenommen wird, die für L sich ergebende Substitution der Funktion $f(z)$ sei parabolisch, von einem Punkte ζ_0 der Peripherie des Einheitskreises ausgeht und in demselben Punkte ζ_0 auch endigt. Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Bild des Bereichs S im Einheitskreise das Gebiet γ_1 oder γ_2 ist. Mit γ_1 bezeichnen wir nämlich dasjenige der beiden durch Λ bestimmten Teilgebiete des ζ-Einheitskreises, welches ζ_0 als einzigen Peripheriepunkt auf seiner Begrenzung hat, mit γ_2 dasjenige, welches die ganze Peripherie des Einheitskreises als Begrenzungsstück aufweist.

Ist das Bild γ von S mit γ_1 identisch, so bilden wir eine lineare Funktion ζ' der Grösse ζ so, dass an Stelle des Einheitskreises die obere ζ Halbebene und an Stelle des Punktes ζ_0 der Punkt ∞ tritt, an Stelle der betrachteten parabolischen Substitution die parabolische Substitution $\zeta' = \zeta' + 2\pi$. Ferner bilden wir nun $e^{i\zeta'} = \zeta''$ und erhalten auf diese Weise eine eineindeutige konforme Abbildung des Bereichs S auf einen schlichten zweifach zusammenhängenden Bereich

S'', dessen eine, der *Linie* A entsprechende Begrenzung von einem einzelnen *Punkte* gebildet wird, was nach einem Satze der Abhandlung I (S. 204) nicht möglich ist.

Ist zweitens das Bild γ von S mit γ_2 identisch, so gehen wir von der Bemerkung aus, dass die Funktion $f(z)$, wie aus dem Aufbau der Überlagerungsfläche Φ sich unmittelbar ergibt, unendlich viele von einander verschiedene Zweige besitzt, welche sogar in dem Sinne von einander verschieden sind, dass keine zwei derselben demselben Gewinde angehören, d. i. durch blosse Umlaufung der Linie A ineinander übergeführt werden können. Bilden wir mit einem solchen neuen Zweige und seinen bei Durchlaufung von L sich ergebenden weiteren Zweigen das Gebiet S ab, so wird das sich ergebende Bild $\bar{\gamma}$ vollständig in γ_1 enthalten sein müssen. Das ist aber im Widerspruch mit der Tatsache, dass zwischen dem jetzt betrachteten und dem ursprünglich betrachteten Zweige der Funktion $f(z)$ eine lineare Beziehung besteht, sodass auch für das Gebiet $\bar{\gamma}$ die für das Gebiet γ_2 geltende Bemerkung in Kraft bleibt, dass dieses Gebiet die vollständige Peripherie des Einheitskreises als Begrenzung besitzt.

Die Berufung auf den Aufbau der Fläche Φ kann übrigens vermieden werden. Man bilde den Bereich B, mit $z^{(1)}$ und $z^{(2)}$ zwei nicht auf der Linie A liegende, verschiedenen Begrenzungslinien von B angehörende Punkte bezeichnend, den Bereich B mittels der Funktion $z' = \log\frac{z - z^{(1)}}{z - z^{(2)}}$ auf einen Bereich B' ab, welcher nun unendlich viele diskrete Bilder der Linie A als Begrenzungslinien aufweist, deren jede mindestens ein neues Zweiggewinde liefert. Die Beweisführung gilt offenbar auch bei unendlich hohem Zusammenhange des Bereichs B.

§ 4.

Verhalten der Abbildungsfunktion $f(z)$ auf der Grenze (Grenzlinien und isolierte Grenzpunkte) des Bereichs B.

Nachdem wir uns über den Charakter der Substitutionen Rechenschaft gegeben haben, welche die Funktion $f(z)$ bei Umlaufung der einzelnen Begrenzungslinien erleidet, wollen wir nunmehr auf die *Frage des Verhaltens der Funktion $f(z)$* selbst in den Begrenzungslinien näher eingehen. Insbesondere wollen wir folgende Sätze beweisen.

1. In einem isolierten Begrenzungspunkte a lässt sich von jedem Zweige der Funktion $f(z)$ eine lineare Funktion in der Weise bilden, dass die so entstehende neue Funktion von z nach Abzug der Funktion $\log(z-a)$ sich im Punkte a regulär verhält. Es gehört auf diese Weise zu jedem Zweige der Funktion $f(z)$ in einem solchen Punkte ein ganz bestimmter Wert der Funktion oder, besser gesagt, zu jedem einzelnen Gewinde von Zweigen.

1 a. Zu verschiedenen bei a betrachteten Gewinden gehören ferner stets verschiedene Werte, ebenso zu je zwei Gewinden, die verschiedenen isolierten Begrenzungspunkten entsprechen.

2. Ist L eine geschlossene reguläre analytische Begrenzungslinie des Bereichs B, so verhält sich die Funktion $f(z)$ in jedem ihrer Zweige längs L regulär und kann demgemäss über die Begrenzung von L hinaus analytisch fortgesetzt werden. Das Analoge gilt, wenn L analytische Kurvenstücke besitzt, für das Verhalten der Funktion $f(z)$ auf diesen Stücken.

3. Ist eine Begrenzungslinie L von B eine Jordan-Kurve, so verhält sich die Funktion $f(z)$ in allen ihren Zweigen längs dieser Linie stetig, und es entsprechen verschiedenen Punkten der Linie immer auch verschiedene Werte der Funktion, desgleichen einem und demselben Punkte immer verschiedene Werte, wenn verschiedene Zweige der Funktion in Betracht gezogen werden.

4. Ist eine Begrenzungslinie L des Bereichs B eine Begrenzung allgemeinster Art, so ist gemäss den Entwicklungen des § 11 der Abhandlung I die Begrenzung als eine zyklisch angeordnete Gesamtheit von lauter Begrenzungselementen aufzufassen und es gelten dann zu 3. analoge Bemerkungen, sofern man diese Randelemente an Stelle der einzelnen Punkte treten lässt. Der präzise Inhalt dieser Behauptung ergibt sich aus den folgenden Beweisführungen.

Der Beweis des Satzes 1. ergibt sich aus der Bemerkung, dass die S. 268 gebildete Exponentialgrösse $\zeta^{\prime\prime}$ in Abhängigkeit von z uns eine Abbildung darbietet, welche der vollständigen Umgebung des isolierten Begrenzungspunktes die vollständige Umgebung des Nullpunktes entsprechen lässt, also nach dem Satze S. 204 der Abh. I durch eine im isolierten Begrenzungspunkte selbst reguläre analytische Funktion vermittelt wird, deren Ableitung in diesem Punkte von Null verschieden sein muss. Zugrunde liegt diesem Beweise der vorher gelieferte Nachweis, dass die zu einem isolierten Begrenzungspunkt gehörende Umlaufssubstitution parabolisch ist.

Die Richtigkeit von 1 a ergibt sich aus dem Umstande, dass zwei verschiedenen an der Überlagerungsfläche Φ beteiligten Gewinden unendlich hoher Ordnung lauter voneinander verschiedene Gebiete im Einheitskreise entsprechen, deren jedes einzelne eine ganze Kreisfläche enthalten muss, welche die Peripherie des Einheitskreises in einem Punkte, nämlich dem Fixpunkte der zu dem Gewinde gehörenden Umlaufssubstitution berührt.

Zum Beweise des Satzes 2. denken wir uns dem Bereich B längs der zu betrachtenden regulären analytischen Begrenzungslinie einen zweifach zusammenhängenden Flächenstreifen b angesetzt. Der Bereich $B + b$ werde mit B' bezeichnet. Nunmehr werde die zu B' gehörende Funktion $\bar{f}(z)$ gebildet, welche B' auf die

Fläche des Einheitskreises abbildet. Dieselbe lässt der Linie L eine bestimmte reguläre analytische Linie entsprechen, welche im Einheitskreise als Querschnitt erscheint. Das Bild, welches die Funktion $f(z)$ von B entwirft, ist ein Teilbereich der Fläche des Einheitskreises, welcher, entsprechend der Linie L, unendlich viele reguläre analytische Begrenzungsstücke aufweist, im übrigen jedoch ebenfalls einfach zusammenhängend ist. Bilden wir nun diesen einfach zusammenhängenden Bereich auf die Fläche des Einheitskreises ab gemäss dem gewöhnlichen Schmiegungsverfahren der Abhandlung I, so ergibt sich bei dieser Abbildung gemäss den Entwicklungen des § 9 der Abhandlung I eine reguläre analytische Abbildung der erwähnten analytischen Begrenzungsteile auf Stücke der Peripherie des Einheitskreises. Die letztgenannte Abbildung führt uns nun aber zu der eigentlich betrachteten Abbildung des Bereichs B auf die volle Fläche des Einheitskreises.

Ein anderer Weg ist der folgende. Wir bilden zunächst den Bereich B auf einen Bereich B' ab, bei welchem der Linie L eine Gerade G entspricht. Wir erreichen dies durch konforme Abbildung des von L allein begrenzten, B enthaltenden einfach zusammenhängenden Bereichs auf eine Halbebene. Bei dieser Hilfsabbildung nun wird nach § 8 der Abh. I die Linie L regulär analytisch auf G abgebildet. Daher genügt es, für den Bereich B' nachzuweisen, dass die zugehörende Abbildungsfunktion $\bar{f}(z)$ auf der Geraden G regulär ist. Diese Abbildungsfunktion kann nun aber erhalten werden, indem man zunächst B' an G spiegelt und für den gewonnenen erweiterten Bereich, bezeichnet etwa mit B'', die Abbildung auf die Fläche des Einheitskreises ausführt, wobei der Geraden G, gleichgültig welchen Zweig der Funktion $f(z)$ wir nehmen, ein vollständiger Orthogonalkreisbogen innerhalb des Einheitskreises entsprechen wird. Als Bild von B wird sich bei dieser Abbildung ein von unendlich vielen solchen vollständigen Orthogonalkreisbögen begrenztes Teilgebiet des Einheitskreises ergeben, welches einfach zusammenhängend ist und welches nun, um zu $f(z)$ zu gelangen, noch auf die volle Fläche des Einheitskreises abzubilden ist, wobei nun diesen Kreisbögen Teile der Peripherie des Einheitskreises regulär entsprechen werden, gemäss § 9 der Abhandlung I. Der Vorteil dieser Beweisführung gegenüber der ersten besteht darin, dass von den Entwicklungen des § 9 der Abh. I nur das auf kreisförmige Begrenzungsstücke Bezügliche benötigt wird.

Was nun den Inhalt der Sätze 3. und 4. anbetrifft, so bedarf derselbe kaum noch einer besonderen Begründung. Es genügt vielmehr, darauf hinzuweisen, dass wir vermöge der soeben eingeführten Hilfsabbildung des Bereichs B auf den Bereich B' mit einer begrenzenden Geraden (eine Hilfsabbildung, die uns ja auch dann zur Verfügung steht, wenn die Linie L eine Jordan-Kurve oder eine Begrenzung allgemeinster Art ist) in der Lage sind, die Frage auf den Fall einer

begrenzenden Kreislinie oder Geraden zurückzuführen. Wir haben nur zu beachten, dass bei der genannten Hilfsabbildung betreffs der Ränderzuordnung die Sätze des § 11 der Abhandlung I massgebend sind.

Durch wiederholte Anwendung der soeben benützten Hilfsabbildung sind wir in der Lage, den Bereich B als einen solchen zu wählen, dessen *Begrenzung von lauter geschlossenen regulären analytischen Linien* gebildet wird, wobei jedoch für jede einzelne dieser Begrenzungslinien die *Möglichkeit einer Reduktion derselben auf einen Punkt* zugelassen werden muss, in welchem Falle wir von einem ausgearteten Bereich B sprechen.

D. Dritter Teil.

Existenzbeweis der verzweigten Fundamentalabbildung beliebiger schlichter Bereiche mittels des Schmiegungsverfahrens.

§ 5.

Abbildung der signierten gewöhnlichen Kreisscheibe: Das Schmiegungsverfahren.

Wir denken uns in der z-Ebene, die wir, um die Analogie mit früherem hervortreten zu lassen, als z_1-Ebene bezeichnen, die Fläche des Einheitskreises, d. i. die Gesamtheit aller durch die Ungleichheitsbeziehung $|z_1| < 1$ definierten Punkte, signiert. D. h. wir wählen irgendwie eine endliche oder unendlich grosse Anzahl von Punkten dieses Bereichs (»Verzweigungspunkte») aus, welche sich im letzteren Falle nur gegen die Peripherie des Einheitskreises hin häufen sollen, und ordnen jedem der Verzweigungspunkte eine positive ganze Zahl (»Verzweigungszahl») zu, welche grösser oder gleich 2 ist, aber auch gleich ∞ sein kann. Nunmehr stellen wir folgendes Problem:

Problem: Es soll im Gebiete $|z_1| < 1$ eine, abgesehen von den vorgegebenen Verzweigungspunkten, durchweg reguläre analytische Funktion $\zeta = f(z_1)$ definiert werden, welche an den Verzweigungspunkten selbst sich in jedem ihrer Zweige so verhält, dass sie an einem Verzweigungspunkte a mit zugeordneter endlicher Verzweigungszahl n in Bezug auf die Grösse $\sqrt[n]{z_1 - a}$ als Entwicklungsgrösse sich regulär verhält, an einem Verzweigungspunkte mit zugeordneter Verzweigungszahl ∞ sich nach endlich vielen Umläufen um diesen Punkt herum niemals reproduziert. Die Funktion $f(z_1)$ soll unter den angegebenen Verzweigungsnebenbedingungen eine konforme Abbildung der Fläche

$|z_1|<1$ auf die Fläche $|\zeta|<1$ vermitteln, so dass sie im Gebiete $|z_1|<1$ jeden der Ungleichheitsbedingung $|\zeta|<1$ genügenden Wert einmal und nur einmal annimmt, andere Werte ζ jedoch nicht annimmt.

Wir gehen jetzt die Entwicklungen der §§ 1 u. 2 durch und sehen zu, welche Modifikationen und Ergänzungen diese Entwicklungen erfahren müssen, um auch für das jetzt zu behandelnde Problem Gültigkeit zu erlangen.

Zunächst bemerken wir, dass der Nachweis der Gültigkeit des Unitätssatzes im vorliegenden Falle keine neuen Überlegungen erfordert. Wir finden vielmehr, dass die Funktion $f(z_1)$, sofern sie überhaupt existiert, abgesehen von einer linearen, das Innere des Einheitskreises in sich überführenden Transformation vollständig bestimmt ist. Durch dieselben Überlegungen wird auch festgestellt, dass je zwei Zweige der zu bestimmenden Funktion $f(z_1)$ durch eine derartige lineare Transformation zusammenhängen, welche sich nun an einem Verzweigungspunkte a von endlicher Ordnung als eine elliptische Substitution (die zu a gehörende Umlaufssubstitution) der betreffenden Ordnung n darstellen wird, an einem Verzweigungspunkte der Ordnung ∞ jedoch als eine parabolische Substitution. Insbesondere letztere Behauptung erhellt sofort aus Entwicklungen der §§ 3 u. 4. Im Zusammenhang hiermit wird auch der analytische Charakter der Funktion $f(z_1)$ an den Verzweigungsstellen näher bestimmt. Wir erkennen, dass es an einer Verzweigungsstelle a von der endlichen Ordnung n zu jedem Zweige eine lineare Funktion desselben gibt, welche im Punkte a verschwindet und sich beim einfachen Umlaufe um a mit $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ multipliziert und sich in der Gestalt $\sqrt[n]{z_1-a}\,\{1+[(0)]\}$ entwickeln lässt, unter $[(0)]$ eine im Punkte a reguläre und in diesem Punkte selbst den Wert 0 annehmende Funktion verstanden, in einem Punkte a mit ∞ als zugeordneter Verzweigungszahl hingegen beim einfachen Umlaufe um den Punkt a den Zuwachs $2\pi i$ erfährt und sich in der Gestalt $\log(z_1-a)+[(0)]$ entwickeln lässt.

Der zu bestimmenden Funktion $f(z_1)$ entspricht eine über dem z_1-Einheitskreise ausgebreitet zu denkende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ, welche in allen ihren Blättern an den Verzweigungsstellen a Windungspunkte der Ordnung n bezw. ∞ hat. Diese einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche ist durch ihre angegebenen Verzweigungseigenschaften vollständig bestimmt. In der Tat würde die Annahme zweier derartiger Flächen Φ_1 und Φ_2 sofort eine als Punkt-Koinzidenz sich darstellende eineindeutige Beziehung derselben aufeinander involvieren, d. i. Identität. Wir gehen indessen auf diese Frage sowie auf die Frage der direkten topologischen Konstruktion der Fläche Φ hier nicht weiter ein, verweisen diesbezüglich vielmehr wieder auf die allgemeinen andern Ortes gegebenen Ausführungen (Journal f. Math. Bd. 139). Es muss wiederum bemerkt

werden, dass die Erledigung der genannten Fragen für unsere eigentlichen Entwicklungen nicht von wesentlichem Belang ist.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Funktion $f(z_1)$ selbst über. Das *Schmiegungsverfahren* nimmt jetzt folgende Gestalt an.[1] Zunächst werde der Einheitlichkeit halber angenommen, dass der Punkt $z_1 = 0$ nicht zu den vorgegebenen Verzweigungspunkten $a_k [k = 1, 2, 3, \ldots]$ gehört, eine Annahme, deren Zutreffen in jedem Falle durch eine evtl. vorzunehmende lineare Transformation erreicht wird. Wir bezeichnen jetzt, in Analogie zu dem oben § 2 gleich bezeichneten Punkte, mit α_1 den dem Nullpunkte am nächsten liegenden Verzweigungspunkt a_{k_1}. Wir konstruieren dann, mit n_k allgemein die zu a_k gehörende Verzweigungszahl bezeichnend, ein den Punkt α_1 als Windungspunkt $(n_{k_1} - 1)$-ter Ordnung besitzendes Windungsflächenstück und begrenzen dasselbe durch die n_{k_1}-mal zu durchlaufende Peripherie des Einheitskreises; in dieser Form bezeichnen wir das Windungsflächenstück mit W_1. Ist $n_{k_1} = \infty$, so ergibt sich ein Windungspunkt unendlich hoher Ordnung. Wir bezeichnen mit K_1 die Fläche des Kreises $|z_1| \leq |\alpha_1|$, mit R das im Nullpunkt befindliche, die Richtung der positiv reellen Halbaxe anzeigende Richtungselement. Die Fläche K_1 und das Element R gehört in unserer Auffassung nur einem Blatte der Fläche W_1 an. Nunmehr bilden wir durch eine elementare Funktion $z_2(z_1)$ die Fläche W_1 in der Weise eineindeutig konform auf die schlichte Fläche des z_2-Einheitskreises ab, dass das Richtungselement R dabei in sich übergeht. Die von α_1 verschiedenen Verzweigungsstellen denken wir uns in allen Blättern der Fläche W_1 mit der zugehörenden Verzweigungszahl markiert und bei der erwähnten Abbildung durch die Funktion $z_2(z_1)$ mitübertragen, während die zu α_1 gehörende Verzweigungszahl in der z_2-Ebene gelöscht wird, nämlich an der Stelle $z_2(\alpha_1)$.

Wir erhalten dadurch in der Fläche des z_2-Einheitskreises eine neue Signierung, bei welcher wiederum der Bedingung genügt ist, dass die an der Signierung beteiligten Punkte sich nur gegen die Peripherie des Einheitskreises häufen. Es ist die Bemerkung zu machen, dass der dem Nullpunkte am nächsten kommende Punkt α_2 in der Signatur des z_2-Einheitskreises der Bedingung

$$|\alpha_2| > |\alpha_1|$$

genügt, was ebenso wie die analoge Tatsache oben bewiesen wird. Nunmehr wird die elementare Funktion $z_3(z_2)$ in analoger Weise wie $z_2(z_1)$ gebildet als die Abbildungsfunktion einer im Punkte α_2 verzweigten Windungsfläche W_2, deren Blätterzahl gleich ist der zu α_2 gehörenden Verzweigungszahl. Auf W_2 hat man

[1] Vgl. meine Note in Gött. Nachr. 1912 S. 847.

sich in allen Blättern die Signatur des z_2-Einheitskreises markiert und sodann bei der Abbildung durch die Funktion $z_3(z_2)$ mitübertragen zu denken, während die bei α_2 vorliegende Signatur, als durch die Abbildung selbst bereits berücksichtigt, in der z_3-Ebene gelöscht wird, nämlich an der Stelle $z_3(\alpha_2)$.

Es ist klar, wie das Verfahren fortzusetzen ist.

Wir haben jetzt eine unendliche Folge von Funktionen

$$f_n(z_1) = z_n\{z_{n-1}[\ldots[z_2(z_1)]\ldots]\}$$

definiert, als deren Limes

$$f_\infty(z_1) = \lim_{n=\infty} f_n(z_1)$$

die zu bestimmende Funktion $f(z_1)$ sich ergeben wird.

Zum genauen Nachweise der Richtigkeit dieser Behauptung weisen wir zunächst auf das Bestehen der Relationen

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| < \ldots < |\alpha_n| < |\alpha_{n+1}| < \ldots$$

hin. Der Nachweis, dass

(*) $$\lim_{\nu=\infty} |\alpha_\nu| = 1$$

ist, erfordert gegenüber dem entsprechenden Nachweise in § 2 noch eine besondere Überlegung. Die Notwendigkeit einer solchen besonderen Überlegung ergibt sich aus dem Umstande, dass wir im vorliegenden Falle nicht immer ein und dieselbe Ordnungszahl für die Verzweigungspunkte der Fläche $W_1, W_2, W_3, \ldots$ haben, sondern durcheinander Ordnungszahlen von 2 bis ∞. Für unseren obigen Beweis war das Vorhandensein einer festen Ordnungszahl wesentlich. Namentlich kam dies bei der Betrachtung der Funktion $\sigma(\varrho)$ (Abh. I S. 186) zur Geltung.

Zum Nachweise der Limesgleichung (*) dient folgender Hilfssatz, dessen wesentlicher Inhalt der ist, dass die bei Anwendung einer Windungsfläche höherer als erster Ordnung bewirkte Anschmiegung jedenfalls noch stärker ist, als die bei Anwendung einer Windungsfläche erster Ordnung zustande kommende.

Hilfssatz: Es sei ϱ eine den Bedingungen $0 < \varrho < 1$ genügende positive reelle Zahl. Es sei K_ϱ die Fläche des Kreises $|z| \leq \varrho$. Ferner sei $W_\varrho^{(\nu)}$ die im Punkte ϱ verzweigte ν-blättrige Windungsfläche, welche durch die ν-fach zu durchlaufende Peripherie des Einheitskreises abgegrenzt wird. Die Kreisfläche K_ϱ werde in dem einen Blatte, dem Grundblatte der Fläche $W_\varrho^{(\nu)}$ besonders markiert

und, diesem Blatte entsprechend, mit $\varkappa_0$ bezeichnet. In demselben Blatte werde auch das positiv reelle Richtungselement R im Nullpunkte markiert. Nunmehr werde die Fläche $W_0^{(\nu)}$, unter Festhaltung des Richtungselementes R in K_0, in der bekannten elementaren Weise auf die schlichte Fläche des Einheitskreises abgebildet durch eine Funktion $Z^{(\nu)}(z)$.

Alsdann wird behauptet, dass für die ganze Fläche $\varkappa_0$ einschliesslich der Begrenzung die Ungleichheit besteht $|Z^{(\nu)}| > |Z^{(2)}|$ für alle $\nu > 2$. Nur für $z = 0$ selbst ist $Z^{(\nu)}(0) = Z^{(2)}(0) = 0$.

Beweis: Zum Beweise betrachten wir die Funktion $\log \frac{1}{|Z^{(\nu)}|}$ und vergleichen sie mit $\log \frac{1}{|Z^{(2)}|}$. Um diese Vergleichung für das Gebiet $\varkappa_0$ auszuführen, denken wir uns jetzt die Fläche $W_0^{(2\nu)}$ herangezogen. Auf dieser Fläche ist sowohl $\log \frac{1}{|Z^{(\nu)}|}$ als auch $\log \frac{1}{|Z^{(2)}|}$ eine eindeutige Potentialfunktion, erstere mit zwei logarithmischen Unstetigkeitsstellen, letztere mit ν solchen. Die genannten beiden Funktionen sind durch ihre angegebenen logarithmischen Unstetigkeitsstellen in Verbindung mit der Bedingung ihres Verschwindens am ganzen Rande von $W_0^{(2\nu)}$ vollständig bestimmt. Wir bilden nunmehr die Fläche $W_0^{(2\nu)}$ durch eine Funktion $z'(z)$ eineindeutig und konform auf die schlichte Fläche des z'-Einheitskreises ab, sodass dabei der Windungspunkt in den Nullpunkt übergeht. Die Übertragung der genannten Potentialfunktionen auf die Fläche des Einheitskreises liefert uns zwei in dieser Fläche eindeutig erklärte positive Potentialfunktionen, die am ganzen Rande verschwinden, deren erste nur an zwei reellen Stellen $-A$ und $+A$ logarithmisch unendlich wird, während die zweite an allen Stellen $-A e^{\frac{2\pi i}{\nu}\cdot\lambda} [\lambda = 1, 2, \ldots (\nu - 1)]$ logarithmisch unendlich wird. Ist nun ν eine grade Zahl, so ist sofort evident, dass die Differenz $U(z')$ der beiden zu vergleichenden Potentialfunktionen im ganzen z'-Einheitskreise positiv ist, weil sie am ganzen Rande verschwindet und nur positiv logarithmische Unstetigkeiten besitzt, die an den Stellen $-A e^{\frac{2\pi i}{\nu}\lambda}$ exkl. $-A$ und $+A$ selbst liegen. Ist hingegen ν eine ungrade Zahl, so wird die Funktion $U(z')$ an den genannten $\nu - 2$ Stellen ebenfalls positiv logarithmisch unendlich werden, ausserdem aber an der Stelle A negativ logarithmisch unendlich.

Hieraus geht zunächst hervor, dass in diesem Falle die Funktion $U(z')$ nicht im ganzen z'-Einheitskreise positiv sein kann. Was wir brauchen, ist nur, dass sie in dem in der z'-Ebene liegenden Bildgebiete $\varkappa_0'$ der Kreisfläche $\varkappa_0$ positiv ist. Diese Fläche $\varkappa_0'$ ist nun a beroffenbar als Teil enthalten in demjenigen Kreis-

sektor der Winkelöffnung $\frac{2\pi}{\nu}$, dessen Winkelhalbierende von der Strecke $0\ldots(-1)$ gebildet wird. In diesem Sektor ist die Funktion $U(z')$ jedenfalls von Unstetigkeiten frei. Längs des begrenzenden Peripheriestückes nimmt sie den konstanten Wert 0 an. Längs jedes der beiden Radienvektoren aber ergibt sie sich als positiv auf Grund der Bemerkungen, dass die bei A liegende negativ logarithmische Unstetigkeit gerade durch die in Bezug auf den betreffenden Radiusvektor symmetrisch zu ihr auftretende positiv logarithmische Unstetigkeit aufgehoben wird. Man muss nämlich beachten, dass die Funktion $U(z')$ als eine Summe von Potentialfunktionen aufgefasst werden kann, deren einzelne immer nur eine Unstetigkeit besitzt, sodass nun jede der in Betracht kommenden Unstetigkeiten in der Tat ihren bestimmten Beitrag zur Funktion $U(z')$ liefert.

Der Fall $\nu=\infty$ wird zweckmässig auf anderem Wege erledigt. In diesem Falle liefert eine einfachere Betrachtung das Resultat

$$|Z^{(\infty)}|>|Z^{(2)}|.$$

Man kann nämlich die Fläche $W_\varrho^{(\infty)}$ in der Weise konstruieren, dass man zunächst $W_\varrho^{(2)}$ konstruiert und relativ zu dieser Fläche in deren Windungspunkt ϱ eine relative Windungsfläche der Ordnung ∞ konstruiert. Dementsprechend wird $Z^{(\infty)}$ gefunden, indem man zunächst $Z^{(2)}$ bildet und von der $Z^{(2)}$-Ebene aus noch eine logarithmische Abbildung vornimmt, deren logarithmischer Verzweigungspunkt im Punkte $Z^{(2)}(\varrho)$ liegt. Insofern nun gemäss dem Schwarzschen Lemma bei jeder der genannten beiden Abbildungen für den einzelnen Punkt eine Vergrösserung des Abstandes vom Nullpunkte eintritt, ergibt sich ohne weiteres: $|Z^{(\infty)}|>|Z^{(2)}|$.

Nach dem hiermit gelieferten Nachweise der Limesgleichung (*) ist weiter noch besonders zu zeigen, dass die Grenzfunktion $f_\infty(z_1)$ tatsächlich, wie es sein soll, in all den vorgegebenen Verzweigungspunkten a_k und zwar in allen ihren Zweigen die verlangte Verzweigungseigenschaft besitzt. Dieser Punkt ist deswegen nicht ohne weiteres einleuchtend, weil wir bei der Wahl der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ein Prinzip befolgt haben, welches von vornherein nicht erkennen lässt, dass jeder Punkt a_k wirklich einmal an die Reihe kommt und, wenn dies schon eintritt, ob dann alle Zweige der zu bestimmenden Funktion $f_\infty(z_1)$ zur Berücksichtigung kommen. Man muss ja bedenken, dass in der z_n-Ebene der einzelne Punkt a_k nicht mehr durch einen einzelnen Bildpunkt, sondern durch endlich viele oder gar unendlich viele solche Bildpunkte repräsentiert wird.

Die Beantwortung der gestellten Frage ergibt sich folgendermassen. Wir

fassen irgend einen von den gegebenen Verzweigungspunkten ins Auge. Es sei dies der Punkt A und seine zugeordnete Verzweigungszahl sei N. Wir verbinden denselben mit dem Nullpunkt der z_1-Ebene durch eine Linie L, welche keinen der übrigen Verzweigungspunkte und auch den Nullpunkt nicht zum zweiten Male trifft, im übrigen aber eine beliebige, sich selbst auch beliebig oft schneidende Bahn innerhalb des z_1-Einheitskreises darstellt. Wir betten jetzt die Linie L in einen einfach zusammenhängenden begleitenden Flächenstreifen S ein, welcher nun nach Art einer Riemannschen Fläche an den Schnittpunkten der Linie L mit sich selbst mehrblättrig erscheinen wird. Betrachten wir nunmehr in S die Funktionen $f_n(z_1)$. Dieselben sind in diesem Gebiete offenbar alle eindeutig, und wir behaupten jetzt, dass von einem gewissen n ab die Funktion $f_n(z_1)$, wie sie in S erklärt ist, im Punkte A einen Verzweigungspunkt der Ordnung N besitzt. Zum Zwecke dieses Nachweises betrachten wir die bei den sukzessiven Schmiegungsoperationen in der z_2-Ebene, z_3-Ebene, ... zu Stande kommenden Bilder des Flächenstreifens S, welche Bilder wir mit S_1, S_2, ... bezeichnen. Nehmen wir nun an, dass die Funktionen $f_n(z_1)$ in S für jedes n eindeutig seien, mithin $z_{n+1}(z_n)$ unverzweigt in $A^{(n)}$, d. i. dem in S_n enthaltenen Bildpunkte von A, so würde notendig $|A^{(n)}|$ mit unbegrenzt wachsendem n gegen 1 konvergieren müssen wegen der Relation $\lim |\alpha_\nu| = 1$. In der Tat würden ja sonst für ein gewisses n der Punkt $A^{(n)}$ als Punkt α_n zur Bildung der Riemannschen Fläche W_n und der Funktion $z_{n+1}(z_n)$ in Betracht kommen.

Nun ist aber andererseits wiederum unmöglich, dass $|A^{(n)}|$ sich 1 beliebig nähern kann; denn jedenfalls müsste die als Bild der Linie L in der z_n-Ebene sich ergebende Linie L^n mit $A^{(n)}$ als Endpunkt und dem Nullpunkte als Anfangspunkt in einem gewissen, von n unabhängig bestimmbaren Teilbezirke, ($|z| < q < 1$), des Einheitskreises enthalten bleiben (vgl. hierzu S. 266 der vorliegenden Abhandlung).

Die somit bewiesenermassen bei einem gewissen Wert n' des n zum ersten Male auftretende Verzweigung der Ordnung N im Punkte A des Streifens S kann nun offenbar nicht durch spätere Operationen aufgehoben werden.

Wir bemerken noch folgendes. Wenn N die Ordnungszahl irgend einer von α_1 verschiedenen, an der Signatur des z_1-Einheitskreises beteiligten Stelle ist, so findet sich diese Ordnungszahl offenbar für jedes n auch in der Signatur des z_n-Einheitskreises und zwar mehrmals vor. Die unmittelbar voranstehende Entwicklung gestattet alsdann den Schluss, dass die Zahl N unendlich oft als Verzweigungszahl der Fläche W_n figurieren muss. Dieser Umstand aber gestattet uns, den Nachweis der Limesgleichung (*) ohne den Hilfssatz S. 275 zu erbringen, unter Einführung der in § 2 der Abhandlung I definierten Funktion $\sigma(\varrho)$, die jetzt unter Zugrundelegung der Ordnungszahl N statt 2 zu bilden wäre.

§ 6.

Abbildung der dreifach signierten Vollebene durch die Schwarzschen Dreiecksfunktionen und Abbildung der Vollebene durch das elliptische Integral erster Art.

Nachdem wir im Vorgehenden das Problem der Fundamentalabbildung der signierten gewöhnlichen endlichen Kreisscheibe vollständig erledigt haben, wollen wir nunmehr das entsprechende Problem für die signierte Vollebene behandeln und zwar speziell unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der gegebenen Verzweigungspunkte a_k entweder kleiner oder gleich 3 ist oder schliesslich gleich 4, wobei dann noch alle vier Verzweigungszahlen gleich 2 angenommen werden. Diese Spezialfälle werden uns in § 7 die Lösung der schliesslich in Betracht zu ziehenden allgemeinsten Aufgabe (beliebig signierte Vollebene und beliebig signierter allgemeiner Bereich) vermitteln.

Die gestellte Aufgabe erweist sich in gewissen Fällen als von vornherein unmöglich, nämlich in den Fällen, in welchen eine Abbildung mit der vorgegebenen relativen Verzweigung entweder auf die Vollebene selbst oder auf die ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes ausgeführt werden kann, Abbildungen, welche wir im weiteren Sinne auch als Fundamentalabbildung bezeichnen können. Es sind dies die bekannten Fälle mit zwei und diejenigen mit drei, vier Verzweigungspunkten, für welche die Summe $\sum \frac{1}{n_k} \geqq 1$ ist.

Im Falle von nur zwei vorgegebenen Verzweigungspunkten ergibt sich ausserdem die Nebenbedingung, dass die beiden vorgegebenen Verzweigungspunkte dieselbe zugeordnete Verzweigungszahl besitzen müssen. Ist die Bedingung erfüllt, so leistet die Funktion $\sqrt[n]{\frac{z-a_1}{z-a_2}}$ bezw. $\log\frac{z-a_1}{z-a_2}$ die in Frage kommende Abbildung.

Im Falle von drei vorgegebenen Verzweigungspunkten haben wir für n_1, n_2, n_3 die Fälle (2, 2, 2), (2, 2, $n > 2$), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5) zuerst zu nennen, in welchen $\sum \frac{1}{n_k} > 1$ ist und eine Abbildung auf die Vollebene ausgeführt werden kann.

Diese Abbildung vollzieht sich in den erst genannten vier Fällen im Einklang mit dem Grundprinzip des Schmiegungsverfahrens durch Wurzeloperationen, im zweiten Falle speziell für $n = \infty$ unter Mitbenutzung einer log-Operation.

Wir nehmen etwa den Fall (2, 3, 4) als Beispiel. Es seien a_1, a_2, a_3 die drei gegebenen Verzweigungspunkte. Zu der Funktion $z' = \sqrt{\frac{z-a_1}{z-a_3}}$ gehört eine zweiblättrige Riemannsche Fläche, auf welcher wir uns die Stelle a_2 in beiden Blättern

markiert denken mit der Verzweigungszahl 3, ferner a_3 mit der Verzweigungszahl 2. In der z'-Ebene bekommen wir dann an den Stellen $a_2^{(1)}$ und $a_2^{(2)}$, d. i. den zwei Bildpunkten von a_2, je eine Verzweigungszahl 3, an der Stelle $a_3^{(1)}$, d. i. dem Bildpunkte von a_3, die Verzweigungszahl 2. D. h.: Wir sind beim Falle (2, 3, 3) angelangt. Dieser Fall, für den wir hier wieder die alte Bezeichnung a_1, a_2, a_3 der Verzweigungspunkte einführen, erledigt sich nun so. Wir bilden $z' = \sqrt[3]{\frac{z-a_2}{z-a_3}}$ und bekommen dann an den drei Bildpunkten $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$, $a_1^{(3)}$ des Punktes a_1 je eine Verzweigungszahl 2. Dadurch erhalten wir den Fall (2, 2, 2). Dieser erledigt sich, wenn wir hier wieder die Bezeichnung a_1, a_2, a_3 für die Verzweigungspunkte einführen, folgendermassen: Wir bilden $z' = \sqrt{\frac{z-a_1}{z-a_2}}$ und bekommen dann bei $a_3^{(1)}$ und $a_3^{(2)}$, d. i. den Bildpunkten von a_3, je eine Verzweigungszahl 2. Von da führt dann eine Quadratwurzeloperation zur schlichten unsignierten Vollebene.[1]

Der Fall (2, 3, 5) lässt sich nicht so behandeln.[2] Wir finden die gesuchte Abbildung auf eine schlichte Vollebene im vorliegenden Falle, als Umkehrungsfunktion einer rationalen Funktion. Diese rationale Funktion wird gefunden, indem wir zunächst das sphärische Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$ konstruieren, dessen bezügliche Eckpunkte mit A, B, C bezeichnet werden mögen. Die symmetrische Wiederholung des Dreiecks A, B, C um den Punkt B herum oder um den Punkt C herum führen uns auf das Grunddreieck des regulären Ikosaeders bezw. auf das Grundpentagon des regulären Dodekaeders, und von da aus in bekannter Weise zur vollständigen Ausfüllung der Vollkugel. Die 60 Deckbewegungen der Ikosaedergruppe liefern uns jetzt eine Gruppe von 60 linearen Substitutionen $S_\lambda(\zeta)$ in der ζ-Ebene. Bezeichnen wir mit ζ_0 einen beliebigen Punkt der ζ-Ebene, welcher jedoch mit keinen Eckpunkte der Dreiecksteilung der ζ-Ebene zusammenfallen soll, so wird $z = \sum_{\lambda=1}^{60} S_\lambda\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_0}\right)$ offenbar eine Abbildung der schlichten Ebene auf eine 60-blättrige, einfach zusammenhängende, geschlossene Riemannsche Fläche in der z-Ebene leisten, welche Fläche nur in drei Punkten verzweigt ist mit den Verzweigungszahlen 2, 3, 5.

[1] Wir haben hier in neuer Auffassung die Auflösung der von Klein als Oktaedergleichung bezeichneten Gleichung gegeben, indem wir so zu sagen den umgekehrten Ausgangspunkt nahmen. Vgl. Klein »Vorlesungen über das Ikosaeder» S. 96 ff. Vgl, auch Vivanti »Les fonctions polyédriques et modulaires» S. 268—271. Paris, 1910.

[2] F. Klein: Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen». Math. Ann. Bd. 61. S. 369 ff.

Die Fälle mit drei gegebenen Verzweigungspunkten und Verzweigungszahlen n_1, n_2, n_3 mit der Nebenbedingung $\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{n_k}=1$, d. s. die Fälle (2, 2, ∞), (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3) gestatten eine analoge Behandlung. Der erste Fall erledigt sich sofort durch Anwendung einer Quadratwurzel- und einer Logarithmus-Operation. Der zweite, dritte und vierte Fall erledigt sich durch Angabe derjenigen Funktion $z(\zeta)$, welche die konforme Abbildung des geradlinigen Dreiecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}, \frac{\pi}{n_3}$ auf die Halbebene leisten, d. i. bezüglich die Funktion $(\wp' u)^2 \sim \wp^3 u$, $\wp^2(u) \sim \wp'' u$, $\wp' u$ [1], mit quadratischem Periodenparallelogramm im mittleren Falle und einem aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzten rhombischen Periodenparallelogramm in den beiden andern Fällen.[2] Die Grösse $\zeta = u$ als Funktion von z kann ihrerseits nach SCHWARZ direkt als Integral dargestellt und auch auf diese Weise erklärt werden. Vgl. hierzu die nachfolgende Behandlung des elliptischen Integrals.

Der Fall (2, 2, 2, 2) wird in bekannter Weise durch das elliptische Integral erster Art erledigt, welches die konforme Abbildung auf die ganze Ebene exkl. ∞ leistet. Wir werden dabei die Integralfunktion $u(z)$ im Sinne potenzreihentheoretischer Betrachtungsweise erklären, als die durch die Integration der für den Integranden geltenden Potenzreihenentwicklung entstehende, nach den Grundsätzen der Potenzreihentheorie analytisch fortzusetzende Funktion. Dass diese Funktion die gewünschte Abbildung leistet, ergibt sich nach diesen Grundsätzen am einfachsten wohl wie folgt. Die Funktion $u(z)$ lässt sich an jeder Stelle der zum Integranden $\frac{1}{\sqrt{Z}}$, gehörenden Riemannschen Fläche R eindeutig umkehren, und es gehört auf diese Weise zu jeder Stelle $(z_0, \sqrt{Z_0})$ der Riemannschen Fläche ein gewisser Radius ϱ, als Radius des grössten um die zugehörende Stelle u_0 als Mittelpunkt existierenden Kreises, innerhalb dessen die Funktion $z(u)$ noch den Charakter einer rationalen Funktion besitzt. Die Grösse ϱ ist auf der geschlossenen Riemannschen Fläche R eine stetige, eindeutige, überall positive Funktion des Ortes, deren Werte folglich oberhalb einer gewissen positiven von Null verschiedenen Schranke γ bleiben. Darin liegt aber, dass die Umkehrungsfunktion $z(u)$ im Endlichen überhaupt keine Grenzstellen darbieten kann, an welcher sie aufhört, den Charakter einer rationalen Funktion zu besitzen. Denn man kann

[1] Das Zeichen ∼ soll andeuten, dass die beiden durch dieses Zeichen verbundenen Funktionen ganze lineare Transformationen von einander sind. Es ist ferner statt ζ der in der Theorie der elliptischen Funktionen übliche Buchstabe u gebraucht.

[2] Vgl. meine Abhandlung Math. Ann. Bd. 67 S. 168.

ja nun von jeder Stelle aus in jeder Richtung mindestens noch um das Stück γ weitergehen, ohne den Charakter einer rationalen Funktion für die Funktion $z(u)$ aufzugeben.[1]

Wir betrachten nunmehr den allgemeinen Fall von drei relativen Verzweigungspunkten in der z-Vollebene, wobei die Summe $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{n_k} < 1$ vorausgesetzt wird.

Wir konstruieren dazu das Kreisbogendreieck $A\,B\,C$ mit den Winkeln $\frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}, \frac{\pi}{n_3}$ an den bezüglichen Ecken A, B, C. Wir wählen die Bezeichnung so, dass $n_1 \leqq n_2 \leqq n_3$ ist. Die Konstruktion des Kreisbogendreiecks selbst ist elementar. Wir denken es uns als Dreieck mit dem Einheitskreise der ζ-Ebene als Orthogonalkreis, und zwar innerhalb dieses Kreises liegend. Nunmehr bestimmen wir mittels des Schmiegungsverfahrens, wie wir dasselbe in der Abhandlung I zur Anwendung brachten, diejenige Funktion $z(\zeta)$, welche das Innere des Dreiecks $A\,B\,C$ auf die obere Halbebene abbildet und können nach derselben Methode, die wir bei der elliptischen Modulfunktion oben § 1 anwandten, den analytischen Charakter der Funktion $z(\zeta)$ längs der Begrenzung des Kreisbogendreiecks bestimmen und nun durch den Spiegelungsprozess die analytische Fortsetzung der Funktion $z(\zeta)$ innerhalb der ganzen Fläche des Einheitskreises vornehmen. Die Tatsache der zustandekommenden vollständigen Ausfüllung des Einheitskreises zeigt dann, dass wir in der Funktion $\zeta(z)$ die gesuchte Abbildungsfunktion $f(z)$ besitzen.

Es wird nicht überflüssig sein, an dieser Stelle einige, die *Topologie der Schwarzschen Dreiecksgruppen* betreffende Bemerkungen hinzuzufügen, welche in übersichtlicher Weise das topologische Gesetz erkennen lassen, nach welchem sich bei der symmetrischen Wiederholung des Dreiecks $A\,B\,C$ gemäss dem Symmetrieprinzip die vollständige Ausfüllung des Einheitskreises vollzieht. Wir bringen dabei das *Prinzip der kranzförmigen Erweiterung* zur Anwendung in einer Form, bei welcher wir stets die *Bedingung der Konvexität* der die Fläche des Einheitskreises nach und nach ausschöpfenden Näherungspolygone erfüllen werden. Die Bedingung der Konvexität eines Gebietes bezw. ist so zu verstehen, dass die als Orthogonalkreisbogen konstruierte Verbindung je zweier Punkte des Gebiets ganz in dem Gebiete selbst enthalten ist.

Erfüllen erstens alle drei n_k die Bedingung $n_k \geqq 3$, so findet das Prinzip der kranzförmigen Erweiterung bei vollständiger Aufrechterhaltung auch der Konvexität aller Näherungspolygone unmittelbar Anwendung. Wir gruppieren zu-

[1] Vgl. die Behandlung bei E. Picard, »Traité d'analyse« Bd. II, pag. 336, 1893.

nächst um das Ausgangsdreieck alle mit einer Seite oder auch nur einer Ecke daran anstossenden. Wir fügen diesen ersten Kranz neuer Dreiecke hinzu und erhalten einen umschliessenden konvexen Linienzug, welcher das erste Näherungspolygon darstellt. Die Eckpunkte desselben sind sämtlich entweder zweizipfelig oder dreizipfelig, je nachdem in demselben zwei oder drei Dreiecke von innen her anstossen. Nunmehr werden längs der Begrenzungslinie des ersten Näherungspolygons alle mit einer Seite oder Ecke anstossenden weiteren Dreiecke hinzugefügt, welche zusammen den zweiten Kranz bilden. Die dadurch erweiterte Figur stellt das zweite Näherungspolygon dar. Dasselbe ist ebenfalls konvex und hat nur zweizipfelige oder dreizipfelige Eckpunkte. So geht es weiter von Kranz zu Kranz, ohne dass jemals eine Schwierigkeit auftritt.

Es ergibt sich auch eine Abschätzung der Anzahl der Kränze, welche ausreichen, um eine vollständige Bedeckung irgend eines mit dem Einheitskreise konzentrischen Kreises vom Radius $r < 1$ zu haben. Man muss dazu die durch den Logarithmus eines Doppelverhältnisses in bekannter Weise dargestellte nichteuklidische Entfernung zweier Punkte innerhalb des Einheitskreises in Betracht ziehen. Die Punkte mit dem euklidischen Abstande r vom Nullpunkte haben eine bestimmte nichteuklidische Entfernung vom Nullpunkte, welcher innerhalb des Ausgangsdreiecks $A\,B\,C$ liegen möge. Die beiden Begrenzungslinien irgend eines Kranzes haben ihrerseits einen nichteuklidischen Abstand voneinander, für welchen unabhängig von der Wahl des Kranzes eine untere Schranke d bestimmt werden kann. Man denke sich zu dem Zwecke das Dreieck $A\,B\,C$ an jeder Seite einmal gespiegelt. Man erhält dadurch die neuen Eckpunkte A', B', C'. Die Grösse d kann dann gewählt werden als die kleinste unter den kürzesten nichteuklidischen Entfernungen zwischen Strecke $A\,B$ und Streckenzug $A'\,C\,B'$, Strecke $B\,C$ und Streckenzug $B'\,A\,C'$, Strecke $C\,A$ und Streckenzug $C'\,B\,A'$.

Die Fälle, in welchen $n_1 = 2$ ist, lassen sich nicht in derselben Weise unmittelbar behandeln. Wir können sie jedoch erledigen gemäss dem Prinzip der kranzförmigen Erweiterung unter Aufrechterhaltung der Konvexitätsbedingung, indem wir zuvor von dem Dreieck $A\,B\,C$ zu einer anderen konvexen Grundfigur (Dreieck, Viereck, n-Eck) übergehen.

Haben wir den Fall $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ so ist $n_3 \geqq 7$. Wir nehmen dann zu dem Dreieck $A\,B\,C$ die daraus durch Spiegelung um B herum hervorgehenden, an B anstossenden fünf weiteren Dreiecke hinzu und erhalten dadurch als neue Grundfigur ein Dreieck mit den drei gleichen Winkeln $\frac{2\pi}{n_3}$ und B als Mittelpunkt.

Nehmen wir den Fall $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, so ist $n_3 \geqq 5$. Wir erhalten auf ana-

loge Weise wie vorher jetzt als neue Grundfigur ein Viereck mit lauter gleichen Winkeln $\frac{2\pi}{n_3}$ und B als Mittelpunkt.

Haben wir schliesslich $n_1 = 2$, $n_2 \geq 5$, $n_3 \geq n_2$, so ergibt dasselbe Verfahren als neue Grundfigur ein n_2-Eck mit lauter gleichen Winkeln $\frac{2\pi}{n_3}$ und B als Mittelpunkt. In allen Fällen liefert das Prinzip der kranzförmigen Erweiterung, auf die neuen Grundfiguren angewandt, nur konvexe Figuren mit lauter zweizipfeligen Eckpunkten als Näherungspolygone.

§ 7.

Abbildung der allgemeinsten signierten schlichten Bereiche.

Wir sind nunmehr in der Lage, die Fundamentalabbildung der signierten schlichten Bereiche im allgemeinsten Falle durchzuführen, nämlich durch Reduktion auf behandelte Fälle, insbesondere auf das in § 5 behandelte Problem der Abbildung der signierten gewöhnlichen Kreisscheibe.[1]

Wir denken uns einen beliebigen endlich- oder unendlich-vielfach zuzammenhängenden schlichten Bereich B in der z-Ebene gegeben und statten denselben mit einer Signatur aus, indem wir endlich oder unendlich viele Punkte a_k im Innern desselben, die sich nur gegen die Grenze von B häufen sollen, markieren und denselben Verzweigungszahlen n_k zuordnen, die auch ∞ sein können. Der Sinn des zu stellenden Abbildungsproblems ist klar. Die zu bestimmende Funktion heisse $f(z)$. Wir können nun zunächst mit dem unsignierten Bereich B die Fundamentalabbildung ausführen, wobei wir im Falle, dass der Bereich B einfach oder zweifach zusammenhängend ist, eine Abbildung auf die ganze Ebene exkl. ∞ bekommen können, aber auch den Fall der Vollebene als des gegebenen Bereichs B von vornherein mit in Betracht ziehen müssen. Die Signatur haben wir uns bei der erwähnten Fundamentalabbildung mit übertragen zu denken, wobei jeder markierte Punkt im allgemeinen unendlich viele Bildpunkte für die neue Signatur liefern wird.

Wir sehen aus dem Vorstehenden, dass es genügt, das Problem für drei Fälle zu behandeln, nämlich für die *signierte gewöhnliche Kreisscheibe*, die *signierte unendliche Kreisscheibe* (ganze Ebene exkl. ∞) und für die *signierte Vollebene*. Dabei ist noch zu sagen, dass im letzteren Falle nur endlich viele Punkte in der

[1] Vgl. meine Note: »Zur Uniformisierung der algebraischen Kurven«, Gött. Nachr. 1907, desgl. meine Abhandlung, »Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Zweiter Teil«, Journal f. Math., Bd. 139, §§ 5 u. 6.

Signatur auftreten können, weil sonst Häufungspunkte vorhanden wären und alsdann das Problem zweckmässig als ein Abbildungsproblem für einen nicht geschlossenen Bereich, dessen Begrenzung von den Häufungspunkten gebildet wird, betrachtet werden würde.

Die Abbildung der signierten *unendlichen Kreisscheibe* (excl. ∞) reduziert sich folgendermassen auf die der signierten endlichen Kreisscheibe. Es sei λ die Anzahl der signierten Punkte a_k mit den Verzweigungszahlen n_k. λ kann auch unendlich sein, in welchem Falle auffassungsgemäss $\lim\limits_{k=\infty} |a_k| = \infty$ ist.

Der Fall $\lambda = 1$ erledigt sich sofort durch eine Wurzel- bezw. Logarithmus-Operation vollständig.

Der Fall $\lambda = 2$ erledigt sich vollständig, indem man den unendlich fernen Punkt mit der Verzweigungszahl ∞ behaftet und nunmehr die Ebene mit der durch die Verzweigungszahlen n_1, n_2, ∞ bestimmten Dreicksfunktion abbildet.

Im Falle $\lambda \geqq 3$ ist zu unterscheiden, ob alle n_k gleich 2 sind oder nicht. Im letzteren Falle nehmen wir einen Verzweigungspunkt, dessen Verzweigungszahl grösser als 2 ist, dazu irgend einen zweiten und schliesslich den Punkt ∞, indem wir diesem die Verzweigungszahl ∞ zuordnen. Nun wird die signierte Ebene mittelst der durch die drei genannten Punkte mit ihren zugeordneten Verzweigungszahlen bestimmten Dreiecksfunktion auf eine gewöhnliche signierte Kreisscheibe abgebildet. Wir gelangen so zum Falle des in § 5 behandelten Abbildungsproblems für die gewöhnliche signierte Kreisscheibe.

Sind im Falle $\lambda \geqq 3$ alle Verzweigungszahlen n_k gleich 2, so bilden wir die signierte z-Ebene mittels $z' = \sqrt{\frac{z - a_1}{z - a_2}}$ auf eine signierte zweifach punktierte Ebene ab. Nunmehr ordnen wir den beiden Punktierungsstellen je die Verzweigungszahl ∞ zu und nehmen noch irgend einen Punkt der Signatur der z'-Ebene mit seiner Verzweigungszahl hinzu. Durch die damit bestimmte Dreiecksfunktion erhalten wir eine Abbildung auf die gewöhnliche Kreisscheibe, deren Signatur aus der ursprünglich gegebenen durch die Abbildung bestimmt wird.

Es bleibt noch der *Fall der Vollebene* als des gegebenen Bereichs B zu behandeln. Die Anzahl λ ist dann endlich und kann $\geqq 3$ vorausgesetzt werden, da $\lambda = 3$ durch die Dreiecksfunktionen erledigt ist. Ebenso ist der Fall $\lambda = 4$, wenn alle Verzweigungszahlen gleich 2 sind, durch das elliptische Integral erster Art vorweg erledigt.

Es sind nun zwei Unterfälle zu unterscheiden.

Es kann nämlich erstens sein, dass sich unter den Verzweigungszahlen n_k drei solche befinden, für welche die Summe der reziproken Werte kleiner oder höchstens gleich 1 ist. Alsdann liefert die dadurch definierte Dreiecksabbildung

der signierten z-Ebene sofort die Reduktion auf den Fall der signierten gewöhnlichen oder unendlichen Kreisscheibe.[1]

Ist zweitens für keine drei Verzweigungsstellen die erwähnte Bedingung erfüllt, so wählen wir irgend drei der Verzweigungsstellen und bilden für die zugehörenden Verzweigungszahlen die betreffende Dreiecksfunktion, welche mindestens vierdeutig ist. Wir bekommen vermöge derselben eine Abbildung wieder auf eine signierte Vollebene, wobei nun aber in der neuen Signatur *vier untereinander gleiche Verzweigungszahlen* auftreten werden. Von hier aus kommen wir, falls diese vier Verzweigungszahlen sämtlich gleich 2 sind, durch das elliptische Integral erster Art auf die signierte unendliche Kreisscheibe, desgleichen, wenn alle gleich 3 sind, mittels der durch drei derselben bestimmten Dreiecksfunktion auf die unendliche signierte Kreisscheibe, wenn alle vier grösser als 3 sind, mittels der durch drei derselben bestimmten Dreiecksfunktion auf die signierte gewöhnliche Kreisscheibe.[2]

Hiermit ist die Reduktion vollendet.

Zum Schluss bemerken wir noch, dass wir im Vorhergehenden das Problem der Abbildung allgemeinster signierter Bereiche in der Weise behandelt haben, dass wir zunächst die relativ unverzweigte Kreisabbildung des Bereichs vorgenommen haben. Wir hätten statt dessen auch den Bereich mit seiner Signatur direkt behandeln können, in der Weise, dass wir auf einen signierten Teilbereich innerhalb des Einheitskreises zu kommen suchen, der nicht mit der ganzen Fläche des Einheitskreises identisch zu sein braucht. Das Schmiegungsverfahren kann dann auf einen solchen Bereich mit Signatur in der Tat direkt angewandt werden. Man hat nur zu beachten, dass bei der Auswahl des jeweilig nächsten Punktes, der als Punkt a_n zur Bildung der Fläche W_n dient, nun auch die Grenzpunkte des jeweiligen Bereichs mit zur Konkurrenz kommen neben den markierten Verzweigungspunkten. Eine Erschwerung des Beweisverfahrens wird hierdurch nicht bedingt.

Wir erwähnen zum Schlusse auch noch, dass die Eigenschaft eines Punktes, isolierter Grenzpunkt des abzubildenden Bereichs B zu sein oder innerer Punkt des Bereichs B mit zugeordneter Verzweigungszahl ∞, als gleichwertig erscheinen, von dem trivialen Falle abgesehen, dass der Bereich B die einfach punktierte Vollebene ist und entweder kein oder nur ein Verzweigungspunkt und zwar dieser mit endlicher Verzweigungszahl gegeben ist.

[1] Vgl. hierzu S. Johansson's Anwendung dieser Dreiecksfunktion zur Majorantenbildung in Math. Ann. Bd. 62, S. 192.

[2] Vgl. meine S. 284 unten zitierten Abhandlungen.

E. Vierter Teil. (§ 8.)

Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche.

Nach Kenntnis der verzweigten Fundamentalabbildung der Vollebene, die wir in § 7 durchgeführt haben, gelingt jetzt verhältnismässig einfach die Lösung des Problems, zu einer vorgelegten geschlossenen Riemannschen Fläche eine dazu gehörende algebraische Funktion zu konstruieren. Abgesehen von der Einfachheit und Durchsichtigkeit des eingeschlagenen Weges ist besonders der durchaus funktionentheoretische Charakter der ganzen Beweisführung hervorzuheben, welche vollständig und allein auf den elementaren Grundlagen der Potenzreihentheorie beruht.

Es sei F irgend eine über der z-Ebene ausgebreitete geschlossene endlich-vielblättrige Riemannsche Fläche mit endlich vielen Windungspunkten. Es wird die Konstruktion einer auf der Fläche F eindeutigen analytischen Funktion $w(z)$ verlangt, welche überall auf der Fläche den Charakter einer algebraischen Funktion besitzt und ausserdem in zwei verschiedenen Blättern der Fläche F niemals identisch, d. h. für variables z dieselben Funktionswerte annimmt. Die letztere Bedingung kann auch in Form der Forderung formuliert werden, dass die Funktion $w(z)$ als Funktion von z n von einander verschiedene Zweige haben soll, wenn n die Anzahl der Blätter der Riemannschen Fläche F ist.

Wir markieren in der schlichten z-Ebene diejenigen Stellen, an welchen die Fläche F in irgend einem Blatte einen Windungspunkt hat. Es seien dies die Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$.

Im Falle $\nu = 2$ ist die Lösung der Aufgabe trivial. In diesem Falle kann nämlich die Riemannsche Fläche F offenbar nur die Gestalt einer bei a_1 und a_2 je einen und nur einen Windungspunkt $(n-1)$-ter Ordnung besitzenden Fläche haben, zu welcher als Funktion $w(z)$ unmittelbar die Funktion $\sqrt[n]{\frac{z-a_1}{z-a_2}}$ angegeben werden kann.

Ist $\nu \geqq 3$, so verfahren wir folgendermassen. Wir bestimmen jeder Stelle a_k entsprechend das kleinste gemeinschaftliche Vielfache n_k aller zu a_k gehörenden Windungszahlen, d. i. der um 1 vermehrten Ordnungszahlen der über a_k liegenden Windungspunkte. Nunmehr wird die zu $a_1, \ldots, a_\nu$ als Verzweigungspunkten und $n_1, \ldots n_\nu$ als Verzweigungszahlen gehörende Fundamentalabbildung bestimmt, deren Existenz oben bewiesen worden ist.

Die Abbildungsfunktion $\zeta(z)$ kann eine endlich- oder unendlich-vieldeutige Funktion von z sein. Wir betrachten jetzt diese Funktion als Funktion auf der Riemannschen Fläche F und bezeichnen sie als solche mit $\zeta(\tilde{z})$. Die Funktion

$\zeta(\bar{z})$ wird auf der Fläche F nur an den Stellen a_k relativ verzweigt sein können. Die relative Verzweigungszahl an einer solchen Stelle ist offenbar gleich $\frac{n_k}{N}$, wenn N die Windungszahl des betreffenden Punktes $\bar{a}_k$ ist.

Die Funktion $\zeta(\bar{z})$, wie sie sich gemäss den Prinzipien der analytischen Fortsetzung als Funktion auf F ergibt, kann weder an einer und derselben Stelle $\bar{z}$ noch an zwei von einander verschiedenen Stellen $\bar{z}$ denselben Wert annehmen. Diese Bemerkung versteht sich von selbst, sofern die beiden Punkte $\bar{z}$ über verschiedenen Punkten der z-Ebene liegen, weil ja bekannt ist, dass die Funktion $\zeta(z)$ an zwei von einander verschiedenen Punkten der z-Ebene nur verschiedene Werte haben kann. Dass $\zeta(\bar{z})$ an einer und derselben Stelle $\bar{z}$ nicht in zwei verschiedenen ihrer Zweige einen und denselben Wert annimmt, ist ebenfalls klar, weil dies nach den Eigenschaften der Funktion $\zeta(\bar{z})$ nur so möglich wäre, dass in den beiden betreffenden Zweigen der Funktion $\zeta(\bar{z})$ Übereinstimmung der Werte nicht nur an der einen Stelle $\bar{z}$, sondern für variabel gedachtes $\bar{z}$ bestehen müsste. Alsdann würden wir aber nach dem Begriff der Funktion $\zeta(\bar{z})$ die betreffenden beiden Zweige dieser Funktion nicht mehr als verschiedene Zweige betrachten.

Dass schliesslich die Funktion $\zeta(\bar{z})$ auch nicht an zwei in der z-Ebene koinzidierenden, auf der Fläche F jedoch verschiedenen Punkten $\bar{z}$, etwa $\bar{z}^{(1)}$ und $\bar{z}^{(2)}$, einen und denselben Wert ζ^* annehmen kann, ergibt sich daraus, dass andernfalls die Funktion $\bar{z}(\zeta)$ eine mehrdeutige Funktion von ζ wäre, indem sie nämlich an der Stelle ζ^* sowohl den Wert $\bar{z}^{(1)}$ als auch den Wert $\bar{z}^{(2)}$ annähme, welche beiden Werte auf dem Wege einer gewissen analytischen Fortsetzung innerhalb des ζ-Gebietes (Einheitskreis, punktierte Ebene, Vollebene) in einander übergehen. Das ist nun aber andererseits unmöglich, weil die Funktion $\bar{z}(\zeta)$ eine unverzweigte Funktion ist und weil das ζ-Gebiet einfach zusammenhängend ist.

Von der Funktion $\zeta(\bar{z})$ ausgehend bilden wir nunmehr eine Funktion $w(\bar{z})$ in folgender Weise.

Liegt erstens der Fall der Abbildung auf die Vollebene für $\zeta(z)$ vor, so ist die Funktion $\zeta(z)$, also auch die Funktion $\zeta(\bar{z})$ endlich-vieldeutig. Es wird die Funktion $\zeta(\bar{z})$ an einer und nur einer Stelle $\bar{z}^{(0)}$ und zwar nur in einem ihrer Zweige von erster Ordnung unendlich. Wir können noch annehmen, dass der Punkt $\bar{z}^{(0)}$ ein von allen Punkten a_k verschiedener Punkt sei. Wir bilden jetzt, mit $\zeta^{(1)}(\bar{z})$, $\zeta^{(2)}(\bar{z}), \ldots \zeta^{(N)}(\bar{z})$ die verschiedenen Zweige der Funktion $\zeta(\bar{z})$ bezeichnend die Summe

$$w(\bar{z}) = \sum_{\lambda=1}^{N} \zeta^{(\lambda)}(\bar{z}).$$

Alsdann ist $w(\tilde{z})$ offenbar eine Funktion der verlangten Art, die übrigens nur an einer Stelle, nämlich der Stelle $\tilde{z}^{(0)}$, unendlich wird und zwar erster Ordnung.

Liegt zweitens der Fall der Abbildung auf die ganze Ebene (excl. ∞) für $\zeta(z)$ vor, so denken wir uns die Fläche F, deren Geschlecht p grösser oder gleich o sein kann, mittels p Rückkehrschnittpaaren von einem gemeinschaftlichen, allgemein gehaltenen Kreuzungspunkte $\tilde{o}$ aus zu einer einfach zusammenhängenden Fläche aufgeschnitten, die so aufgeschnittene Fläche sodann noch weiter aufgeschnitten durch Einschnitte von $\tilde{o}$ nach allen Punkten $\tilde{a}_k$ $[k = 1, \ldots \nu]$ auf F, deren Windungszahl kleiner als n_k ist. Die so aus F entstandene einfach zusammenhängende Fläche werde mit F' bezeichnet. Die Funktion $\zeta(\tilde{z})$ nimmt auf Grund der vorangeschickten Untersuchung in F an zwei verschiedenen Stellen immer auch verschiedene Werte an. Ein Zweig derselben bildet die Fläche F' auf einen schlichten Fundamentalbereich in der ζ-Ebene ab, dessen, den verschiedenen Zweigen entsprechende euklidisch kongruente Wiederholungen die ganze ζ-Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes einfach bedecken. Nunmehr wird innerhalb F' ein gewöhnlicher Punkt $\tilde{z}^{(0)}$ beliebig gewählt. Ihm entsprechen unendlich viele Punkte $\zeta^{(\lambda)}_{(0)}$. Wir bilden die unendliche Reihe

$$W(\zeta) = \sum_{\lambda} \frac{1}{(\zeta^{(\lambda)} - \zeta^{(\lambda)}_{(0)})^3},$$

welche in der ganzen ζ-Ebene gleichmässig konvergent ist und eine analytische Funktion darstellt, die gegenüber den Substitutionen des Fundamentalbereichs ungeändert bleibt. Der Nachweis der gleichmässigen Konvergenz vollzieht sich, wie der entsprechende Beweis für die Reihe der Funktion $\wp'(u)$ in der Theorie der elliptischen Funktionen. Der Umstand, dass hier nicht nur Parallelverschiebungen, sondern auch Drehungen als Substitutionen in Frage kommen, verursacht keine neue Schwierigkeit, weil die Punkte $\zeta^{(\lambda)}$ und $\zeta^{(\lambda)}_{(0)}$ in einem quadratischen bezw. gleichseitig rhombischen Periodengitter so untergebracht sind, dass in keinem einzelnen Quadrat oder Rhombus des Gitters mehr als vier bezw. sechs der Punkte liegen können. Um zur Funktion $w(\tilde{z})$ zu gelangen, brauchen wir die Funktion $W(\zeta)$ nur auf die Fläche F zu übertragen.

Liegt schliesslich der allgemeine Fall vor, so verwandeln wir wieder die Fläche F in die einfach zusammenhängende Fläche F', die dann durch die Funktion $\zeta(z)$ auf einen Fundamentalbereich und dessen die Fläche des ζ-Einheitskreises ausfüllende Wiederholungen abgebildet wird. Nunmehr wird die Funktion

$$W(\zeta) = \frac{\Theta_1(\zeta)}{\Theta_2(\zeta)} - w(z)$$

als Quotient zweier POINCARÉ'schen Reihen gleicher Dimension gebildet. Die Funktion $\Theta_2(\zeta)$ werde im Fundamentalbereich unendlich bei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$, null bei $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$. Es sei M die Höchstordnung dieser Nullstellen. Alsdann werde die Funktion $\Theta_1(\zeta)$ so bestimmt, dass sie im Fundamentalbereich nur an einer von den α und β verschiedenen Stelle $\zeta_{(0)}$ unendlich der Ordnung $M + 1$ wird. Bei dieser Wahl wird $w(z)$ eine eindeutige Funktion auf F, welche nur an einer Stelle unendlich wird von der Ordnung $M + 1$, an anderen Stellen jedoch höchstens von M-ter Ordnung. Die Funktion $w(z)$ gehört demnach eigentlich zur Riemannschen Fläche F.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass man die beiden ersterwähnten Fälle mit unter den allgemeinen Fall subsumieren kann, indem man statt der n_k Multipla derselben als Verzweigungszahlen wählt. Auch kann man es immer so einrichten, dass diese Multipla für die verschiedenen a_k einander gleich sind, was für den Existenzbeweis der Funktion $\zeta(z)$ eine Erleichterung bietet, insofern als dann der Hilfssatz pag. 275 unmittelbar entbehrlich wird.

ESSAI SUR LES FONCTIONS Θ DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Par

PAUL APPELL

à Paris.

Première partie.

I. Dans les Annales de la Faculté des Sciences de Marseille pour 1891, t. I, p. 1—7, j'ai considéré une fonction définie par une série simple, ayant comme terme général une exponentielle dont l'exposant est un polynôme du quatrième degré par rapport au rang n du terme. J'ai indiqué (loc. cit. et Bulletin de la Société mathématique de France, t. XIX, année 1890—91, p. 125—127) des relations fonctionnelles que vérifient cette fonction et d'autres fonctions qui s'en déduisent. Enfin, je suis revenu sur ce sujet dans deux notes des *Comptes Rendus: Sur les fonctions Θ de degrés supérieurs*, 25 Septembre 1911, t. 153, p. 584—587, *Sur les fonctions Θ du quatrième degré*, 2 Octobre 1911, t. 153, p. 617—618, et dans un article des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo: Sur des fonctions se rattachant aux fonctions Θ du quatrième degré*, séance du 10 Décembre 1911, t. XXXIII, p. 86—89. En 1892 M. l'Abbé Rivereau a publié dans le tome II des Annales de la Faculté des Sciences de Marseille un article relatif à la fonction que j'avais définie dans le tome I. Je publie ici la première partie de l'ensemble de ces recherches.

II. *Fonction Θ fondamentale du quatrième degré.* En modifiant légèrement la notation autrefois adoptée, posons

$$(1)\qquad \begin{cases} (n,4) = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \\[2mm] (n,3) = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \\[2mm] (n,2) = \dfrac{n(n-1)}{1.2} \\[2mm] (n,1) = n, \end{cases}$$

en remarquant que chacune de ces fonctions est la différence de la précédente, par rapport à l'accroissement 1:

$$(2)\qquad \begin{cases} (n,3) = (n+1,4) - (n,4) \\ (n,2) = (n+1,3) - (n,3) \\ (n,1) = (n+1,2) - (n,2). \end{cases}$$

Soient enfin A une constante dont la partie réelle est *négative* et X, Y, Z des variables complexes.

Nous appellerons *fonction Θ fondamentale du quatrième degré* la fonction entière:

$$(3)\qquad \Theta(A, X, Y, Z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{(n,4)\, A + (n,3)\, X + (n,2)\, Y + (n,1)\, Z}.$$

Cette fonction vérifie les quatre relations

$$(4)\qquad \begin{cases} \Theta(A, X + 2\pi i, Y, Z) = \Theta(A, X, Y, Z) \\ \Theta(A, X, Y + 2\pi i, Z) = \Theta(A, X, Y, Z) \\ \Theta(A, X, Y, Z + 2\pi i) = \Theta(A, X, Y, Z) \\ \Theta(A, X + A, Y + X, Z + Y) = e^{-Z}\Theta(A, X, Y, Z). \end{cases}$$

Les trois premières de ces relations sont évidentes, car les coefficients de X, Y, Z dans le terme général de la série (3) sont des entiers. Quant à la quatrième des relations (4) on l'obtient de la façon suivante; les identités (2) montrent que

$$\Theta(A, X + A, Y + X, Z + Y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{(n+1,4)\, A + (n+1,3)\, X + (n+1,2)\, Y + (n,1)\, Z};$$

si l'on remplace, dans l'exposant, $(n,1)$ par $(n+1,1) - 1$ et si l'on remarque que, n variant de $-\infty$ à $+\infty$, on peut remplacer $n+1$ par n, on a la quatrième des relations (4). On remarquera que la substitution faite sur les lettres A, X, Y, Z dans cette quatrième relation, consiste à *ajouter à chacune des trois dernières lettres X, Y, Z la précédente.*

Il est évident enfin que la fonction Θ conserve la même valeur quand on remplace X, Y, Z par des valeurs X_1, X_1, Z_1 telles que, dans l'exposant du terme général de la série (3) les coefficients de n^3 et de n changent de signe, celui de n^2 restant le même.

Pour obtenir ces valeurs remarquons que

$$(5)\qquad \begin{cases} (-n,4)=(n+3,4)=(n,4)+3(n,3)+3(n,2)+(n,1) \\ (-n,3)=-(n+2,3)=-(n,3)-2(n,2)-(n,1) \\ (-n,2)=(n+1,2)=(n,2)+(n,1) \\ (-n,1) \qquad\qquad\qquad =-(n,1). \end{cases}$$

Donc en écrivant

$$A(-n,4)+X(-n,3)+Y(-n,2)+Z(-n,1)=A(n,4)+X_1(n,3)+Y_1(n,2)+Z_1(n,1)$$

on voit que

$$(6)\qquad X_1=3A-X, \qquad Y_1=3A-2X+Y, \qquad Z_1=A-X+Y-Z$$

ce qu'on peut écrire, sous forme symétrique,

$$(6')\qquad X+X_1=3A, \qquad Y-X=Y_1-X_1, \qquad Z+Z_1-\frac{1}{2}(Y+Y_1)=-\frac{1}{2}A.$$

III. *Fonctions Θ générales du quatrième degré d'ordre α.* Désignons par ω une constante dont la partie réelle est négative, par x, y, z trois variables complexes, et considérons le polynôme

$$\varphi(n)=\alpha(n,4)+\beta(n,3)+\gamma(n,2)+\delta(n,1)$$

où n est un entier quelconque, α un entier positif, différent de zéro, β, γ, δ des entiers déterminés arbitrairement choisis positifs, négatifs ou nuls.

Ce polynôme prend des valeurs entiers pour toute valeur entière, positive, négative ou nulle de n. Nous aurons alors, en désignant par $Df(n)$ une différence telle que $f(n+1)-f(n)$:

$$D\varphi(n)=\alpha(n,3)+\beta(n,2)+\gamma(n,1)+\delta$$

$$DD\varphi(n)=D^2\varphi(n)=\alpha(n,2)+\beta(n,1)+\gamma$$

$$DD^2\varphi(n)=D^3\varphi(n)=\alpha(n,1)+\beta$$

$$DD^3\varphi(n)=D^4\varphi(n)=\alpha.$$

Cela posé, considérons la fonction entière de x, y, z:

$$(7)\qquad \theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\omega\varphi(n)+xD\varphi(n)+yD^2\varphi(n)+zD^3\varphi(n)}.$$

Cette fonction de x, y, z possède la période $2\pi i$ par rapport à chacune des variables séparément: elle vérifie, de plus, la relation

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x+\omega, y+x, z+y\\ \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta\end{pmatrix} = e^{-\alpha z}\,\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}. \tag{8}$$

En effet, calculant, sur la série, le premier membre de la relation (8) et remarquant que

$$\begin{aligned}\varphi(n) + D\varphi(n) &= \varphi(n+1)\\ D\varphi(n) + D^2\varphi(n) &= D\varphi(n+1)\\ D^2\varphi(n) + D^3\varphi(n) &= D^2\varphi(n+1)\\ D^3\varphi(n) \qquad\qquad &= D^3\varphi(n+1) - \alpha,\end{aligned}$$

on voit que ce premier membre est égal au produit de $e^{-\alpha z}$ par la série (7), où n est remplacé par $(n+1)$: ce qui démontre la relation (8).

La fonction $\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}$ peut s'exprimer à l'aide de la fonction Θ fondamentale. En effet, en ordonnant l'exposant du terme général de la série (7) par rapport à $(n, 4)$, $(n, 3)$, $(n, 2)$ et $(n, 1)$, on a, pour cet exposant

$$\alpha\omega(n,4) + (\alpha x + \beta\omega)(n,3) + (\alpha y + \beta x + \gamma\omega)(n,2) +$$
$$+ (\alpha z + \beta y + \gamma x + \delta\omega)(n,1) + \beta z + \gamma y + \delta x.$$

En comparant cet exposant à celui du terme général de la fonction fondamentale $\Theta(A, X, Y, Z)$, on voit que

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix} = e^{\beta z + \gamma y + \delta x}\,\Theta(A, X, Y, Z) \tag{9}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} A &= \alpha\omega\\ X &= \alpha x + \beta\omega\\ Y &= \alpha y + \beta x + \gamma\omega\\ Z &= \alpha z + \beta y + \gamma x + \delta\omega.\end{aligned}\right. \tag{10}$$

Toutes les fonctions θ qui dépendent de quatre entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se ramènent donc au seul élément analytique Θ.

IV. *Réduction de l'entier β.* Quand l'entier positif α est choisi, on peut, dans les formules précédentes, donner aux entiers β, γ, δ des valeurs arbitraires. Mais il est à remarquer qu'on peut toujours ramener β à avoir l'une des valeurs

$$0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1.$$

En effet, l'entier n prenant, dans la série (7) toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, on ne change pas la somme de la série en remplaçant, dans le terme général, n par $n+k$, k désignant un entier arbitrairement choisi. Le polynôme $\varphi(n)$ est alors remplacé par un autre

$$\psi(n) = \varphi(n+k) = \varphi(k) + n\,D\varphi(k) + (n,2)\,D^2\varphi(k) + (n,3)\,D^3\varphi(k) + (n,4)\,D^4\varphi(k),$$

ou, en intervertissant l'ordre et remplaçant les différences par leurs valeurs

$$\psi(n) = \alpha(n,4) + (\alpha k + \beta)(n,3) + [\alpha(k,2) + \beta k + \gamma](n,2) + \\ + [\alpha(k,3) + \beta(k,2) + \gamma k + \delta](n,1) + \varphi(k).$$

La série devient alors

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix} = e^{\omega\varphi(k)}\,\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta', \gamma', \delta'\end{pmatrix}$$

où

$$\beta' = \alpha k + \beta$$
$$\gamma' = \alpha(k,2) + \beta k + \gamma$$
$$\delta' = \alpha(k,3) + \beta(k,2) + \gamma k + \delta,$$

k étant arbitraire.

Il existe toujours une valeur de k et une seule, positive, négative ou nulle, telle que β' soit égal à l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1$. C'est cette valeur que nous attribuerons à k. La fonction θ, où β est quelconque, pourra donc toujours, au facteur constant $e^{\omega\varphi(k)}$ près, être remplacée par une fonction analogue où

(11) $$0 \leq \beta \leq \alpha - 1.$$

A l'avenir, dans toutes les fonctions θ considérées, β sera supposé vérifier cette condition (11).

Le nombre positif α étant appelé *l'ordre de la fonction* θ, on voit qu'il existe une *infinité* de fonctions

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}$$

d'ordre donné α: on les obtient toutes en faisant

$$\beta = 0, 1, 2, \ldots \alpha - 1,$$

$$\gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty$$

$$\delta = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty.$$

V. *Changement de n en $-n$.* Si dans $\varphi(n)$ on change n en $-n$, on obtient un nouveau polynôme qui donne la même fonction θ

$$\varphi_1(n) = \varphi(-n) = \alpha(n, 4) + \beta_1(n, 3) + \gamma_1(n, 2) + \delta_1(n, 1),$$

d'où, en se reportant aux relations (5) et (6)

$$\beta_1 = 3\alpha - \beta, \quad \gamma_1 = 3\alpha - 2\beta + \gamma, \quad \delta_1 = \alpha - \beta + \gamma - \delta.$$

On a alors

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix} = \theta\begin{pmatrix}\omega, & x, & y, & z\\ \alpha, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}$$

VI. *Substitution inverse.* La fonction θ admet la période $2\pi i$ par rapport à chacune des variables x, y, z; elle vérifie la relation

$$\theta(\omega, x + \omega, y + x, z + y) = e^{-az}\theta(\omega, x, y, z)$$

ou

$$\theta(\omega, x', y', z') = e^{-az}\theta(\omega, x, y, z)$$

en posant

$$x' = x + \omega, \qquad y' = y + x, \qquad z' = z + y.$$

La substitution inverse donne

$$x = x' - \omega, \qquad y = y' - x' + \omega, \qquad z = z' - y' + x' - \omega;$$

on a donc aussi

(12) $$\theta(x' - \omega, y' - x' + \omega, z' - y' + x' - \omega) = e^{a(z' - y' + x' - \omega)}\theta(x', y', z').$$

VII. *Fonction entière la plus générale vérifiant les mêmes relations fonctionnelles qu'une fonction θ d'ordre α.* Cherchons la fonction entière la plus générale $G(x, y, z)$ vérifiant les relations

(13) $$\begin{cases} G(x + 2\pi i, y, z) = G(x, y, z) \\ G(x, y + 2\pi i, z) = G(x, y, z) \\ G(x, y, z + 2\pi i) = G(x, y, z) \\ G(x + \omega, y + x, z + y) = e^{-az}G(x, y, z) \end{cases}$$

où α est un entier *positif* donné; nous allons montrer que cette fonction G est une fonction linéaire, à coefficients constants, des fonctions θ d'ordre α

$$G(x,y,z) = \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha-1} \sum_{\gamma=-\infty}^{\gamma=+\infty} \sum_{\delta=-\infty}^{\delta=+\infty} A_{\beta,\gamma,\delta}\, \theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix},$$

où les coefficients $A_{\beta,\gamma,\delta}$ sont des constantes. C'est ce qui résulte de la méthode des coefficients indéterminés. D'abord les trois premières relations (13) montrent que G est développable en une série de la forme

$$G(x,y,z) = \Sigma B_{l,m,n} e^{lx+my+nz}$$

les trois entiers l, m, n prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et les $B_{l,m,n}$ étant des coefficients indépendants de x, y, z.

L'entier positif α étant donné, groupons d'abord les termes dans lesquels n est de la forme

$$n = \alpha p + \beta,$$

où p est un entier variant de $-\infty$ à $+\infty$ et β un entier déterminé ayant une des valeurs

$$0, 1, 2, \ldots \alpha - 1,$$

de telle façon que p soit le quotient et β le reste de la division de n par α. La série se décompose ainsi en une somme de α séries:

$$G = \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha-1} \sum_{l,m,p} B_{l,m,\alpha p+\beta}\, e^{lx+my+(\alpha p+\beta)z}$$

l, m, p variant de $-\infty$ à $+\infty$. Prenons les termes qui correspondent à une valeur déterminée de β:

$$G_\beta = \sum_{l,m,p} B_{l,m,\alpha p+\beta}\, e^{lx+my+(\alpha p+\beta)z}.$$

Introduisons à la place de l et m d'autres entiers γ et δ en posant

$$m = \gamma + \beta p + \alpha(p, 2)$$

$$l = \delta + \gamma p + \beta(p, 2) + \alpha(p, 3).$$

A chaque groupe de valeurs de l, m, p répond un seul groupe de valeurs de γ, δ, p et réciproquement. Nous pourrons alors écrire

$$G_\beta = \sum_{\gamma,\delta,p} C_{\gamma,\delta,p}\, e^{x\varphi_1(p) + y\varphi_2(p) + z\varphi_3(p)}$$

en posant pour abréger

$$\begin{aligned}
l &= \varphi_1(p) = \delta + \gamma p + \beta(p,2) + \alpha(p,3) \\
m &= \varphi_2(p) = \varphi_1(p+1) - \varphi_1(p) = D\varphi_1(p) \\
n &= \varphi_3(p) = \varphi_2(p+1) - \varphi_2(p) = D^2\varphi_1(p).
\end{aligned}$$

Il reste à écrire que la fonction G_β vérifie la relation

$$G_\beta(x+\omega, y+x, z+y) = e^{-az}G_\beta(x,y,z).$$

On devra avoir

$$\Sigma C_{\gamma,\delta,p}\, e^{\omega\varphi_1(p) + x[\varphi_1(p)+\varphi_2(p)] + y[\varphi_2(p)+\varphi_3(p)] + z\varphi_3(p)} = \Sigma C_{\gamma,\delta,p}\, e^{x\varphi_1(p) + y\varphi_2(p) + z\varphi_3(p) - az}.$$

Mais comme

$$\begin{aligned}
\varphi_1(p) + \varphi_2(p) &= \varphi_1(p+1) \\
\varphi_2(p) + \varphi_3(p) &= \varphi_2(p+1) \\
\varphi_3(p) \qquad &= \varphi_3(p+1) - a
\end{aligned}$$

on a

$$\Sigma C_{\gamma,\delta,p}\; e^{\omega\varphi_1(p)}\, e^{x\varphi_1(p+1) + y\varphi_2(p+1) + z\varphi_3(p+1) - az} = \Sigma C_{\gamma,\delta,p}\, e^{x\varphi_1(p) + y\varphi_2(p) + z\varphi_3(p) - az}$$

ou, en changeant, dans le premier membre, p en $p - 1$

$$\Sigma C_{\gamma,\delta,p-1}\, e^{\omega\varphi_1(p-1)}\, e^{x\varphi_1(p) + y\varphi_2(p) + z\varphi_3(p) - az} = \Sigma C_{\gamma,\delta,p}\, e^{x\varphi_1(p) + y\varphi_2(p) + z\varphi_3(p) - az}.$$

Les entiers qui multiplient x, y, z dans les exponentielles des deux membres étant égaux, les coefficients sont égaux, et on a

$$C_{\gamma,\delta,p} = C_{\gamma,\delta,p-1}\, e^{\omega\varphi_1(p-1)}.$$

Ecrivons cette relation en y remplaçant successivement p par $1, 2, 3, \ldots p$, et multiplions membre à membre les relations obtenues, nous aurons enfin

$$\begin{aligned}
C_{\gamma,\delta,p} &= C_{\gamma,\delta,0}\, e^{\omega[\varphi_1(0) + \varphi_1(1) + \cdots + \varphi_1(p-1)]} \\
&= C_{\gamma,\delta,0}\, e^{\omega\varphi(p)},
\end{aligned}$$

en posant

$$\varphi(p) = \alpha(p, 4) + \beta(p, 3) + \gamma(p, 2) + \delta p.$$

La fonction G_β est alors

$$G_\beta = \sum_{\gamma, \delta, p} C_{\gamma, \delta, o} e^{\omega \varphi(p) + x D\varphi(p) + y D^2\varphi(p) + z D^3\varphi(p)}.$$

Faisons d'abord la sommation par rapport à p, en laissant β, γ, δ constants: nous aurons comme coefficient de $C_{\gamma, \delta, o}$ une fonction $\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}$. Nous écrirons à la place de $C_{\gamma, \delta, o}$ un coefficient $A_{\beta, \gamma, \delta}$ pour rappeler que $C_{\gamma, \delta, o}$ peut dépendre de β. Nous aurons ainsi

$$G_\beta(x, y, z) = \sum_{\gamma, \delta} A_{\beta, \gamma, \delta}\, \theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}. \tag{14}$$

D'où enfin, pour la fonction G

$$G(x, y, z) = \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha-1} G_\beta(x, y, z) = \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha-1} \sum_{\gamma=-\infty}^{\gamma=+\infty} \sum_{\delta=-\infty}^{\delta=+\infty} A_{\beta, \gamma, \delta}\, \theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}.$$

Telle est donc l'expression générale des fonctions entières vérifiant les relations (13). Cette expression renferme une double infinité de coefficients arbitraires $A_{\beta, \gamma, \delta}$ β variant de 0 à $\alpha - 1$ et γ, δ prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

En remplaçant $\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}$ par son expression à l'aide de la fonction fondamentale Θ, on a aussi

$$G(x, y, z) = \sum_{\beta, \gamma, \delta} A_{\beta, \gamma, \delta}\, e^{\delta x + \beta y + \gamma z}\, \Theta(A, X, Y, Z) \tag{15}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} A &= \alpha\omega \\ X &= \alpha x + \beta\omega \\ Y &= \alpha y + \beta x + \gamma\omega \\ Z &= \alpha z + \beta y + \gamma x + \delta\omega. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

La fonction entière $G(x, y, z)$ que nous venons de trouver et qui est définie par l'équation (15) renferme une infinité de coefficients arbitraires $A_{\beta, \gamma, \delta}$. On

pourra évidemment chercher à disposer de ces coefficients de telle façon que la fonction G vérifie d'autres relations fonctionnelles distinctes des relations (13). Nous reviendrons plus tard sur ce point.

VIII. *Fonctions méromorphes laissées invariables par les substitutions du groupe d'une fonction θ du quatrième degré.*

Soit en général $G(x, y, z/\alpha)$ une fonction entière vérifiant les quatre relations fondamentales (13). Nous venons de donner l'expression générale de la fonction G. Quand nous voudrons mettre en évidence l'ordre α, nous écrirons $G(x, y, z/\alpha)$. Nous appellerons ces fonctions G des fonctions entières générales d'ordre α.

Soient $G_1(x, y, z/\alpha_1)$, $G_2(x, y, z/\alpha_2), \ldots, G_k(x, y, z/\alpha_k)$, k de ces fonctions d'ordres respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Désignons par $c_1, c_2, \ldots, c_k$ des constantes et formons la fonction

(16) $$H(x, y, z) = \prod_{i=1}^{i=k} G_i(x, y, z - c_i/\alpha_i).$$

Cette fonction est entière: elle admet la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable; enfin elle vérifie la relation

$$H(x + \omega, y + x, z + y) = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)z + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_k c_k} H(x, y, z).$$

Posons

$$c \frac{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_k c_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = \alpha$$

nous aurons

$$H(x + \omega, y + x, z + y) = e^{-\alpha(z-c)} H(x, y, z)$$

ou, en faisant

$$z - c = z'$$

$$H(x + \omega, y + x, z' + y + c) = e^{-\alpha z'} H(x, y, z' + c);$$

la fonction $H(x, y, z' + c)$ est donc une fonction entière $G(x, y, z'/\alpha)$ et on a

(17) $$G(x, y, z - c/\alpha) = \prod_{i=1}^{i=k} G_i(x, y, z - c_i/\alpha_i).$$

La fonction méromorphe

(18) $$F(x,y,z)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{i=k} G_i(x,y,z-c_i/\alpha_i)}{\prod\limits_{j=1}^{j=\lambda} G_j(x,y,z-g_j/\alpha'_j)}$$

où

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=\alpha'_1+\alpha'_2+\cdots+\alpha'_\lambda$$

$$\alpha_1 c_1+\alpha_2 c_2+\cdots+\alpha_k c_k=\alpha'_1 g_1+\alpha'_2 g_2+\cdots+\alpha'_\lambda g_\lambda+2n\pi i$$

vérifie les quatre relations

(19) $$\begin{cases} F(x+2\pi i,y,z)=F(x,y,z)\\ F(x,y+2\pi i,z)=F(x,y,z)\\ F(x,y,z+2\pi i)=F(x,y,z)\\ F(x+\omega,y+x,z+y)=F(x,y,z). \end{cases}$$

Il est évident que les dérivées partielles de F par rapport à z vérifient les mêmes relations.

La fonction méromorphe

(20) $$F(x,y,z)=\sum_{i=1}^{i=k} A_i\frac{d\operatorname{Log} G_i(x,y,z-g_i/\alpha_i)}{dz}$$

où

$$A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+\cdots+A_k\alpha_k=0$$

vérifie les mêmes rélations, car l'effet de la dernière substitution du groupe est de faire croître chaque terme de $-A_i\alpha_i$. Une expression de la forme

(21) $$F(x,y,z)=A\frac{d^n\operatorname{Log} G(x,y,z-g/\alpha)}{dz^n}$$

où $n>1$, vérifie encore ces relations, quels que soient n, α et la constante g.

Enfin, il est évident que les sommes, les produits, les quotients de ces expressions sont des fonctions méromorphes vérifiant les mêmes relations (19).

Toutes les fonctions que nous venons de former et qui vérifient les relations (19) sont de la forme

$$F(x,y,z)=\frac{G_1(x,y,z-g/\alpha)}{G(x,y,z-c/\alpha)},$$

G_1 et G étant deux fonctions entières générales vérifiant les mêmes relations fonctionnelles qu'une fonction θ d'ordre α.

En prenant la dérivée *par rapport* à z,

$$F'_z = \frac{G'_1 G - G_1 G'}{G^2},$$

on voit que le produit

$$\Phi(x, y, z) = G^2 F'_z$$

est une fonction *entière* de x, y, z; comme F'_z vérifie les relations (19), $\Phi(x, y, z)$ admet la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifie la relation

$$\Phi(x + \omega, y + x, z + y) = e^{-2\alpha(z-c)} \Phi(x, y, z).$$

En posant $z - c = z'$, on transforme donc cette fonction Φ en une fonction entière générale d'ordre 2α vérifiant les mêmes relations que $\theta(x, y, z)$: soit $G_2(x, y, z' / 2\alpha)$ cette fonction. La dérivée F'_z est alors le quotient de deux de ces fonctions θ généralisées

(22) $$F'_z = \frac{G_2(x, y, z - c / 2\alpha)}{G^2(x, y, z - c / \alpha)}.$$

IX. *Il n'existe pas de fonctions entières vérifiant les relations* (19). De même qu'il n'existe pas de fonctions *entières* d'une variable avec deux périodes, il n'existe pas de fonction *entière* $F(x, y, z)$ vérifiant les relations (19). En effet, si une pareille fonction existait, elle serait représentée, pour toutes les valeurs des variables, par une série

$$F(x, y, z) = \Sigma B_{l, m, n}\, e^{lx + my + nz}$$

l, m, n étant des entiers qui varient de $-\infty$ à $+\infty$ et $B_{l,m,n}$ des coefficients constants. En écrivant que cette fonction vérifie la relation

$$F(x + \omega, y + x, z + y) = F(x, y, z)$$

on a

$$\Sigma B_{l, m, n}\, e^{l\omega} e^{(l+m)x + (m+n)y + nz} = \Sigma B_{l, m, n}\, e^{lx + my + nz}.$$

D'où, en identifiant les coefficients des termes $e^{(l+m)x + (m+n)y + nz}$ dans les deux membres

(23) $$B_{l+m, m+n, n} = e^{l\omega} B_{l, m, n}.$$

Considérons les coefficients dans lesquels n a une valeur *déterminée* non nulle. Nous pourrons poser

$$m = np + r$$

en appelant p le quotient et r le reste de la division de m par n, r étant un des nombres $0, 1, 2, \ldots n - 1$ si n est positif, $0, 1, 2, \ldots - n - 1$, si n est négatif. Nous grouperons alors les termes pour lesquelles r a une valeur déterminée. Dans ces conditions p varie de $-\infty$ à $+\infty$. Nous poserons ensuite

$$l = (p, 2) n + pr + q,$$

q variant de $-\infty$ à $+\infty$ pour que l varie de $-\infty$ à $+\infty$. Avec ces notations, pour faire croître m de n et l de m, il suffit de faire croître p de 1. Le coefficient $B_{l,m,n}$ où n et r ont des valeurs déterminées, deviendra une fonction de p et q, $C_{p,q}$, et la relation (23) deviendra

$$C_{p+1,q} = e^{[(p,2) n + pr + q] \omega} C_{p,q}. \tag{24}$$

Remplaçant p par $0, 1, 2, \ldots p - 1, p$ et multipliant, on a

$$C_{p,q} = e^{[(p,3)n + (p,2) r + pq] \omega} C_{0,q}.$$

Les termes correspondants de la série, où q a une valeur déterminée seront alors

$$C_{0,q} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} e^{\omega \psi(p) + x \psi_1(p) + y \psi_2(p) + z \psi_3(p)}$$

en posant pour abréger

$$\psi(p) = (p, 3) n + (p, 2) r + pq$$

et désignant par ψ_1, ψ_2, ψ_3 les différences $D\psi(p)$, $D^2 \psi(p)$, $D^3 \psi(p)$. Or cette série est évidemment *divergente*, car, dans l'exposant de e, le terme de degré le plus élevé en p est $\frac{\omega n p^3}{6}$ et p varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Il ne peut donc exister que des termes dans lesquels $n = 0$; la fonction F est alors indépendante de z.

X. *Fonctions entières de deux variables vérifiant des relations analogues à* (19). Par contre, il existe des fonctions de deux et, en général, d'un nombre pair de variables, vérifiant des relations analogues à (19). Bornons nous ici à une fonction entière de deux variables $g(x, y)$ telle que

$$\begin{cases} g(x + 2\pi i, y) = g(x, y) \\ g(x, y + 2\pi i) = g(x, y) \\ g(x + \omega, y + x) = g(x, y). \end{cases} \tag{25}$$

Pour la former prenons deux entiers quelconques λ et μ dont le premier λ est *positif* et différent de zéro. Désignons par $\psi(n)$ le polynôme en n

$$\psi(n) = \lambda(n, 2) + \mu n.$$

La fonction

$$(26)\qquad g(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\omega\psi(n) + xD\psi(n) + yD^2\psi(n)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\omega[\lambda(n,2)+\mu n] + x(\lambda n+\mu) + y\lambda}$$

vérifie les conditions indiquées. Elle peut d'ailleurs s'écrire

$$(27)\qquad g(x, y) = e^{\lambda y} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\omega[\lambda(n,2)+\mu n] + x(\lambda n+\mu)}$$

où la série est une fonction θ elliptique vérifiant les deux relations

$$\theta(x + 2\pi i) = \theta(x)$$

$$\theta(x + \omega) = e^{-\lambda x}\theta(x).$$

Nous désignerons la fonction entière (26) qui dépend des deux entiers λ et μ par

$$g\begin{pmatrix} x, y \\ \lambda, \mu \end{pmatrix}.$$

En posant

$$\Theta(X, A) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{A(n,2) + Xn}$$

où la partie réelle de A est négative, on a

$$g\begin{pmatrix} x, y \\ \lambda, \mu \end{pmatrix} = e^{\mu x + \lambda y}\Theta(\lambda x + \mu\omega, \lambda\omega).$$

On peut toujours, en remplaçant dans le terme général de la série (26) n par $n + k$, determiner k de façon que la nouvelle valeur de l'entier μ soit l'un des nombres $0, 1, 2 \ldots \lambda - 1$. C'est ce que nous supposerons réalisé par la suite. Il existe donc, une fois ω donné, une infinité de fonctions

$$g\begin{pmatrix} x, y \\ \lambda, \mu \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1, 2, \ldots + \infty$, $\mu = 0, 1, 2 \ldots \lambda - 1$. Pour chaque valeur de λ, il y a λ fonctions g.

Réciproquement, si l'on cherche la fonction entière la plus générale $g(x, y)$ vérifiant les relations (25), on trouve qu'elle est donnée par la série

$$g(x, y) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=+\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} A_{\lambda,\mu}\, g\begin{pmatrix} x, y \\ \lambda, \mu \end{pmatrix} \tag{28}$$

les coefficients $A_{\lambda,\mu}$ étant indépendants de x et y; c'est ce qu'on verra par la méthode des coefficients indéterminés, comme nous l'avons fait plus haut pour des questions analogues.

Il résulte de là que si $E(z)$ est une fonction entière quelconque de z la fonction

$$E[g(x, y)]$$

où $g(x, y)$ a la forme (28), a encore la même forme.

Soit $G(x, y, z/\alpha)$ une fonction entière vérifiant les mêmes relations qu'une fonction $\theta\begin{pmatrix} \omega, x, y, z \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \end{pmatrix}$ d'ordre α. Le produit $G(x, y, z/\alpha) g(x, y)$ est encore une fonction entière $G_1(x, y, z/\alpha)$ de même ordre, ayant par rapport à z les mêmes zéros que la première.

XI. *Dérivées partielles des fonctions F.* Soit d'abord une fonction $f(x, y)$ de deux variables admettant la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifiant la relation (29)

$$f(x + \omega, y + x) = f(x, y). \tag{29}$$

Nous allons chercher des combinaisons des dérivées partielles de f vérifiant la même relation: il est évident que toutes les dérivées admettront la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable. Faisons

$$f_1 = f'_x, \; f_2 = f'_y$$

$$f_{11} = f''_{x^2}, \; f_{12} = f_{21} = f''_{xy}, \; f_{22} = f''_{y^2}$$

$$\ldots \text{etc.}$$

Les fonctions $f_2, f_{22}, \ldots$ ne contenant que des dérivées par rapport à y vérifient évidemment la relation (29). Mais il en existe d'autres, qu'on peut former comme il suit.

Ecrivons la relation

$$f(x, y) = 0$$

qui définit y en fonction de x. D'après la relation (29) si on a

$$y = \varphi(x)$$

on a aussi

$$y + x = \varphi(x + \omega)$$

ou en dérivant deux fois

$$y'' = \varphi''(x + \omega)$$

$$\varphi''(x) = \varphi''(x + \omega).$$

La dérivée y'' ne doit donc pas changer quand on change x en $x + \omega$ et y en $y + x$. (Voyez à un autre point de vue la note des Rendiconti di Palermo séance du 10 Decémbre 1911, t. XXXIII). Appliquons à $f(x, y) = 0$, le théorème des fonctions implicites, nous aurons

$$f_1 + y' f_2 = 0$$

$$f_{11} + 2 f_{12} y' + f_{22} y'^2 + y'' f_2 = 0$$

ou en éliminant y'

$$f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2 + y'' f_2^3 = 0.$$

La fonction

$$g(x, y) = f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2 \tag{30}$$

vérifie la relation

$$g(x + \omega, y + x) = g(x, y).$$

Vérifions-le directement. Pour cela, étant donnée une fonction quelconque $\varphi(x, y)$ appelons $\overline{\varphi}$, avec un trait, ce que devient cette fonction quand on y remplace x et y par $x + \omega$ et $y + x$

$$\overline{\varphi} = \varphi(x + \omega, y + x).$$

Alors (29) donne

$$\overline{f} = f.$$

Dérivons cette relation par rapport à x et y: nous avons

$$\begin{aligned}
&\bar f_1 + \bar f_2 = f_1 \\
&\bar f_2 = f_2 \\
&\bar f_{11} + 2\bar f_{12} + \bar f_{22} = f_{11} \\
&\bar f_{12} + \bar f_{22} \qquad = f_{12} \\
&\bar f_{22} \qquad\qquad = f_{22}.
\end{aligned}$$

Prenant alors la fonction (30) on a

$$\begin{aligned}
g &= (\bar f_{11} + 2\bar f_{12} + \bar f_{22}) f_2^2 \\
&\quad - 2(\bar f_{12} + \bar f_{22})(f_1 + f_2) f_2 \\
&\quad + \bar f_{22}(f_1 + f_2)^2 \\
&= f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2 \\
&= g.
\end{aligned}$$

On obtiendrait d'autres formules analogues en calculant y''', y^{IV}, ... etc.

XII. *Expressions analogues pour les fonctions F de trois variables x, y, z, admettant la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifiant la relation*

$$(31) \qquad F(x + \omega, y + x, z + y) = F(x, y, z).$$

Appelons de même F_1', F_2, F_3 les trois dérivées premières;

$$\begin{matrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{matrix}$$

les six dérivées secondes ($F_{ik} = F_{ki}$), et désignons par $\bar\varphi$ ce que devient une fonction $\varphi(x, y, z)$ par l'effet de la substitution (x, y, z) $(x + \omega, y + x, z + y)$.

En dérivant par rapport aux trois variables, la relation (31), on a

$$\begin{aligned}
F_1 &= \bar F_1 + \bar F_2 \\
F_2 &= \bar F_2 + \bar F_3 \\
F_3 &= \bar F_3
\end{aligned}$$

On en conclut

$$F_2^2 - F_2 F_3 - 2 F_1 F_3 = F_2^2 - F_2 F_3 - 2 F_1 F_3.$$

On a donc ainsi deux fonctions dépendant des dérivées premières

$$(32) \qquad F_3, \quad F_2^2 - F_2 F_3 - 2 F_1 F_3$$

qui sont laissées invariables par les substitutions du groupe considéré.

Si nous passons aux dérivées secondes, nous avons

$$(33) \qquad \begin{cases} F_{22} = F_{22} + 2 F_{23} + F_{33} \\ F_{23} = \bar{F}_{23} + \bar{F}_{33} \\ F_{33} = \bar{F}_{33}. \end{cases}$$

On en conclut que les trois fonctions

$$(34) \qquad \begin{cases} F_{33} \\ F_{23}^2 - F_{22} F_{33} \\ F_{22} F_3^2 - 2 F_{32} F_3 F_2 + F_{33} F_2^2 \end{cases}$$

sont invariables par les substitutions du même groupe. C'est ce qu'il est aisé de vérifier.

On peut rattacher ces formules à la théorie des formes. Ainsi, prenant la forme

$$F_{22} X^2 + 2 F_{23} X Y + F_{33} Y^2,$$

faisons sur X et Y la substitution

$$X = X', \qquad Y = X' + Y'$$

de déterminant $+1$. L'effet de cette substitution en vertu des relations (33) est de transformer la forme en

$$F_{22} X'^2 + 2 F_{23} X' Y' + F_{33} Y'^2.$$

Les discriminants des deux formes sont donc égaux

$$F_{23}^2 - F_{22} F_{33} = F_{23}^2 - F_{22} \bar{F}_{33}$$

ce qui donne une des fonctions invariantes (34).

Des considérations analogues s'appliquent aux dérivées d'ordre plus élevé. En appliquant à une des fonctions trouvées (32) et (34) les mêmes calculs qu'à F, on en obtient évidemment d'autres possédant les mêmes propriétés.

XIII. *Transformations.* Dans une deuxième partie, nous nous occuperons, entre autres, de certaines transformations, dont nous avons donné un exemple simple dans les Comptes Rendus (Séance du 7 Septembre 1914).

Paris, le 17 Sept. 1914.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEM MAXIMALBETRAGE EINER ANALYTISCHEN FUNKTION UND DEM GRÖSSTEN GLIEDE DER ZUGEHÖRIGEN TAYLORSCHEN REIHE.[1]

(Brief an Herrn Professor Dr. A. Wiman.)

Von

G. PÓLYA

in Zürich.

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich habe Ihre Arbeit »Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe» mit dem allergrössten Interesse gelesen. Ich bemühte mich, Ihren Gedankengang, dessen Originalität mich frappierte, klar herauszuarbeiten. Es gelang mir in der Tat mit einem etwas einfacheren Ansatz auszukommen, Ihre Schlüsse in elementare Hilfssätze zu zerlegen, und diese Hilfssätze kurz und durchsichtig zu beweisen. Es hat häufig keine Schwierigkeit, einer schon gemachten Entdeckung einfachere Form zu geben, und ich hätte Sie damit nicht aufgehalten.

Es ist aber ein Punkt Ihrer Arbeit, und zwar eben der springende Punkt darin, mit einer gewissen Unklarheit behaftet, die einige Leser aufhalten könnte. Sie behaupten S. 310 Ihrer Arbeit, dass sämtliche Ungleichungen

$$(18) \qquad \prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_{n-k}}{r_n} \leqq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{P_{n-k}}{P_n} \quad (\nu < n), \qquad (19) \quad \prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_n}{r_{n+k}} \leqq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{P_n}{P_{n+k}} \quad (\nu > 0)$$

für unendlich viele n erfüllt werden können, vorausgesetzt, dass

$$0 < r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \cdots, \quad 0 < P_1 < P_2 < P_3 < \cdots$$
$$\lim_{n=\infty} r_n = \infty, \qquad \lim_{n=\infty} P_n = P,$$

[1] Vgl. Acta Mathematica Bd. 37. S. 305—326.

wo P einen beliebigen positiven endlichen Wert haben kann. Ich werde im Folgenden eine numerische Folge $r_1, r_2, r_3, \cdots$ angeben, bei welcher Ihre Ungleichungen (18), (19) für kein n sämtlich erfüllt sind.

Dies Beispiel, ich weiss es wohl, entkräftet Ihren Schluss keineswegs. Denn meine Folge ist eben eine *numerische*, während Sie noch freie Hand haben gewisse Ihrer $r_1, r_2, r_3, \cdots$ in bestimmten Intervallen geeignet zu wählen. Auch die Art dieser Wahl ist Ihrer Ausführung, wenn auch vielleicht nicht ganz klar, zu entnehmen. Übrigens, urteilen Sie selbst, ob die nachfolgende Darstellung Ihrer Schlüsse nicht das Verständnis Ihrer Entdeckung erleichtern könnte.

1. Die Potenzreihe

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

soll folgende Eigenschaften haben:

1) Alle Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \cdots$ sind positiv.

2) Die Rolle des grössten Gliedes wird nacheinander von jedem Glied $a_n x^n$ übernommen, sei es ein ganzes Intervall entlang, sei es nur in einem Punkte.

3) $a_0 = 1$.

Sie haben in Ihrer Arbeit S. 307 gezeigt, dass, wenn Ihre Sätze für solche ganze Funktionen gelten, die den Bedingungen 1) 2) genügen, sie dann für jede ganze Funktion gelten. Offenbar ist die Normierung 3) eine irrelevante Beschränkung.

Das Glied $a_n x^n$ übernimmt die Rolle des grössten Gliedes von seinem linken Nachbar $a_{n-1} x^{n-1}$. Dies soll in dem Punkte $|x| = r_n$ geschehen, d. h. es sei

$$a_{n-1} r_n^{n-1} = a_n r_n^n$$

oder

[1][1] $$a_n = \frac{1}{r_n} a_{n-1}.$$

Seien $r_1, r_2, r_3, \cdots$ die Punkte, wo $a_1 x$, bezw. $a_2 x^2, a_3 x^3, \cdots$ die Rolle des grössten Gliedes antreten. Es ist

[2] $$o < r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \cdots$$

und aus [1] ergibt sich durch Rekursion

[1] Ich numeriere meine Formeln in eckigen Klammern [], um sie von Ihren in runden Klammern () numerierten Formeln zu unterscheiden.

$$a_n = \frac{1}{r_1 r_2 r_3 \cdots r_n},$$

[3] $$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{r_1 r_2 r_3 \cdots r_n}.$$

Jede Potenzreihe, die den Bedingungen 1) 2) 3) genügt, lässt sich, und zwar nur auf eine Weise, in die Form [3] setzen. Umgekehrt, ist [2] erfüllt, so repräsentiert [3] immer eine Potenzreihe, die im Kreise vom Radius $\varrho = \lim_{n=\infty} r_n$ konvergiert, und die Bedingungen 1) 2) 3) erfüllt; denn es ist offenbar $\frac{x^n}{r_1 r_2 r_3 \cdots r_n}$ das grösste Glied von [3] im Intervalle $r_n \leq |x| \leq r_{n+1}$ von verschwindender oder positiver Länge. Setzt man für $r_1, r_2, r_3, \cdots$ die einfachste wachsende Zahlenfolge 1, 2, 3, ... ein, so erhält man die einfachste ganze Funktion e^x.

Ich setze $|x| = r$, und für $r_n \leq r \leq r_{n+1}$

$$m(r) = \frac{r^n}{r_1 r_2 r_3 \cdots r_n}$$

$$\mu(r) = 1 + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{r_{n-\mu+1} \cdots r_{n-1} r_n}{r^\mu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r^\nu}{r_{n+1} r_{n+2} \cdots r_{n+\nu}}.$$

Es ist also

$$|F(x)| \leq F(r) = m(r) \mu(r).$$

Ich halte am Ansatz [3] fest. Ich habe also die beiden Ausdrücke $m(r)$ und $\mu(r)$ gegeneinander abzuwägen. Ich habe $r_1, r_2, r_3, \cdots$ als fest gegeben zu betrachten, und ich kann r im Intervalle (r_n, r_{n+1}) variieren lassen.

2. Hilfssatz I. *Ich setze von der Folge $l_1, l_2, \cdots l_n, \cdots$ voraus, dass*

$$\lim_{n=\infty} l_n = +\infty.$$

Dann gibt es unendlich viele Indices n, zu denen man Zahlen A bestimmen kann, derart, dass alle Ungleichungen

[4] $$\frac{l_{n-\mu+1} + \cdots + l_{n-1} + l_n}{\mu} \leq A \leq \frac{l_{n+1} + l_{n+2} + \cdots + l_{n+\nu}}{\nu}$$

$$(\mu = 1, 2, \cdots n; \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

erfüllt sind.

Es sei r gegeben. Ich werde einen Index n finden, $n \geq r$, der die gewünschte Eigenschaft hat. Dabei kann A beliebig gewählt werden, wenn sie nur grösser ist als das Maximum der Zahlen $l_1, l_2, \cdots l_r$

[5] $$A > l_1, A > l_2, \cdots A > l_r.$$

Man betrachte zum Beweise die Zahlen

$$\begin{aligned} L_r &= l_r - A \\ L_{r+1} &= l_r + l_{r+1} - 2A \\ L_{r+2} &= l_r + l_{r+1} + l_{r+2} - 3A \\ &\cdots\cdots \\ L_n &= l_r + l_{r+1} + \cdots + l_n - (n - r + 1)A \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Es ist offenbar $\lim\limits_{\nu=\infty} L_\nu = +\infty$, und darum besitzen die Zahlen $L_r, L_{r+1}, L_{r+2} \cdots$ ein Minimum, d. h. es gibt (wenigstens) ein L_n so, dass

$$L_\nu \geq L_n \quad (\nu = r, r+1, r+2, \cdots).$$

Es ist

$$L_{n+\nu} - L_n = l_{n+1} + l_{n+2} \cdots + l_{n+\nu} - \nu A \geq 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

und so ist die zweite Hälfte der Ungleichungen [4] erfüllt. Es ist ferner

$$L_n - L_{n-\mu} = l_{n-\mu+1} + \cdots + l_{n-1} + l_n - \mu A \leq 0 \quad (n - \mu \geq r).$$

Dies zeigt, dass auch ein Teil der ersten Hälfte der Ungleichungen [4] erfüllt ist, nämlich diese, wo $\mu \leq n - r$. Addiert man zu der Ungleichung

$$l_{r+1} + l_{r+2} + \cdots + l_n \leq (n - r)A$$

die aus den Ungleichungen [5] fliessende

$$l_{n-\mu+1} + l_{n-\mu+2} + \cdots + l_r < (r - n + \mu)A,$$

so sieht man, dass die erste Hälfte der Ungleichungen [4] auch für $\mu > n - r$ erfüllt ist. Der Index n $(n \geq r)$ und die Zahl A sind also in der Tat so gewählt, dass alle Ungleichungen [4] erfüllt sind. —

Setzt man in [4] $\mu = \nu = 1$, so erhält man

$$l_n \leq A \leq l_{n+1}.$$

Es besteht also der Satz: *Strebt die Folge $l_1, l_2, l_3, \cdots$ gegen $+\infty$, so lassen sich darin unendlich viele Paare benachbarter Glieder l_n, l_{n+1} finden, so dass*

$$l_n \leqq \frac{l_{n+1} + l_{n+2} + \cdots + l_{n+\nu}}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$l_{n+1} \geqq \frac{l_{n-\mu+1} + \cdots + l_{n-1} + l_n}{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \cdots n).$$

Um so merkwürdiger ist es, dass folgender Satz, der eigentlich viel einfacher lauten würde, *falsch* ist: *Strebt die Folge $l_1, l_2, \cdots l_n, \cdots$ gegen $+\infty$, so lassen sich darin unendlich viele Glieder l_n finden, so dass*

[6] $$\frac{l_{n-\mu} + \cdots + l_{n-2} + l_{n-1}}{\mu} \leqq l_n \leqq \frac{l_{n+1} + l_{n+2} + \cdots + l_{n+\nu}}{\nu}$$

$$(\mu = 1, 2, \cdots n-1; \ \nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

In der Tat, es gibt gegen $+\infty$ strebende Folgen, deren Glieder folgenden Ungleichungen genügen

[7]
$$\begin{array}{l} l_1 > l_2 \\ l_3 > l_4 \\ l_5 > l_6 > l_7 > l_8 \\ l_9 > l_{10} > \cdots > l_{16} \\ \cdots\cdots \\ l_{2^k+1} > l_{2^k+2} > \cdots > l_{2^{k+1}} \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

In solchen Folgen gibt es kein n, für welches sämtliche Ungleichungen [6] erfüllt wären. Genauer, es sind wenigstens $2^k - 1$ Ungleichungen [6] nicht erfüllt, wenn $2^k + 1 \leqq n \leqq 2^{k+1}$.[1]

3. Eine ins Unendliche wachsende Folge von der Eigenschaft [7] erhält man etwa folgendermassen: es sei

[1] Es besteht jedoch folgender Satz: »Sei die Funktion $f(x)$ stetig für $x \geqq 0$, und sei $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = +\infty$. Dann gibt es beliebig grosse Abszissen ξ, sodass für jedes $x < \xi$ und jedes $y > \xi$

$$\frac{1}{\xi - x}\int_x^\xi f(x)\,dx < f(\xi) < \frac{1}{y-\xi}\int_\xi^y f(x)\,dx.«$$

$$0 < P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_n < \cdots$$

und $\lim\limits_{n=\infty} P_n$ sei endlich. Sei ferner

$$r_1 = r_2 = 2$$

$$r_3 = r_4 = 4$$

$$r_5 = r_6 = r_7 = r_8 = 8$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{2^k+1} = r_{2^k+2} = \cdots = r_{2^{k+1}} = 2^{k+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Setzt man

$$l_n = \log \frac{r_n}{P_n},$$

so sind die Ungleichungen [7] alle erfüllt. Folglich sind die Ungleichungen [6], die sich jetzt so schreiben lassen

$$\left(\frac{r_{n-\mu} \cdots r_{n-2} r_{n-1}}{P_{n-\mu} \cdots P_{n-2} P_{n-1}}\right)^{\frac{1}{\mu}} \leq \frac{r_n}{P_n} \leq \left(\frac{r_{n+1} r_{n+2} \cdots r_{n+\nu}}{P_{n+1} P_{n+2} \cdots P_{n+\nu}}\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$(\mu = 1, 2, \cdots n-1; \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

für kein n sämtlich erfüllt, und genauer, die Anzahl der nicht erfüllten wächst mit wachsendem n ins Unendliche. Das besagt aber, dass Ihre vorher erwähnten Ungleichungen (18), (19) im Falle der eben konstruierten Folge $r_1, r_2, r_3, \cdots$ für kein n sämtlich erfüllt sind, und dass die Anzahl der nicht erfüllten unbegrenzt mit n wächst. —

Es sei

$$0 < r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_n < \cdots$$

$$0 < P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_n < \cdots$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{r_n}{P_n} = \infty.$$

So kann man zu unendlich vielen Indices n positive Grössen r bestimmen, wo

$$r_n \leq r \leq r_{n+1}$$

ist, sodass sämtliche Ungleichungen

$$[8] \qquad \frac{r_{n-\mu+1}\cdots r_{n-1}r_n}{r^\mu} \leqq \frac{P_{n-\mu+1}\cdots P_{n-1}P_n}{P_n^\mu} \quad (\mu = 1, 2, \cdots n)$$
$$\frac{r^\nu}{r_{n+1}r_{n+2}\cdots r_{n+\nu}} \leqq \frac{P_n^\nu}{P_{n+1}P_{n+2}\cdots P_{n+\nu}} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

erfüllt sind.

Man wende Hilfssatz I auf die Folge

$$l_1 = \log\frac{r_1}{P_1},\, l_2 = \log\frac{r_2}{P_2}, \cdots l_n = \log\frac{r_n}{P_n}, \cdots$$

an, und man setze die in den Ungleichungen [4] vorkommende Zahl

$$A = \log\frac{r}{P_n}$$

Für $\mu = \nu = 1$ ergeben die Ungleichungen [4]

$$\log\frac{r_n}{P_n} \leqq A = \log\frac{r}{P_n} \leqq \log\frac{r_{n+1}}{P_{n+1}} < \log\frac{r_{n+1}}{P_n}$$

also

$$r_n \leqq r < r_{n+1}.$$

Setzt man den Wert $A = \log\frac{r}{P_n}$ in [4] ein, so erhält man genau die Ungleichungen [8].

4. Durch das Gesagte, hauptsächlich durch [3] und [8], glaube ich den wesentlichsten Teil des Gedankenganges der §§ 1—3 Ihrer Arbeit dargestellt zu haben. Ich glaube, dass der Kern Ihrer Schlussweise in § 5 in folgendem Hilfssatze seinen einfachsten Ausdruck findet:

Hilfssatz II. *Die Folge reeller Zahlen*

$$l_1, l_2, l_3, \cdots l_n, \cdots$$

unterliege den beiden Bedingungen

1) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,(l_1 + l_2 + \cdots + l_\nu) = +\infty$$

2) $$\lim_{\nu=\infty} l_\nu = 0.$$

Dann gibt es unendlich viele Indices n, zu denen sich eine Grösse A so bestimmen lässt, dass sämtliche Ungleichungen

$$[9] \qquad \frac{l_{n-\mu+1}+\cdots+l_{n-1}+l_n}{\mu} \geqq A \geqq \frac{l_{n+1}+l_{n+2}+\cdots+l_{n+\nu}}{\nu}$$

$$(\mu = 1, 2, \cdots n; \ \nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

befriedigt sind.

Sei r gegeben; ich werde einen Index n, $n > r$, finden von der im Hilfssatz II. verlangten Eigenschaft.

Es sei M das Maximum der $r + 1$ Zahlen

$$l_1, l_1 + l_2, \cdots, l_1 + l_2 + \cdots + l_r; \ 0.$$

Kraft Bedingung 1) kommen unter den Zahlen $l_1 + l_2 + \cdots + l_\nu$ solche vor, die grösser sind als M. Sei $\nu = s$ der kleinste Index, für welchen dies eintritt, dann ist

$$s > r$$

$$l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_s > M \geqq l_1 + l_2 + \cdots + l_\mu$$

$$(\mu = 1, 2, 3, \cdots s - 1)$$

also

$$l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_s > 0$$

$$l_2 + l_3 + \cdots + l_s > 0$$

$$l_3 + \cdots + l_s > 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$l_s > 0.$$

Das Minimum der s Zahlen

$$\frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_s}{s}, \frac{l_2 + \cdots + l_n}{s - 1}, \cdots \frac{l_s}{1}$$

ist also ein positiver Wert, den ich $= A$ setzen will.

Man bilde nun die Zahlenfolge

$$L_s = l_s - A$$

$$L_{s+1} = l_s + l_{s+1} - 2A$$

$$L_{s+2} = l_s + l_{s+1} + l_{s+2} - 3A$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$L_n = l_s + l_{s+1} + l_{s+2} + \cdots + l_n - (n - s + 1)A$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es ist

$$\lim_{\nu=\infty} L_\nu = -\infty$$

wegen der Bedingung 2), und da $A > 0$. Folglich haben die Zahlen $L_s, L_{s+1}, L_{s+2}, \ldots$ ein Maximum, d. h. es gibt wenigstens eine Zahl L_n, so dass

$$L_\nu \leqq L_n \qquad (\nu = s, s+1, s+2, \cdots).$$

Es ist also

$$L_{n+\nu} - L_n \quad = l_{n+1} + l_{n+2} + \cdots + l_{n+\nu} - \nu A \leqq 0 \quad (\nu > 0)$$
$$L_n \quad - L_{n-\mu} = l_{n-\mu+1} + \cdots + l_{n+1} + l_n - \mu A \geqq 0 \quad (\mu \leqq n - s).$$

Man bemerke, dass $n \geqq s > r$ ist, und der Beweis endet, wie für Hilfssatz I.[1]

Ich würde mich sehr freuen, wenn diese Schlussweise Ihren Beifall fände.

[1] Um Ihr Resultat in § 5) aus Hilfssatz II zu erhalten, setzt man

$$c_n = \frac{1}{r_1 r_2 \cdots r_n}, \gamma_n = \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n}, l_n = \log \frac{\rho_n}{r_n}.$$

ÜBER DIE HINSICHTLICH DER UNABHÄNGIGEN UND ABHÄNGIGEN VARIABELN PERIODISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG.

Von

P. BOHL

in Riga.

Es möge die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dt} = \varphi(s, t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1$$

vorliegen. Hierbei sei $\varphi(s,t)$ eine für alle s, t gegebene, stetige und hinsichtlich s und t mit den Perioden 1 periodische Funktion.[1] Ausserdem sei die Lipschitzsche Bedingung erfüllt. *Es existirt dann stets eine solche Konstante μ, dass der Unterschied einer beliebig gewählten Lösung von 1) und der Grösse $\mu . t$ für alle t zwischen endlichen Grenzen bleibt.* Einen Beweis dieses Satzes findet man in einer Note von E. E. Levi.[2] In ihr wird auf eine die Theorie der Mondbewegung betreffende Arbeit von Levi-Civita[3] hingewiesen. Der genannte Satz ist jedoch, wie mir scheint, nebst weitergehenden Resultaten gewissen Untersuchungen zu entnehmen, welche Poincaré im Jahre 1885 veröffentlicht hat.[4]

[1] Sind die Perioden andere, so genügt die Einführung neuer s und t proportionaler Variabeln, um auf den oben genannten Fall zurückzukommen. Es möge ferner besonders bemerkt werden, dass in dieser Untersuchung nur reelle endliche Grössen vorkommen.

[2] E. E. Levi, Sur les équations différentielles périodiques, C. R. 1911 T. 153 S. 799.

[3] Levi-Civita, Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire. Annales de l'Ecole Normale supérieure. 28, 1911.

[4] H. Poincaré, Sur les courbes définies par les équations différentielles. Troisième partie. Journal de Mathématiques IV s. T. 1. 1885. Die hier in Betracht gezogenen Untersuchungen finden sich im 15. Kapitel und beginnen auf S. 226. Poincaré betrachtet die sprunghafte Punktbewegung auf einer geschlossenen Linie. Eine wichtige Rolle spielt hierbei eine Art von Stabilität. Es ist dies die stabilité à la Poisson, die »ewige Wiederkunft» mit beliebiger Annäherung. Man kann die auftretenden Fragen von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachten und sie zu mancherlei Problemen in Beziehung setzen. Ich erwähne etwa die Ponceletschen Polygone.

Liegt eine Lösung von 1) vor, so verdient die Frage besonderes Interesse, ob die Lösung in der Form

$$s = \mu . t + f(t, \mu . t) \quad \ldots \ldots \quad 2$$

darstellbar ist. Hierbei ist μ die schon erwähnte Konstante, $f(x, y)$ eine für alle x, y definierte, *stetige* und hinsichtlich x, y mit den Perioden 1 periodische Funktion.[1] Ist μ keine Rationalzahl und kann *eine* Lösung in der Form 2) dargestellt werden, so werden alle Lösungen aus der Gleichung

$$s = \mu . t + c + f(t, \mu . t + c) \quad \ldots \ldots \quad 3$$

durch geeignete Wahl der Konstanten c erhalten. Umgekehrt liefert 3) in diesem Fall bei jedem Wert der Konstanten c eine Lösung.

Es sei μ keine Rationalzahl und es möge eine der Lösungen in naheliegender Weise durch eine Kurve auf einem Kreisring dargestellt werden. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten des eben besprochenen Falles besteht dann darin, dass die darstellende Kurve den Ring überall dicht bedeckt. Die Richtigkeit dieser Behauptung geht aus den unten folgenden Erörterungen hervor. So leicht es nun häufig ist, beim Auftreten neuer wesentlicher Voraussetzungen[2] das Auftreten des oben besprochenen Falles vorherzusagen, so schwierig ist es, allgemeine praktisch wertvolle Kriterien dafür anzugeben. Die im Anfang dieser Einleitung eingeführten Annahmen genügen jedenfalls *nicht*, um das Eintreten des genannten Falles sicherzustellen.

Wir nehmen nun an, $\varphi(s, t)$ sei eine solche Funktion, dass der eben erörterte Fall eintritt. Wir haben im Vorhergehenden bereits auf Voraussetzungen hingewiesen, die mitunter geeignet sind, die genannte Annahme zu stützen. Hier möge noch erwähnt werden, dass, wenn $\varphi(s, t)$ nur von s oder nur von t abhängt, die Berechtigung der Annahme häufig ohne jede Schwierigkeit zu erweisen ist. Es möge weiter die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dt} = \varphi(s, t) + \psi(\varepsilon, s, t) \quad \ldots \ldots \quad 4$$

gebildet werden. Hierbei ist ψ für alle s, t und diejenigen ε gegeben, deren Absolutwert kleiner als eine bestimmte positive Zahl ist. Ferner genügt ψ für

[1] In diesem Fall kann $f(t, \mu . t)$ mit beliebiger Annäherung durch ein aus $\sin 2\pi t$, $\cos 2\pi t$, $\sin 2\pi\mu t$, $\cos 2\pi\mu t$ gebildetes ganzes Polynom ersetzt werden.

[2] Diese Voraussetzungen könnten z. B. Aussagen über integrierende Faktoren, infinitesimale Transformationen, Integralinvarianten u. s. w. enthalten.

jedes einzelne spezielle ε denselben Bedingungen, wie sie *zu Anfang* dieser Einleitung für φ formuliert wurden. Endlich soll es möglich sein, $|\psi|$ dadurch beliebig klein zu machen, dass man $|\varepsilon|$ genügend klein wählt.

Wir bezeichnen die charakteristische Zahl für 4) mit ϱ. Man kann $|\mu - \varrho|$ beliebig klein machen, indem man $|\varepsilon|$ genügend klein wählt.[1]

Es sei nun σ irgend eine Lösung von 4).

$$s = \mu . t + c + f(t, \mu . t + c) \quad \text{. . . . .} \quad 5$$

sei diejenige Lösung von 1), welche für $t = 0$ mit σ übereinstimmt. Dann können wir schreiben

$$\sigma = \varrho . t + c + f(t, \varrho . t + c) + \eta \quad \text{. . . . .} \quad 6$$

wobei $|\eta|$ beliebig klein gemacht werden kann, indem man $|\varepsilon|$ genügend klein wählt; und zwar genügt ein Kleinheitsgrad gleichzeitig für alle t und alle Lösungen von 4).

Es ist also, um eine Approximationslösung im eben genannten Sinn zu erhalten, genügend, in dem Ausdruck für die Lösung von 1) die Zahl μ durch die Zahl ϱ zu ersetzen. Diesen Satz sehe ich als das wesentliche Ergebnis meiner Arbeit an. Es wäre von bedeutendem Interesse, wenn eine *direkte* Verallgemeinerung des Satzes denselben auf Systeme von Differentialgleichungen ausdehnen könnte. Ein dahin gehender Versuch wäre jedoch aussichtslos.

Ich möchte nun noch einige Worte über das Verhältnis meiner Arbeit zu den Untersuchungen von Poincaré hinzufügen. Poincaré geht auf die Konstruktion eines *Integrals* aus, während in meiner Arbeit eine Darstellung der *Lösungen* ins Auge gefasst wird. Am Schluss des hier in Betracht gezogenen Kapitels führt Poincaré auch einen »kleinen» Parameter in die Differentialgleichung ein und gibt eine gewisse Entwicklung für dass *Integral. Dieser Teil der Arbeit von* Poincaré *hat jedoch nur einen formalen Charakter.*

Es war nicht zu vermeiden, dass ein grosser Teil meiner Arbeit den oben erwähnten bereits vorhandenen Untersuchungen nahe steht. Dies gilt insbesondere bezüglich der Untersuchungen von Poincaré, während die Arbeit von Levi nur für den Beginn des ersten Paragraphen in Betracht kommt. Ich habe meine Darstellungsform so gewählt, dass die folgenden Auseinandersetzungen ohne Kenntnis der Arbeiten von Poincaré und Levi verstanden werden können. Ein Verzicht auf diese Unabhängigkeit hätte keine nennenswerte Kürzung herbeigeführt.

[1] Dies kann unmittelbar aus den Untersuchungen von Poincaré gefolgert werden.

§ 1.

Die charakteristische Zahl. Vorbereitende Sätze.

Wir fassen *eine* Lösung von 1) ins Auge und bilden

$$s(t+m)-s(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7$$

wobei m irgend eine positive ganze Zahl bedeutet. *Zunächst überzeugen wir uns davon, dass die grösste der ganzen Zahlen, die nicht grösser als 7) sind, einen von der Wahl von t unabhängigen Wert besitzt.* Andernfalls müsste nämlich für einen gewissen t-Werth der Ausdruck 7) gerade *gleich* einer ganzen Zahl g werden. Hieraus würde dann gemäss den bezüglich 1) eingeführten Voraussetzungen folgen, dass 7) für *alle* t den Wert g besitzt. Somit wäre unsere Behauptung dennoch richtig. Die in der eben begründeten Behauptung genannte ganze Zahl wollen wir mit (m) bezeichnen; sie kann auch gleich Null oder kleiner als Null sein.

Es bezeichne nun auch n irgend eine positive ganze Zahl. Dann gilt

$$\begin{aligned} s(t+m\,.\,n)-s(t) &= [s(t+m\,.\,n)-s(t+m(n-1))]+[s(t+m(n-1))-\\ &-s(t+m(n-2))]+\cdots+[s(t+m)-s(t)]=n[(m)+\varepsilon]=m[(n)+\eta] \quad \ldots \quad 8 \end{aligned}$$

wobei ε und η kleiner als 1 und nicht negativ sind. Aus 8) ergibt sich

$$\frac{(m)}{m}+\frac{\varepsilon}{m}=\frac{(n)}{n}+\frac{\eta}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9$$

Man kann daher den Unterschied der in 9) links und rechts an erster Stelle stehenden Brüche kleiner als eine beliebig gewählte positive Zahl machen, indem man sich auf genügend grosse m, n beschränkt. Es existiert daher der endliche Grenzwert

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{(m)}{m}=\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10$$

Dieser Grenzwert hängt nicht von der Wahl der Lösung ab. Ist nämlich $s_1(t)$ irgend eine Lösung von 1), so gibt es eine solche ganze Zahl ν, dass für alle t $s(t)+\nu \leqq s_1(t) < s(t)+\nu+1$ gilt. Hieraus geht die Richtigkeit der eben gemachten Bemerkung sofort hervor.

Mit Benutzung von 9) erkennen wir nun, dass die Grösse

$$m\,.\,\mu-(m)-\varepsilon=m\,.\,\mu-m\,.\,\frac{(n)}{n}-m\,.\,\frac{\eta}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11$$

falls m festgehalten wird, während n nach ∞ strebt, nach o konvergiert. Dieses Resultat verlangt das Bestehen der Ungleichung

$$0 \leqq m \, . \, \mu - (m) \leqq 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 12$$

wobei das Gleichungszeichen nur für ein *rationales* μ vorkommen kann.

Es mag zunächst bemerkt werden, dass μ sicher rational ist, wenn die Grösse 7) für ein gewisses m eine ganze Zahl g ist. Dann wäre nämlich in 8) $\varepsilon = 0$ und $(m) = g$ und daher $\mu = \frac{g}{m}$.

Wir haben nun, wenn n irgend eine positive ganze Zahl ist und λ, ν irgend welche ganze Zahlen bedeuten

$$(n) + \lambda - \nu \leqq [s(t+n) + \lambda] - [s(t) + \nu] < (n) + \lambda - \nu + 1 \quad \ldots \ldots \quad 13$$

$$[\mu \, . \, (t+n) + \lambda] - [\mu \, . \, t + \nu] = \mu \, . \, n + \lambda - \nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad 14$$

$$(n) + \lambda - \nu \leqq \mu \, . \, n + \lambda - \nu \leqq (n) + \lambda - \nu + 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 15$$

wobei in 13) und 15) das Gleichungszeichen nur für rationales μ auftreten kann. Die Differenzen

$$[s(t+n) + \lambda] - [s(t) + \nu] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 16$$

und

$$[\mu \, . \, (t+n) + \lambda] - [\mu \, . \, t + \nu] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 17$$

liegen daher für ein *nicht* rationales μ *zwischen* denselben aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. *Diese Differenzen sind daher von Null verschieden und gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ.* Bei *rationalem* μ liegen sie in dem von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen bestimmten Intervall, wobei die letzteren Zahlen selbst mit zum Intervall gerechnet werden. *Die Differenzen 16), 17) haben daher nicht entgegengesetztes Zeichen.*

Offenbar gilt das gefundene Resultat auch dann, wenn n eine *negative* ganze Zahl ist.

§ 2.

Geometrische Darstellung. Der in der Einleitung erwähnte besondere Fall.

Wir führen ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf einer Ebene ein. Unter einer Verschiebung (m, n) verstehen wir eine solche Verschiebung eines geometrischen Gebildes, bei welcher die Abszissen seiner Punkte den Zuwachs m,

die Ordinaten den Zuwachs n erfahren. Im Folgenden werden nur *ganzzahlige* Werte von m und n zugelassen, ohne dass hierauf besonders hingewiesen wird. Andererseits können m, n positiv, negativ oder gleich Null sein. Wir stellen nun *eine* Lösung von 1) durch eine Kurve dar und unterwerfen diese Kurve allen Verschiebungen der eben genannten Art. Die durch die Verschiebung (m, n) erhaltene Kurve nennen wir (m, n)-Kurve. Hiernach ist die $(0, 0)$-Kurve die ursprüngliche Kurve. Alle diese Kurven stellen Lösungen dar. Haben die (m_1, n_1)- und (m_2, n_2)-Kurve einen gemeinsamen Punkt, so fallen sie ganz zusammen. Tritt dieser Fall ein, so führt die Verschiebung $(m_2 - m_1, n_2 - n_1)$ jeden Punkt der (m_1, n_1)-Kurve in einen Punkt derselben Kurve über und das Gleiche gilt von der $(0, 0)$-Kurve. Bei der Verschiebung $(m_2 - m_1, n_2 - n_1)$ geht der Punkt mit den Koordinaten t, $s(t)$ in den Punkt mit den Koordinaten $t + m_2 - m_1$, $s(t) + n_2 - n_1$ über, sodass, weil der letztere ein Punkt der $(0, 0)$-Kurve ist, $s(t + m_2 - m_1) = s(t) + n_2 - n_1$ gilt. Ist nun nicht gleichzeitig $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$, so wird die Grösse 7) für ein gewisses positives m gleich einer ganzen Zahl. Hieraus folgt, wie im § 1 bemerkt wurde, dass μ eine Rationalzahl ist. Ist also μ *keine* Rationalzahl, so haben die Kurven (m_1, n_1) und (m_2, n_2) *keinen* gemeinsamen Punkt, wofern nicht gleichzeitig $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$ gilt.

Wir denken uns nun die Ebene als aus 2 Blättern bestehend. Auf dem einen Blatt befinden sich die eben besprochenen Kurven; dieses Blatt heisse das Kurvenblatt. Das andere Blatt wollen wir aus einem sogleich ersichtlichen Grunde das Geradenblatt nennen. Alle Konstruktionen, bei welchen nicht angegeben wird, auf welchem Blatt sie geschehen, mögen auf beiden Blättern in derselben Weise ausgeführt werden. Auf dem Geradenblatt ziehen wir durch den Koordinatenanfangspunkt eine Gerade mit dem Richtungskoeffizienten μ. Diese Gerade unterwerfen wir allen Verschiebungen der oben genannten Art. Durch die Verschiebung (m, n) entsteht, wie wir sagen, die (m, n)-Gerade. Ist μ *keine* Rationalzahl, so sind die (m_1, n_1)- und (m_2, n_2)-Gerade von einander verschieden, sofern nicht gleichzeitig $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$ ist. In diesem Falle bedecken die (m, n)-Geraden die Geradenebene überall dicht. Wir ziehen nun eine Senkrechte zur Abszissenachse;[1] dieselbe ist nach dem Vorigen als auf der Curven- und Geraden-Ebene gelegene Doppellinie anzusehen. Die Durchschnittspunkte der Senkrechten mit der (m, n)-Kurve und der (m, n)-Geraden bilden, wie wir festsetzen, ein Paar von entsprechenden Punkten. Bei *nicht* rationalem μ ist

[1] Im Folgenden verstehen wir unter einer »Senkrechten» stets eine Senkrechte zur Abszissenachse.

dadurch eine wechselseitig eindeutige Beziehung festgesetzt. P_1 und P_2 seien nun die Durchschnittspunkte der Senkrechten mit der (m_1, n_1)- und (m_2, n_2)-Geraden. Q_1 und Q_2 seien die Durchschnittspunkte mit der (m_1, n_1)- und (m_2, n_2)-Kurve. Hierbei wird der Fall, dass gleichzeitig $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$ ist, ausgeschlossen. Die Abszisse der auf der Senkrechten gelegenen Punkte sei t. Dann haben P_1, P_2, Q_1, Q_2 die Ordinaten $\mu . (t - m_1) + n_1$, $\mu(t - m_2) + n_2$, $s(t - - m_1) + n_1$, $s(t - m_2) + n_2$. Indem wir nun das in § 1 hinsichtlich der Differenzen 16), 17) Gefundene heranziehen, erhalten wir folgenden Satz: *Es kann niemals der Fall eintreten, dass P_2 von P_1 aus in der Richtung der positiven Ordinatenachse und gleichzeitig Q_2 von Q_1 aus in der Richtung der negativen Ordinatenachse liegt. Ebenso ist der Fall ausgeschlossen, dass P_2 von P_1 aus in der Richtung der negativen Ordinatenachse und gleichzeitig Q_2 von Q_1 aus in der Richtung der positiven Ordinatenachse liegt.* Wir drücken dieses Resultat so aus, dass wir sagen: *Die Punkte $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ liegen nicht in entgegengesetzter Ordnung.* Ist μ *keine* Rationalzahl, so sind sowohl P_1 und P_2 als auch Q_1 und Q_2 von einander verschieden. *In diesem Fall liegen $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ stets in derselben Ordnung.* Ich bemerke ausdrücklich, dass der eben abgeleitete für das Folgende wichtige Satz auf die Poincaréschen Untersuchungen zurückgeht. *Von nun an setzen wir in diesem Paragraphen μ als nicht rational voraus.*

Es mögen nun zunächst die Konsequenzen der weiteren Voraussetzung verfolgt werden, dass *die (m, n)-Kurven die Kurvenebene überall dicht bedecken.* Dann liegen auch die Durchschnittspunkte der (m, n)-Kurven mit einer Senkrechten auf ihr überall dicht. Ist das letztere umgekehrt für *eine* Senkrechte der Fall, so bedecken die (m, n)-Kurven die Ebene in der genannten Art. Wir fassen nun irgend eine Senkrechte S ins Auge. Dieselbe ist nach dem Vorhergehenden als Doppellinie anzusehen. Die überall dicht auf S liegenden Durchschnittspunkte mit den (m, n)-Geraden sind nach dem Vorigen den überall dicht auf S liegenden Durchschnittspunkten mit den (m, n)-Kurven wechselseitig eindeutig zugeordnet. Dabei ist, wie wir sahen, die Anordnung der zugeordneten Punkte auf der Kurven- und Geraden-Ebene die gleiche. Wir vervollständigen nun die Zuordnung so, dass *alle* Punkte der auf der *Geradenebene* gelegenen Senkrechten und *alle* auf der *Kurvenebene* gelegenen Punkte von S einander wechselseitig eindeutig entsprechen, wobei die Anordnung der beiden einander zugeordneten Punktsysteme in dem oben erwähnten Sinn dieselbe bleibt. Diese Zuordnung lässt sich offenbar stets ausführen und zwar nur in *einer* bestimmten Weise. Das eben Gesagte erstreckt sich auf *alle* Senkrechten.

Es seien nun x, y die Koordinaten irgend eines Punktes der Geradenebene und Y die Ordinate des zugeordneten Punktes der Kurvenebene. Nach dem

Obigen ist $Y-y$ eine eindeutige Funktion von x, y; wir bezeichnen sie mit $f(x, y)$. Weiter folgt aus dem eben Ausgeführten, dass $f(x, y)$ sich in eine *stetige* Funktion von y verwandelt, wenn man $x = \text{const.}$ setzt. Endlich ist $f(x, y)$ hinsichtlich x, y mit den Perioden 1 periodisch. Dies ergibt sich, wenn man bedenkt, dass, wie leicht zu sehen, eine (m, n)-Verschiebung entsprechende Punkte wieder in entsprechende Punkte überführt. Beachtet man die Periodizität von $f(x, y)$, die eben genannte Stetigkeitseigenschaft und endlich das über die Anordnung der zugeordneten Punkte Gesagte, so sieht man, dass die Schwankung von $f(x, y)$ bei einem speziellen konstanten x-Wert kleiner als 1 ist. *Wir werden jetzt beweisen, dass $f(x, y)$ überall stetig ist.*

Wir denken uns zunächst zwei Punkte der Geradenebene, welche auf ein und derselben (m, n)-Geraden liegen und die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 besitzen. Y_1 und Y_2 seien die Ordinaten der zugeordneten Kurvenpunkte. Es gibt dann solche Werte u, v, dass

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = (Y_2 - y_2) - (Y_1 - y_1) = \varphi(u, v)(x_2 - x_1) - \mu(x_2 - x_1) \quad . \quad . \quad 18$$

gilt, wobei φ die in 1) vorkommende Funktion bedeutet. Man kann daher die links stehende Differenz absolut beliebig klein machen, indem man $|x_2 - x_1|$ genügend klein wählt. Im Folgenden bedeute $f(P)$ den Wert von $f(x, y)$ für den Punkt P der Geradenebene. Wäre $f(x, y)$ für einen Punkt Q der Geradenebene *nicht* stetig, so würden in beliebiger Nähe von Q Punkte P existieren, für welche $|f(P) - f(Q)| > q$ gilt, wobei q eine gewisse positive Konstante bedeutet. Ist P ein derartiger Punkt, so gibt es auf der durch ihn hindurchgehenden Senkrechten einen Punkt P', welcher auf einer der Geraden (m, n) liegt, von P eine beliebig kleine Entfernung hat und $|f(P') - f(Q)| > q$ liefert. Hierbei ist die bereits gefundene Stetigkeitseigenschaft von $f(x, y)$ berücksichtigt worden. Auf Grund des eben gesagten können wir behaupten, dass die vorhin gemachte Aussage über die Existenz von Punkten P besonderer Art bestehen bleibt, wenn man die Forderung hinzufügt, dass die P auf Geraden (m, n) liegen. Es gibt daher auch auf diesen Geraden gelegene Punkte $P_1, P_2 \ldots$, welche nach Q konvergieren und $|f(P_1) - f(Q)| > q$, $|f(P_2) - f(Q)| > q \ldots$ liefern. Durch jeden dieser Punkte P_1, P_2 u. s. w., beispielsweise P_ν, denken wir uns die (m, n)-Gerade gezogen und ihren Schnittpunkt R_ν mit der durch Q gehenden Senkrechten bestimmt. Dann streben die Entfernungen QR_ν und $P_\nu R_\nu$ für $\nu \to \infty$ nach 0. Wir haben also nach dem Vorigen, indem wir das in Anschluss an 18) Gesagte und die bereits gefundene Stetigkeitseigenschaft von $f(x, y)$ berücksichtigen,

$$[f(P_\nu) - f(R_\nu)] \to 0 \qquad [f(R_\nu) - f(Q)] \to 0 \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19$$

und folglich

$$[f(P_\nu)-f(Q)]\to 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 20$$

Das gefundene Resultat lässt sich aber mit der Ungleichung $|f(P_\nu)-f(Q)|>q$ nicht vereinigen. Wir müssen daher unsere versuchsweise gemachte Annahme, $f(x,y)$ sei im Punkte Q nicht stetig, fallen lassen. Die Stetigkeit von $f(x,y)$ ist daher bewiesen. $f(x,y)$ ist also eine für alle x,y gegebene, eindeutige, stetige, mit den Perioden 1 hinsichtlich der x,y periodische Funktion.

Dem Punkt der Geradenbene mit den Koordinaten $t,\mu.t$ ist der Punkt mit den Koordinaten $t,s(t)$ auf der Kurvenebene zugeordnet. Wir haben also

$$s(t)-\mu.t=f(t,\mu.t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 21$$

Die betrachtete Lösung von 1) ist also in der Form 2) darstellbar.

Nun wollen wir die Voraussetzung, dass die (m,n)-Kurven die Ebene überall dicht bebecken, ausschalten, andererseits aber die Annahme machen, dass die betrachtete Lösung in der Form

$$s(t)=\mu.t+\chi(t,\mu.t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 22$$

darstellbar ist. Hierbei bedeutet $\chi(x,y)$ eine für alle x,y gegebene, eindeutige, stetige und mit der Perioden 1 periodische Funktion.

Aus dieser Annahme folgt, wie wir zunächst zeigen, *dass die (m,n)-Kurven die Ebene überall dicht bedecken.* Um den Beweis zu führen, ziehen wir die der Abszisse t entsprechende Senkrechte. Die Schnittpunkte der (m,n)-Kurven und (m,n)-Geraden mit dieser Geraden haben die Ordinaten $s(t-m)+n$ und $\mu.(t-m)+n$. Wir wollen im Folgenden der bequemeren Ausdrucksweise wegen die auf den (m,n)-Kurven gelegenen Punkte der Kurvenebene und die auf den (m,n)-Geraden gelegenen Punkte der Geradenebene »Punkte erster Klasse» nennen und alle übrigen Punkte auf den genannten Ebenen zur »zweiten Klasse» rechnen. Es seien nun P_1,P_2 auf der gezogenen Senkrechten gelegene, zur ersten Klasse gehörende Punkte der Geradenebene. Q_1,Q_2 seien die entsprechenden Punkte der Kurvenebene. Die Ordinaten von P_1,P_2 seien y_1,y_2, diejeningen von Q_1,Q_2 seien Y_1,Y_2. Dann haben wir, wenn P_1 und P_2 auf der (m_1,n_1)- und (m_2,n_2)-Geraden liegen

$$Y_2-Y_1=[s(t-m_2)+n_2]-[s(t-m_1)+n_1]=[\mu.(t-m_2)+n_2]-[\mu.(t-m_1)+n_1]+$$
$$+\chi(t,\mu.(t-m_2)+n_2)-\chi(t,\mu.(t-m_1)+n_1)=y_2-y_1+\chi(t,y_2)-\chi(t,y_1) \; . \; . \; . \quad 23$$

Man kann somit die Entfernung Q_1Q_2 beliebig klein machen, wenn man nur die Entfernung P_1P_2 genügend klein wählt. Gäbe es nun auf der erwähnten Senk-

rechten eine Strecke von der Länge $r > 0$ ohne auf der Kurvenebene gelegene Punkte erster Klasse, so würde diese Lücke die auf der Senkrechten und der Kurvenebene gelegenen Punkte erster Klasse in zwei Gruppen I und II zerlegen. Diesen Gruppen I und II mögen auf der Geradenebene die Punktgruppen (1) und (2) entsprechen. Berücksichtigt man das oben über die Punktanordnung Gesagte sowie den Umstand, dass die (m, n)-Geraden die Geradenebene überall dicht bedecken, so ergibt sich die Existenz von einander beliebig nahe liegenden Punkten R_1 und R_2, von denen R_1 der Gruppe (1), R_2 der Gruppe (2) angehört. Sind S_1 und S_2 die R_1 und R_2 entsprechenden Punkte der Kurvenebene, so gehört S_1 zur Gruppe I, S_2 zur Gruppe II. Benutzen wir nun die in Anschluss an 23) gemachte Bemerkung, so sehen wir, dass man die Entfernung $S_1 S_2$ beliebig klein machen kann, wenn man die Entfernung $R_1 R_2$ genügend klein wählt. Dieses Resultat ist mit der Existenz der oben erwähnten Lücke nicht vereinbar. Unsere Behauptung, dass die (m, n)-Kurven die Kurvenebene überall dicht bedecken, ist damit bewiesen.

Wir können daher im vorliegenden Fall die Funktion $f(x, y)$ wie im Vorhergehenden konstruieren. Dann gilt

$$s(t) - \mu . t = \chi(t, \mu . t) = f(t, \mu . t) \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 24$$

$$\chi(t, \mu . (t - m) + n) = \chi(t - m, \mu . (t - m)) = f(t - m, \mu . (t - m)) =$$
$$= f(t, \mu . (t - m) + n) \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 25$$

falls m, n ganze Zahlen sind. Zieht man nun die der Abszisse t entsprechende Senkrechte, so stimmen die Funktionen $\chi(x, y)$ und $f(x, y)$ für gewisse auf der Senkrechten überall dicht liegende Punkte der Geradenebene überein. Hieraus folgt, *dass die genannten Funktionen überhaupt zusammmenfallen.*

Wir wollen nun unter Beibehaltung der im unmittelbar Vorhergehenden gemachten Voraussetzungen diejenige Lösung von 1) darstellen, für welche bei $t = t_0$ $s = s_0$ wird. Wir ziehen zu diesem Zweck die der Abszisse t_0 entsprechende Senkrechte. Auf dieser Senkrechten bestimmen wir den Punkt P der Kurvenebene mit der Ordinate s_0 und den P entsprechenden[1] Punkt der Geradenebene. Die Ordinate des letzteren sei g_0. Nach dem Vorhergehenden können die ganzen Zahlen m, n so bestimmt werden, dass

$$s(t_0 - m) + n = s_0 + \varepsilon \qquad \mu . (t_0 - m) + n = g_0 + \eta \quad \ldots \ldots \quad 26$$

ist, wobei $|\varepsilon|$ und $|\eta|$ beliebig klein sind. Dann stellt

[1] Hierbei wird die Lösung zu Grunde gelegt, welche der Gegenstand der vorhergehenden Undersuchungen war.

$$s(t-m)+n=\mu.(t-m)+n+f(t,\mu.(t-m)+n) \quad \ldots\ldots \quad 27$$

eine Lösung von 1) dar, die sich von der gesuchten Lösung in einem beliebig aber fest angenommen, t_0 umschliessenden t-Intervall beliebig wenig unterscheidet, wofern nur $|\varepsilon|$ genügend klein ist. Die rechte Seite von 27) kann geschrieben werden

$$\mu.(t-t_0)+g_0+\eta+f(t,\mu.(t-t_0)+g_0+\eta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 28$$

Der Ausdruck 28) unterscheidet sich von

$$\mu.(t-t_0)+g_0+f(t,\mu.(t-t_0)+g_0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 29$$

beliebig wenig, wenn nur $|\eta|$ genügend klein ist. Man kann daher den Unterschied der gesuchten Lösung und des Ausdrucks 29) im genannten t-Intervall beliebig klein machen, indem man m, n geeignet wählt. Da aber weder die gesuchte Lösung noch 29) von der Wahl der m, n abhängen, so muss die gesuchte Lösung im genannten Intervall mit 29) übereinstimmen. Da ferner dieses t-Intervall beliebig gross gewählt werden kann, *so muss 29) die gesuchte Lösung für alle t liefern.*

Wir sehen also, *dass im hier vorliegenden Fall jede Lösung von 1) in der Form*

$$s=\mu.t+c+f(t,\mu.t+c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 30$$

bei geeigneter Wahl der Konstanten c dargestellt werden kann. Aus dem Vorhergehenden folgt auch unmittelbar, *dass 30) bei jedem Wert der Konstanten c eine Lösung liefert.*

Wir wollen annehmen, dass der den letzen Unterschungen zu Grunde liegende Fall eintritt. Es mögen die Koordinaten eines Punktes der Kurvenebene mit X, Y bezeichnet werden, während y die Ordinate des entsprechenden Punktes der Geradenebene ist. Man kann dann $Y-y$ als Funktion von X, Y betrachten. Überlegungen, die den obigen analog sind, würden dann zur Darstellung eines *Integrals* von 1) führen. Die Form dieses Integrals entspricht dem von Poincaré gefundenen Resultat.

§ 3.

Beweis des in der Einleitung angegebenen Satzes.

Indem wir uns der in der Einleitung erwähnten Bezeichnungen bedienen, wollen wir zunächst zeigen, dass man in der Tat $|\mu-\varrho|$ beliebig klein machen kann, indem man $|\varepsilon|$ genügend klein wählt. $s(t)$ und $\sigma(t)$ seien Lösungen von

1) und 4), welche für $t=0$ zusammenfallen. m sei eine beliebig aber fest ausgewählte positive ganze Zahl und (m) habe dieselbe Bedeutung, wie im §1, wobei die Gleichung 1) und die Lösung $s(t)$ zu Grunde gelegt werden. Indem man $|\varepsilon|$ genügend klein wählt, kann man erreichen, dass $\sigma(m)-\sigma(0)$ sich von $s(m)-$ $-s(0)$ beliebig wenig unterscheidet. Da, wie wir voraussetzen,[1] μ keine Rationalzahl ist, kann $s(m)-s(0)$ nach § 1 nicht ganzzahlig sein. Bildet man daher (m) unter Zugrundelegung von 4) und $\sigma(t)$, so findet man bei genügend kleinem $|\varepsilon|$ denselben Wert, wie unter Zugrundelegung von 1) und $s(t)$. Die Benutzung von 12) ergibt somit $m|\mu-\varrho|<1$ und daher $|\mu-\varrho|<\frac{1}{m}$. Damit ist die Richtigkeit unserer Bemerkung bewiesen.

Wir denken uns nun auf der positiven Ordinatenachse vom Anfangspunkt an die Strecke 1 aufgetragen. Diese werde dann in p gleiche Teile geteilt. p bedeutet hierbei eine positive ganze Zahl. Die Schnittpunkte der (m,n)-Geraden[2] mit der Ordinatenachse liegen auf ihr überall dicht, da wir ja ein nicht rationales μ voraussetzen. Es kann daher zwischen den Endpunkten jeder Teilstrecke je ein Schnittpunkt ausgewählt werden. Die (m,n)-Geraden, welche durch die gewählten Schnittpunkte gehen, denken wir uns für diejenigen Abszissen gezogen, welche kleiner als 1 und nicht kleiner als 0 sind. Auf die so erhaltenen p Abschnitte wenden wir alle (m,n)-Verschiebungen an und erhalten so ein System von unendlich vielen Abschnitten γ. Irgend eine Senkrechte schneidet diese Abschnitte in Punkten, die auf ihr nirgends dicht gelegen sind. Die Abstände benachbarter Schnittpunkte sind kleiner als $\frac{2}{p}$.

Wir kehren zu den anfänglichen p Abschnitten zurück und lenken unsere Aufmerksamkeit auf diejenigen Abschnitte β der $(0,0)$-Geraden, welche nach gehöriger Verschiebung diese p Abschnitte liefern. Auf der $(0,0)$-Geraden wählen wir dann 2 Punkte mit den Abszissen $-k$ und $+k$ so aus, dass der von diesen Punkten begrenzte Abschnitt δ alle Abschnitte β umfasst. Sobald μ und p vorliegen, kann k gewählt werden.[3] Da alle Abschnitte γ durch Verschiebung der p Abschnitte hervorgehen, so liefert der Verschiebungsprozess angewandt auf den Abschnitt δ alle Abschnitte γ als Teilabschnitte. Jeder Punkt auf einem Abschnitt γ geht daher durch Verschiebung eines gewissen Punktes des Abschnittes δ hervor.

Auf Grund des Gesagten ergibt sich die Richtigkeit der folgenden Behaup-

[1] Diese Voraussetzung ist übrigens für den im Augenblick verfolgten Zweck unwesentlich.

[2] Es wird hierbei die Gleichung 1) zu Grunde gelegt.

[3] Wir wollen k positiv wählen. Ausserdem mögen die Punkte mit den Abszissen $\pm k$ zu δ gerechnet werden.

tung. *Zieht man einen Geradenabschnitt von der Länge* $\frac{2}{p}$ *in der Richtung der Ordinatenachse, so liegt zwischen den Endpunkten dieser Strecke mindestens ein Punkt, der durch eine* (m, n)*-Verschiebung eines Punktes von* δ *hervorgeht.*

Im Falle der Gleichung 1) kommen die Betrachtungen des zweiten Paragraphen im vollen Umfang zur Geltung. Die Lösungen ergeben sich aus 3). Im Falle der Gleichung 4) dagegen sind diejenigen Untersuchungen gegenstandslos, welche sich auf die Annahme stützen, dass die (m, n)-Kurven die Kurvenebene überall dicht bedecken.

Wir wählen zunächst eine positive Konstante ϑ willkürlich aber fest aus. Dieser Konstanten ϑ ordnen wir eine positive Grösse θ so zu, dass

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leqq \frac{\vartheta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31$$

gilt, sobald $|y'' - y'| < \theta$ ist. Hierbei bedeutet $f(x, y)$ eine gemäss § 2 für die Gleichung 1) unter Zugrundelegung einer fest gewählten Lösung eingeführte Funktion. Hierauf werden die positiven Grössen r und q sowie die positive ganze Zahl p so gewählt, dass

$$2r + 2q + \frac{4}{p} < \frac{\vartheta}{2} \qquad 2q + \frac{4}{p} \leqq \theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 32$$

ist. Der positiven ganzen Zahl p ordnen wir hierauf gemäss den vorhergehenden Betrachtungen dieses Paragraphen eine positive Grösse k zu, wobei wir uns auf Gleichung 1) beziehen. Endlich sei $\varkappa$ eine solche positive Grösse, dass für $|\varepsilon| < \varkappa$

$$|\mu - \varrho| < \frac{q}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33$$

gilt und für $-k \leqq t \leqq k$ Lösungen von 1) und 4), die für $t = 0$ zusammenfallen, sich um weniger als r unterscheiden. Es existiert bei unseren Voraussetzungen ein solches $\varkappa$. *Im Folgenden wird stets* $|\varepsilon| < \varkappa$ *angenommen.*

Es möge nun $\sigma(t)$ irgend eine Lösung von 4) sein. Die Konstante c sei so gewählt, dass

$$s(t) = \mu . t + c + f(t, \mu . t + c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34$$

diejenige Lösung von 1) darstellt, welche für $t = 0$ mit $\sigma(t)$ übereinstimmt. *Diese Lösung 34) der Gleichung 1)* werde von nun ab zu Grunde gelegt und die Betrachtungen von § 2 mögen sich an diese Lösung anschliessen. Die Rolle der Funktion $f(x, y)$ in § 2 spielt dann die Funktion $c + f(x, y + c)$.

Sowohl für die Gleichung 1) als auch für die Gleichung 4) führen wir je eine Geraden und Kurvenebene ein; wir haben es daher jetzt mit vier übereinander liegenden Ebenen zu thun. Die Kurvenebenen mögen mit C_1 und C_4, die Geradenebenen mit G_1 und G_4 bezeichnet verden, je nachdem es sich um die Gleichung 1) oder 4) handelt.

Wir ziehen nun die (0, 0)-Gerade auf G_1 und G_4 und bestimmen auf diesen Geraden die Abschnitte, welche die Punkte umfassen, deren Abszissen absolut nicht grösser als k sind. Diese Abschnitte wollen wir R-Abschnitte auf der $(0,0)_1$-und $(0,0)_4$-Geraden nennen, je nachdem es sich um Gleichung 1) oder Gleichung 4) handelt.

Wir ziehen nun die Senkrechte $x = t$, wobei t willkürlich gewählt ist. Diese Senkrechte mag allen vier Ebenen C_1, G_1, C_4, G_4 angehören. Auf dieser Senkrechten wählen wir den Punkt R mit der Ordinate $\varrho . t$. R möge auf G_1 und G_4 liegen. Es möge zunächst die auf G_1 gelegene Senkrechte betrachtet werden und im besonderen diejenigen beiden Abschnitte derselben, deren Ordinaten den Ungleichungen $q \overline{\overline{<}} y \overline{\overline{<}} q + \frac{2}{p}$ und $-q - \frac{2}{p} \overline{\overline{<}} y \overline{\overline{<}} -q$ genügen. Da diese Strecken in der Richtung der Ordinatenachse liegen und die Längen $\frac{2}{p}$ haben, so kann man zwischen den Endpunkten der ersten einen solchen Punkt P_1 und zwischen den Endpunkten der zweiten einen solchen Punkt P_2 angeben, dass P_1 durch Verschiebung eines Punktes P_1', P_2 durch Verschiebung eines Punktes P_2' erhalten wird, wobei sowohl P_1' als auch P_2' dem k-Abschnitt der $(0,0)_1$-Geraden angehören. Die Abszisse von P_1' sei a_1, diejenige von P_2' sei a_2. Wir bestimmen nun die P_1' und P_2' entsprechenden Punkte Q_1' und Q_2', wobei die Gleichung 1) und die Lösung 34) zu Grunde gelegt werden. Q_1' liegt auf C_1 und hat die Koordinaten $a_1, s(a_1)$; Q_2' liegt auf C_1 und hat die Koordinaten $a_2, s(a_2)$. Dieselbe Verschiebung, welche P_1' in P_1 überführt, wenden wir nun auf Q_1' an und gelangen so zu dem P_1 auf C_1 entspechenden Punkt, den wir mit Q_1 bezeichnen wollen. Dieselbe Verschiebung, welche P_2' in P_2 überführt, lässt Q_2' in einen Punkt auf C_1 übergehen, der P_2 entspricht; wir bezeichnen ihn mit Q_2. Q_1 und Q_2 liegen auf der Senkrechten $x = t$ in derselben Ordnung wie P_1 und P_2. Den R entsprechenden auf C_1 liegenden Punkt bezeichnen wir mit S. Seine Ordinate ist

$$\varrho . t + c + f(t, \varrho . t + c) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 35$$

Da P_1 und P_2 den Punkt R einschliessen, so schliessen Q_1 und Q_2 den Punkt S ein.

Wir wenden uns nun der Gleichung 4) zu. Zunächst werden auf dem k-Abschnitt der $(0,0)_4$-Geraden diejenigen Punkte aufgesucht, welche dieselben

Abszissen wie P_1' und P_2' haben. Es seien dies der Punkt π_1' mit der Abszisse a_1 und der Ordinate $\varrho . a_1$ und ferner der Punkt π_2' mit der Abszisse a_2 und der Ordinate $\varrho . a_2$. Die Entfernungen $P_1' \pi_1'$ und $P_2' \pi_2'$ sind gleich $|\mu - \varrho| . |a_1|$ und $|\mu - \varrho| . |a_2|$. Da $|a_1|$ und $|a_2|$ nicht grösser als k sind, so erhält man mit Berücksichtigung von 33) $P_1' \pi_1' < q$ und $P_2' \pi_2' < q$. Wir unterwerfen nun π_1' derselben Verschiebung, welche P_1' nach P_1 führt und π_2' derselben Verschiebung, welche P_2' nach P_2 führt. Auf diese Weise ergeben sich zwei Punkte auf der Senkrechten $x = t$, welche wir π_1 und π_2 nennen wollen. Offenbar ist $P_1 \pi_1 = P_1' \pi_1'$ und $P_2 \pi_2 = P_2' \pi_2'$ und daher

$$P_1 \pi_1 < q \qquad\qquad P_2 \pi_2 < q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 36$$

Der Punkt P_1 liegt, wie wir wissen, auf der Senkrechten $x = t$ vom Punkt R aus nach der Seite der positiven Ordinatenachse und es ist $P_1 R > q$. Daher liegt auch der Punkt π_1 auf $x = t$ vom Punkte R aus in der Richtung der positiven Ordinatenachse. Ebenso ergibt sich, dass π_2 auf $x = t$ von R aus in der Richtung der negativen Ordinatenachse liegt. Die Punkte π_1 und π_2 schliessen den Punkt R ein.

Wir fassen nun diejenigen Punkte auf C_4 ins Auge, welche die Koordinaten $a_1, \sigma(a_1)$ und $a_2, \sigma(a_2)$ besitzen. Diese Punkte nennen wir γ_1' und γ_2'. Wenden wir die Betrachtungen des § 2 auf die Gleichung 4) an, indem wir die Lösung $\sigma(t)$ zu Grunde legen, so sind γ_1', γ_2' Punkte, welche π_1', π_2' entsprechen. Die Entfernungen $Q_1' \gamma_1'$ und $Q_2' \gamma_2'$ sind gleich $|s(a_1) - \sigma(a_1)|$ und $|s(a_2) - \sigma(a_2)|$. Diese Grössen sind jedoch kleiner als r (s. die auf (33) folgenden Zeilen). Wir haben also $Q_1' \gamma_1' < r$ und $Q_2' \gamma_2' < r$. Es möge nun γ_1' derselben Verschiebung unterworfen werden, wie P_1', Q_1', π_1' und γ_2' derselben Verschiebung wie P_2', Q_2', π_2'. Man erhält so auf der Senkrechten $x = t$ zwei Punkte, die wir γ_1 und γ_2 nennen. Da π_1' und γ_1' entspechende Punkte sind, so sind auch π_1 und γ_1 entsprechende Punkte. Dasselbe gilt von π_2 und γ_2. Hierbei wird natürlich die Gleichung 4) und die Lösung $\sigma(t)$ zu Grunde gelegt. Es gilt $Q_1' \gamma_1' = Q_1 \gamma_1$ und $Q_2' \gamma_2' = Q_2 \gamma_2$ und daher

$$Q_1 \gamma_1 < r \qquad\qquad Q_2 \gamma_2 < r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 37$$

Wir bezeichnen nun den Punkt der C_4-Ebene mit den Koordinaten $t, \sigma(t)$ mit Σ. Offenbar sind R und Σ entsprechende Punkte. Da π_1 und π_2 den Punkt R einschliessen und γ_1, γ_2 den Punkten π_1, π_2 entsprechende Punkte sind, so liegt Σ nicht ausserhalb des von γ_1 und γ_2 bestimmten Intervalls der Senkrechten $x = t$.

Indem wir für den Augenblick die Verteilung der erwähnten auf $x = t$ liegenden Punkte auf die vier Ebenen unberücksichtigt lassen und nur die Lage

auf der Senkrechten $x = t$ beachten, vergrössern wir das Intervall $Q_1 Q_2$ nach beiden Seiten hin um r. Das so gefundene neue Intervall hat die Ausdehnung $Q_1 Q_2 + 2r$. Der Punkt S liegt zwischen Q_1 und Q_2, also auch zwischen den Endpunkten des neuen Intervalls. Die Entfernungen $Q_1 \gamma_1$ und $Q_2 \gamma_2$ sind kleiner als r, es liegen daher auch γ_1 und γ_2 zwischen den Endpunkten des neuen Intervalls. Da ferner Σ nicht ausserhalb des von γ_1 und γ_2 bestimmten Intervalls gelegen ist, so liegt auch Σ zwischen den Endpunkten des neuen Intervalls. Die Entfernung ΣS ist daher kleiner als $Q_1 Q_2 + 2r$. Die Ordinate von Σ ist $\sigma(t)$, diejenige von S wird durch den Ausdruck 35) dargestellt. *Es unterscheidet sich daher $\sigma(t)$ vom Ausdruck 35) um weniger als $Q_1 Q_2 + 2r$.*

Q_1 und Q_2 sind Punkte auf C_1, welche P_1 und P_2 entsprechen, wenn die Gleichung 1) und die Lösung 34) zu Grunde gelegt werden. Werden die Ordinaten von P_1 und P_2 mit y_1 und y_2 bezeichnet, so hat daher Q_1 die Ordinate

$$y_1 + c + f(t, y_1 + c) \quad \ldots \quad 38$$

und Q_2 die Ordinate

$$y_2 + c + f(t, y_2 + c) \quad \ldots \quad 39$$

Für die Entfernung $Q_1 Q_2$ gilt daher

$$Q_1 Q_2 \overline{\overline{<}} |y_2 - y_1| + |f(t, y_2 + c) - f(t, y_1 + c)| \quad \ldots \quad 40$$

Nach dem über die Lage von P_1 und P_2 oben Gesagten gilt, wenn man 32) berücksichtigt,

$$|y_2 - y_1| < 2q + \frac{4}{p} \overline{\overline{<}} \theta \quad \ldots \quad 41$$

und daher nach 31)

$$|f(t, y_2 + c) - f(t, y_1 + c)| \overline{\overline{<}} \frac{\vartheta}{2} \quad \ldots \quad 42$$

Somit ergibt sich

$$Q_1 Q_2 < 2q + \frac{4}{p} + \frac{\vartheta}{2} \quad \ldots \quad 43$$

$$Q_1 Q_2 + 2r < 2r + 2q + \frac{4}{p} + \frac{\vartheta}{2} < \vartheta \quad \ldots \quad 44$$

wobei 32) berücksichtigt worden ist. *Es unterscheidet sich daher $\sigma(t)$ vom Ausdruck 35) um weniger als ϑ.* Wir können also schreiben

$$\sigma(t) = \varrho \cdot t + c + f(t, \varrho \cdot t + c) + \eta \quad \ldots \quad 45$$
$$|\eta| < \vartheta$$

Damit ist der in der Einleitung erwähnte Satz bewiesen.

ÜBER EINEN SATZ DES HERRN SERGE BERNSTEIN.

Von

MARCEL RIESZ

in Stockholm.

(Aus zwei Briefen an Herrn G. Mittag-Leffler.)

I.

...Neulich haben wir uns über einen Satz von Herrn S. Bernstein unterhalten. Ich kann Ihnen jetzt für denselben einen ganz elementaren Beweis mitteilen, der auf der Lagrangeschen Interpolationsformel beruht.

Ich werde zunächst den zu beweisenden Satz folgendermassen aussprechen.

Es sei $f(x)$ ein Polynom von höchstens n-tem Grade mit beliebigen komplexen Koeffizienten

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Es bedeute L das Maximum des absoluten Betrages von $f(x)$ auf der Strecke $(-1, +1)$. Bezeichnen wir dann mit ξ einen beliebigen Punkt, der ausserhalb[1] *der Strecke $(-1, +1)$ liegt, so ist*

$$|f(\xi)| \leq L(A+B)^n, \tag{1}$$

wo A und B die Halbachsen der Ellipse bedeuten, die durch den Punkt ξ geht und die Punkte -1 und $+1$ zu Brennpunkten hat.

Herr Bernstein[2] beweist für Polynome mit reellen Koeffizienten

$$|f(\xi)| < L(A+B)^n \qquad (n > 0) \tag{2}$$

[1] Der Satz bleibt richtig, wenn ξ auf der Strecke $(-1, +1)$ gelegen ist, wird aber in diesem Falle trivial, da jetzt die Ellipse in die (doppelte) Strecke $(-1, +1)$ übergeht und $A+B=1$ wird.

[2] S. Bernstein: (I), Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné, Mémoires publiés par la Classe des Sciences de l'Académie de Belgique, Bd. 4, 1912, S. 13—15. In dieser Arbeit wird der Satz nur für reelle ξ bewiesen. Der allgemeine Beweis befindet sich in der Arbeit (II): Sur une propriété des polynomes, Bulletin de la Soc. Math. de Kharkof, Bd. 14.

und für Polynome mit beliebigen komplexen Koeffizienten

$$|f(\xi)| < 2L(A+B)^n.$$

Ich werde Ihnen demnächst einen auf der Theorie der analytischen Funktionen fussenden Beweis mitteilen, durch welchen ich zeigen kann, dass (2) auch für Polynome mit beliebigen komplexen Koeffizienten richtig ist. Mein elementares Verfahren ergibt aber für beliebige ξ nur die weniger besagende Ungleichung (1). (Wie ich am Ende dieses Briefes zeigen werde, ergibt z. B. für *reelle* ξ die LAGRANGEsche Interpolationsformel sogar mehr als (2), aber nicht für ein beliebiges ξ).

Um die Interpolationsformel anwenden zu können, bestimmen wir zunächst ein Polynom $(n+1)$-ten Grades $g(x)$, das in den Punkten

$$x_0 = 1,\, x_1 = \cos\frac{\pi}{n},\, \ldots x_r = \cos\frac{r\pi}{n},\, \ldots x_n = -1$$

verschwindet. Zu diesem Ende setzen wir für $-1 \leq x \leq 1$, $x = \cos\varphi$. Verändert sich nun φ von 0 bis π, so beschreibt x die Strecke $(+1, -1)$. Hieraus erhellt, dass das fragliche Polynom

$$g(x) = \sin(\arccos x)\sin(n \arccos x) = G(\varphi) = \sin\varphi \sin n\varphi$$

gesetzt werden kann.[1]

Nach der LAGRANGEschen Interpolationsformel ist nun

$$f(x) = g(x)\sum_{r=0}^{n}\frac{f(x_r)}{(x-x_r)g'(x_r)}.$$

Um diesen Ausdruck explizit zu berechnen, schreiben wir

$$g'(x_r) = \left[\frac{d}{d\varphi}(\sin n\varphi \sin\varphi)\frac{d\varphi}{dx}\right]_{\varphi=\varphi_r} = -\left[\frac{n\cos n\varphi \sin\varphi + \cos\varphi \sin n\varphi}{\sin\varphi}\right]_{\varphi=\varphi_r}.$$

Hieraus erhalten wir

$$g'(x_r) = (-1)^{r+1} n \qquad (0 < r < n)$$

und

[1] Dass $g(x)$ wirklich ein Polynom $(n+1)$-ten Grades in $x = \cos\varphi$ ist, folgt z. B. aus der Formel

$$g(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2i}\left[(x+i\sqrt{1-x^2})^n - (x-i\sqrt{1-x^2})^n\right].$$

Hier kann der Quadratwurzel irgend einer der beiden möglichen Werte beigelegt werden, der aber dann an allen drei Stellen derselbe sein muss.

$$g'(1) = -2n,$$

$$g'(-1) = (-1)^{n+1}\,2n.$$

Mithin

(3) $$f(x) = \frac{g(x)}{n}\left(-\frac{f(1)}{2(x-1)} + (-1)^{n+1}\frac{f(-1)}{2(x+1)} + \sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{r+1}\frac{f(x_r)}{x-x_r}\right).$$

Es sei nun ξ ein beliebiger spezieller Wert von x, der ausserhalb der Strecke $(-1, +1)$ liegt. Wir können dann nach dem Vorgehen von Herrn BERNSTEIN

(4) $$\xi = \cos(a+bi) = \frac{e^b+e^{-b}}{2}\cos a - i\,\frac{e^b-e^{-b}}{2}\sin a$$

setzen. Da Kosinus eine gerade Funktion ist, können wir hierbei $b > 0$ wählen. Dann zeigt aber die Formel (4) folgendes. Ist $a + bi$ einer der Werte von arc cos ξ und ist $b > 0$, so ist ξ auf einer Ellipse belegen, die die Punkte -1 und $+1$ zu Brennpunkten hat und deren Halbachsen $\frac{e^b+e^{-b}}{2}$ und $\frac{e^b-e^{-b}}{2}$ sind. Die Summe dieser Halbachsen ist natürlich e^b.

Wir schätzen nun $|\sin(a+bi)|$ ab.

$$|\sin(a+bi)| = \left|\frac{e^b+e^{-b}}{2}\sin a + i\,\frac{e^b-e^{-b}}{2}\cos a\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{e^{2b}+e^{-2b}-2\cos 2a} \leqq \frac{e^b+e^{-b}}{2} < e^b;$$

ebenso

$$|\sin n(a+bi)| \leqq \frac{e^{nb}+e^{-nb}}{2} < e^{nb}.$$

Mithin

(5) $$|g(\xi)| = |\sin(n \arccos \xi)\sin(\arccos \xi)| = |\sin n(a+bi)\sin(a+bi)| < e^{(n+1)b}.$$

Wir bezeichnen nun mit δ das Minimum des Abstandes von ξ zu den Punkten der Strecke $(-1, +1)$. Dann erhalten wir aus (3) und aus (5) zunächst folgende sehr grobe Abschätzung

$$|f(\xi)| \leqq \frac{e^{(n+1)b}}{n}\,\frac{Ln}{\delta} = L\,\frac{e^{(n+1)b}}{\delta}.$$

Dieses Resultat wenden wir jetzt auf das Polynom $(f(x))^m$ an, wo m eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Wir erhalten

$$|f(\xi)|^m < L^m \frac{e^{(mn+1)b}}{\delta},$$

also

$$|f(\xi)| \leq L e^{nb} \sqrt[m]{\frac{e^b}{\delta}}.$$

Lassen wir nun m ins Unendliche wachsen, so ergibt sich

$$|f(\xi)| \leq L e^{nb}.$$[1] W. z. b. w.

Für reelle Werte von ξ ergibt die Interpolationsformel folgende Verallgemeinerung eines Satzes von TCHEBYCHEFF.[2]

Unter den am Anfange dieses Briefes gemachten Voraussetzungen ist für jeden reellen Wert ξ, der ausserhalb der Strecke $(-1, +1)$ liegt,

(6) $$|f(\xi)| \leq L\,|\cos n(\arccos \xi)|,$$[3]

das Gleichheitszeichen ausgeschlossen, wenn das Polynom $f(x)$ nicht von der Form $Le^{i\Theta}\cos(n \arccos x)$ ist, wobei Θ eine beliebige reelle Zahl bedeutet.

In der Tat ergibt die Formel (3) für ein beliebiges x

(7) $$|f(x)| \leq \frac{L\,|g(x)|}{n}\left(\frac{1}{2|x-1|} + \frac{1}{2|x+1|} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{|x-x_r|}\right).$$

[1] Man kann einen ähnlichen Beweis und dasselbe Resultat erhalten, wenn man in $f(x)$ $x = \cos\varphi$ setzend, $f(\cos\varphi)$ in eine endliche FOURIERsche Reihe entwickelt, d. h.

$$f(\cos\varphi) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \alpha_\varkappa \cos\varkappa\varphi$$

schreibt und dann die Koeffizienten $\alpha_\varkappa$ abschätzt; man erhält für $|f(\xi)|$ zunächst eine grobe Abschätzung, die dann, wie oben, verfeinert werden kann.

Den Kunstgriff, eine grobe Abschätzung auf eine beliebig hohe Potenz einer Funktion anzuwenden, um daraus eine genauere Abschätzung für die Funktion selbst herzuleiten, entnehme ich einem Schreiben von Herrn LANDAU. Herr LANDAU wendet daselbst den genannten Kunstgriff auf ein von dem unsrigen völlig verschiedenes Problem an.

[2] TCHEBYCHEFF: Sur les fonctions qui s'écartent peu de zéro pour certaines valeurs de la variable, Werke, Bd. 2, S. 335—356. Vergl. auch BERNSTEIN (I), S. 13—14. TSCHEBYCHEFF und BERNSTEIN beweisen diesen Satz nur für Polynome mit reellen Koeffizienten und zeigen in diesem Falle, dass das Gleichheitszeichen nur für das Polynom $f(x) = \pm L \cos(n \arccos x)$ bestehen kann. In seiner späteren Arbeit (II) zeigt Herr BERNSTEIN, dass für Polynome mit reellen Koeffizienten die Ungleichung (6) für beliebige komplexe ξ gilt, die der Bedingung $|\xi| \geq 1$ genügen.

[3] Dass diese Abschätzung genauer ist als (1), folgt z. B. aus der Ungleichung $|\cos n(a+bi)| = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2nb} + e^{-2nb} + 2\cos 2na} \leq \frac{e^{nb}+e^{-nb}}{2} < e^{nb}$. Vergl. BERNSTEIN (I), S. 14.

Setzen wir andererseits in (3) statt $f(x)$ die Funktion $\cos(n \arccos x)$ ein und beachten, dass $\cos(n \arccos x_r) = (-1)^r$ ist, so erhalten wir

$$\cos(n \arccos x) = -\frac{g(x)}{n}\left(\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{x - x_r}\right). \tag{8}$$

Bedeutet nun ξ einen beliebigen reellen Wert, der entweder > 1 oder < -1 ist, und setzen wir diesen Wert in (7) und (8) ein, so haben alle Glieder der Klammer in (8) dasselbe Vorzeichen, mithin ist der absolute Betrag dieser Klammer gleich dem Werte der Klammer in (7), folglich ist die rechte Seite von (7) gleich $L|\cos(n \arccos \xi)|$. Also endlich

$$|f(\xi)| \leq L|\cos(n \arccos \xi)|. \tag{6}$$

Man sieht auch unmittelbar (da $g(\xi)$ für die in Betracht kommenden Werte nicht verschwindet), dass das Gleichheitszeichen in (7), also auch in (6), nur dann bestehen kann, wenn die Werte $f(x_r)$ abwechselnd gleich $\pm e^{i\Theta} L$ sind. Dann ist aber, wie leicht ersichtlich,

$$f(x) = \pm e^{i\Theta} L \cos(n \arccos x).$$

Es ist einleuchtend, dass es in dem zuletzt bewiesenen Satze genügt, statt $|f(x)| \leq L$, für $-1 \leq x \leq 1$, nur $|f(x_r)| \leq L$ $(r = 0, 1, \ldots n)$ vorauszusetzen.

Islinge, den 23. Mai 1915.

II.

... Wie ich schon in meinem vorigen Briefe angedeutet habe, lässt sich, für $n > 0$, die Ungleichung (1) jenes Briefes durch die schärfere Ungleichung (2) ersetzen; d. h. unter den dortigen Voraussetzungen gilt für einen beliebigen Punkt ξ, der ausserhalb der Strecke $(-1, +1)$ liegt, die Ungleichung

$$|f(\xi)| < L(A+B)^n.$$

Der Beweis beruht auf einfachen funktionentheoretischen Betrachtungen, welche die wahre Grundlage des Satzes zu bilden scheinen.

Man denke sich die Ebene längs der Strecke $(-1, +1)$ aufgeschnitten und bilde in dieser aufgeschnittenen Ebene die Funktion

$$\psi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Es wird derjenige Zweig der Quadratwurzel genommen, der für alle reelle $z > 1$ positiv ist. Dadurch ist $\psi(z)$ in der aufgeschnittenen Ebene eindeutig bestimmt.

Wir beweisen nun den folgenden (übrigens als bekannt zu betrachtenden) Hilfssatz:

Auf jeder Ellipse, mit den Brennpunkten -1 *und* $+1$ *und den Halbachsen* A *und* B, *ist* $|\psi(z)|$ *konstant und ist gleich* $A+B$. *Speziell ist auf der doppelten Strecke* $(-1, +1)$ $|\psi(z)| = 1$.

Bedeutet z einen Punkt der genannten Ellipse, so kann $z = A\cos\varphi + iB\sin\varphi$ gesetzt werden. Ausserdem ist $A^2 - B^2 = 1$. Also

$$\begin{aligned}\psi(z) &= A\cos\varphi + iB\sin\varphi + \sqrt{A^2\cos^2\varphi + 2iAB\cos\varphi\sin\varphi - B^2\sin^2\varphi - 1} \\ &= A\cos\varphi + iB\sin\varphi + \sqrt{A^2\cos^2\varphi + 2iAB\cos\varphi\sin\varphi - B^2\sin^2\varphi - A^2 + B^2} \\ &= A\cos\varphi + iB\sin\varphi + \sqrt{B^2\cos^2\varphi + 2iAB\cos\varphi\sin\varphi - A^2\sin^2\varphi}.\end{aligned}$$

Der Wert der Quadratwurzel ist $\pm(B\cos\varphi + iA\sin\varphi)$. Da demjenigen Punkte der Ellipse, der auf der positiven reellen Achse liegt, der Wert $\varphi = 0$ entspricht, muss das Vorzeichen $+$ genommen werden. Mithin ist

$$\psi(z) = (A+B)e^{i\varphi}$$

und

$$|\psi(z)| = A + B.$$

Die Doppelstrecke $(-1, +1)$ kann als diejenige Ellipse aufgefasst werden, für welche $A = 1$ und $B = 0$ wird, folglich übergeht hier die obige Gleichung in $|\psi(z)| = 1$. Dies folgt übrigens auch daraus, dass auf dieser Strecke z reell und $\sqrt{z^2 - 1} = \pm i\sqrt{1 - z^2}$ rein imaginär ist.

Wir betrachten nun in der aufgeschnittenen Ebene die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{(\psi(z))^n}.$$

Diese Funktion ist in jedem inneren Punkte der aufgeschnittenen Ebene (auch im Unendlichen) regulär analytisch, mithin erreicht ihr absoluter Betrag sein Maximum auf der Grenze, d. h. auf den beiden Rändern der Doppelstrecke $(-1, +1)$. Hier ist aber der absolute Betrag des Nenners gleich 1, und der absolute Betrag des Zählers ist nach unserer Voraussetzung $\leq L$. Hieraus folgt schon, dass in der ganzen Ebene $|g(z)| \leq L$ ist. Da aber der Zähler von $g(z)$ ein Polynom, und der Nenner, für $n > 0$, kein Polynom ist, ist $g(z)$ keine Konstante. Mithin ist in jedem Punkte, der ausserhalb der Strecke $(-1, +1)$ liegt,

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{(\psi(z))^n}\right| < L,$$

d. h.

$$|f(z)| < L(A+B)^n. \quad \text{W. z. b. w.}^{1}$$

Unser Beweis lässt sich auch leicht auf den Fall übertragen, wo $f(z)$ ein Polynom in z und $\sqrt{z^2-1}$ vom Gesamtgrade $\leq n$ ist. Hierdurch erhält man, wenn man noch $z = \cos x$ setzt, einen Satz über trigonometrische Polynome, auf welchen ich aber hier nicht näher eingehen will, da er auch aus unseren späteren Betrachtungen folgt.

Ich sagte oben, dass der angewandte Hilfssatz als bekannt zu betrachten ist. In der Tat bildet die Funktion $x = \psi(z)$ einen Zweig der Umkehrung der Funktion

$$z = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right). \tag{9}$$

Die Funktion (9) und ihre Umkehrung werden z. B. im zweiten Bande des *Traité d'Analyse* von Herrn PICARD eingehend behandelt. (Vergl. 2. Aufl. S. 314—317.) Die Funktion (9) bildet jeden um den Anfangspunkt beschriebenen Kreis, dessen Halbmesser $r > 1$ ist, auf eine Ellipse ab, deren Halbachsen A und B der Gleichung $A + B = r$ genügen, und deren Brennpunkte -1 und $+1$ sind. Der Kreis mit dem Halbmesser 1 wird auf die doppelte Strecke $(-1, +1)$ abgebildet. In diesen Tatsachen ist der obige Hilfssatz enthalten.

Jeder Kreis, dessen Halbmesser $r < 1$ ist, wird durch die Funktion (9) wieder auf eine Ellipse abgebildet, deren Halbachsen die Gleichung $A - B = r$ erfüllen und deren Brennpunkte ebenfalls -1 und $+1$ sind. Die x-Ebene wird also durch die Funktion (9) auf die doppelte z-Ebene abgebildet. Die Umkehrfunktion dieser Abbildung hat folglich zwei Werte, die durch die Formeln

$$x_1 = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

und

$$x_2 = z - \sqrt{z^2 - 1}$$

dargestellt werden. Natürlich ist $x_1 x_2 = 1$.

[1] Dieser Beweis, den mir Herr MARCEL RIESZ seiner Zeit mitteilte, wurde von mir in zwei kleineren Aufsätzen »Über einen Satz des Herrn SERGE BERNSTEIN, Sitzungsberichte der Kgl. Bayer. Akad. d. Wissensch., Jahrg. 1915, S. 419—424» und »Sur un théorème de M. SERGE BERNSTEIN, The Tohôku Math. Journal, Vol. 9, Nos. 1, 2, 1916, S. 1—6» ohne andere Bemerkung wiedergegeben, als mit einem Hinweis auf den obigen Brief. Durch unvorhergesehene Umstände wurde jedoch das Drucken desselben derart verzögert, dass meine Aufsätze früher als der Brief erschienen. Hierdurch könnte das Missverständnis aufkommen, der Beweis stamme von mir. Dies ist aber, wie ich hier ausdrücklich betonen will, durchaus nicht der Fall.

G. MITTAG-LEFFLER.

Um das grosse Interesse der betrachteten Abbildung zu zeigen, will ich hier einen Satz aussprechen, der aus den angeführten Betrachtungen bei PICARD unmittelbar folgt.

Jede Funktion, die ausserhalb der Strecke $(-1, +1)$ regulär analytisch ist, kann in eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \sqrt{z^2 - 1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z + \sqrt{z^2 - 1})^{-n} \tag{10}$$

entwickelt werden.

Dieser Satz beruht eben auf der Tatsache, dass die Funktion $z - \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}}$ in der aufgeschnittenen Ebene regulär analytisch ist, und diese Ebene auf das Innere des Einheitskreises abbildet.

Der zuletzt ausgesprochene Satz gestattet eine recht interessante Anwendung. Herr HAAR hat nämlich den folgenden merkwürdigen Entwicklungssatz gefunden. (Über analytische Funktionen mit singulärer Linie, Göttinger Nachrichten, 1914, Heft 1, S. 115—123.)

Sei $F(z)$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen z, die ausserhalb des doppelpunktlosen analytischen Kurvenstückes k überall regulär analytisch ist. Allsdann existieren unendlich viele, längs der Kurve k definierte und nur von dieser Kurve abhängige, stetige Funktionen $f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots$ so, dass für jede Stelle z, die ausserhalb der Kurve liegt, die unendliche Reihe

$$F(\infty) + a_1 \int_{(k)} \frac{df_1(\zeta)}{\zeta - z} + a_2 \int_{(k)} \frac{df_2(\zeta)}{(\zeta - z)^2} + \cdots + a_n \int_{(k)} \frac{df_n(\zeta)}{(\zeta - z)^n} + \tag{11}$$

konvergiert und die Funktion $F(z)$ darstellt; hierbei bedeuten die a_n Konstanten, und die Integrale sind im STIELTJESschen Sinne genommen.

Herr HAAR beweist dies durch eine konforme Abbildung auf Grund eines C. NEUMANNschen Theorems über Entwicklungen nach Kugelfunktionen zweiter Art. Es ist nun leicht zu zeigen, dass, wenn man statt dieses Entwicklungssatzes den obigen anwendet, die STIELTJESschen Integrale vermieden werden können. Es sei in der Tat $\varphi(z)$ die von Herrn HAAR angewandte Funktion, welche die durch die Kurve k aufgeschnittene Ebene auf eine durch die Strecke $(-1, +1)$ aufgeschnittene Ebene konform abbildet, wobei die unendlich fernen Punkte der beiden Ebenen einander entsprechen mögen. Dann ist nach dem obigen Satz, wenn wir

$$\beta(z) = \varphi(z) - \sqrt{(\varphi(z))^2 - 1}$$

setzen,

(12) $$F(z) = F(\infty) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\beta(z))^n.$$

Da nun die Funktion $\beta(z)$ in der ganzen durch die Kurve k aufgeschnittenen Ebene stetig ist und im Unendlichen verschwindet, so können wir schreiben

$$(\beta(z))^n = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int \frac{(\beta(\zeta))^n}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

wobei das Integral über die beiden Ränder der Kurve k erstreckt wird und zwar so, dass die aufgeschnittene Ebene zur linken liegt. Integriert man dann nach dem Vorgehen von Herrn HAAR $(n-1)$-mal partiell, so müssen die total integrierten Glieder verschwinden, da die Funktion $(\beta(z))^n$ im Unendlichen von der n-ten Ordnung verschwindet. Mithin erhält man

$$(\beta(z))^n = \int \frac{\gamma_n(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta.$$

Jedem Punkte ζ der Kurve k (ausser den Endpunkten) entsprechen in der aufgeschnittenen Ebene zwei Punkte ζ' und ζ''. Setzen wir $g_n(\zeta) = \gamma_n(\zeta') - \gamma_n(\zeta'')$ und in den Endpunkten $g_n(\zeta) = 0$, so erhalten wir

(13) $$(\beta(z))^n = \int_{(k)} \frac{g_n(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta.$$

Aus (12) und (13) folgt nun die Darstellung

$$F(z) = F(\infty) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{(k)} \frac{g_n(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta,$$

wobei die Funktionen $g_n(\zeta)$ auf der Kurve k stetig (und ausser den Endpunkten sogar regulär analytisch) sind.

Es sei noch bemerkt, dass die Funktionen $f_n(\zeta)$ in der Entwicklungsformel von Herrn HAAR *von der zweiten angefangen* eine stetige Ableitung besitzen, wie das aus dem Beweise von Herrn HAAR hervorgeht. Man könnte also auch in der Formel (11) für $n = 2, 3, \ldots$

$$\int_{(k)} \frac{d f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^n} = \int_{(k)} \frac{f'_n(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta = \int_{(k)} \frac{g_n(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta$$

schreiben. Die Einheitlichkeit der Darstellung würde aber dann verloren gehen, da $f_1(\zeta)$ keine stetige Ableitung besitzt.

Zuletzt will ich noch Ihre Aufmerksamkeit auf einige Sätze lenken, die in denselben Gedankenkreis gehören, wie der BERNSTEINsche Satz.

Aus dem, was wir oben über die Abbildung $z = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ sagten, erhellt sofort, dass der BERNSTEINsche Satz mit dem folgenden Satze gleichwertig ist:

Es sei $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x + \frac{1}{x}\right)^k$ auf dem Einheitskreise dem absoluten Betrage nach $\leq L$; dann ist im Inneren des Einheitskreises $|h(x)| < L\,|x|^{-n}$ und im Äusseren des Einheitskreises $|h(x)| < L\,|x|^{n}$.

Dieser Satz bedarf ja kaum eines Beweises. Er folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $h(x)x^n$ innerhalb und $h(x)x^{-n}$ ausserhalb des Einheitskreises regulär analytisch sind.

Derselbe Gedankengang führt zu dem folgenden allgemeineren Satze:

Ist $h(x) = \sum_{k=-m}^{n} a_k x^k$ auf dem Einheitskreise dem absoluten Betrage nach $\leq L$, so ist innerhalb des Einheitskreises $|h(x)| \leq L\,|x|^{-m}$ und ausserhalb des Einheitskreises $|h(x)| \leq L\,|x|^{n}$. Das Gleichheitszeichen ist ausgeschlossen, wenn $h(x)$ nicht $= Le^{i\Theta}x^{-m}$ bzw. $= Le^{i\Theta}x^{n}$ ist, hierbei bedeutet Θ eine beliebige reelle Zahl. (Man kann selbstredend den Satz dadurch verallgemeinern, dass man die Anzahl der Glieder in irgendeiner der beiden Richtungen ins Unendliche wachsen lässt, vorausgesetzt dass die unendliche Reihe auf dem Einheitskreise z. B. gleichmässig konvergiert.)

Setzt man in diesem Satze $x = e^s$, so erhält man das folgende Ergebnis:

Ist $H(s) = \sum_{k=-m}^{n} a_k e^{ks}$ auf der imaginären Achse dem absoluten Betrage nach $\leq L$, so ist für $R(s) > 0$ (wo $R(s)$ den reellen Teil von s bedeutet) $|H(s)| \leq Le^{nR(s)}$ und für $R(s) < 0$, $|H(s)| \leq Le^{-mR(s)}$ u. s. w.[1]

All dies kann auch auf Ausdrücke von der Form $H(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{\lambda_k s}$ übertragen werden. Hierbei bedeuten die λ_k reelle Grössen, die den Ungleichungen

---

[1] Setzt man in diesem Satze $s = i\alpha$, so kann man $H(s) = H(i\alpha)$ in der Form $\sum_{k=0}^{N}(A_k \cos k\alpha + B_k \sin k\alpha)$ schreiben. Das obige kann also auch als ein Satz über trigonometrische Polynome ausgesprochen werden.

$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < +\infty$ genügen. Setzt man dann voraus, dass auf der imaginären Achse $|H(s)| \leqq L$ ist, so folgt auf Grund eines bekannten PHRAGMÉN-LINDELÖFschen Satzes, dass für $R(s) > 0$, $|H(s)| \leqq L e^{\lambda_n R(s)}$ und für $R(s) < 0$, $|H(s)| \leqq L e^{\lambda_0 R(s)}$ ist. Hierbei ist auch das Gleichheitszeichen auszuschliessen, wenn $H(s)$ nicht $= L e^{i\Theta} e^{\lambda_n s}$ bzw. $= L e^{i\Theta} e^{\lambda_0 s}$ ist, wobei Θ wieder eine beliebige reelle Konstante bedeutet.

Für Integrale $\int_u^v a(\tau) e^{\tau s} d\tau$, oder allgemeiner für Ausdrücke von der Form $\int_u^v e^{\tau s} d A(\tau)$, wo $A(\tau)$ eine beliebige Funktion beschränkter Schwankung bedeuten kann, gilt ein ähnlicher Satz. (Dieser letzte Ausdruck umfasst natürlich die beiden vorangehenden.)

Diese Sätze enthalten ja eigentlich nichts neues; ich wollte eben nur ihren Zusammenhang mit dem schönen Satze von Herrn BERNSTEIN betonen.

Islinge, den 25. Mai 1915.

Marcel Riesz.

EIN KONVERGENZSATZ FÜR DIRICHLETSCHE REIHEN.

Von

MARCEL RIESZ

in Stockholm.

Vor mehr als sechs Jahren habe ich in einer kurzen Mitteilung[1] einen Satz über DIRICHLETsche Reihen

$$a_0 e^{-\lambda_0 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z} + \cdots \qquad (0 \leq \lambda_0 < \cdots < \lambda_n < \cdots; \lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty)$$

ausgesprochen, dessen Beweis (für den allgemeinen Fall) ich erst jetzt veröffentliche. Ich hegte nämlich immer die Hoffnung meinen ursprünglichen, recht verwickelten Beweis wesentlich vereinfachen zu können. Für den speziellen Fall der gewöhnlichen DIRICHLETschen Reihen $\Sigma a_n n^{-s}$ hat Herr LANDAU meinen damaligen Beweis mit meiner Zustimmung veröffentlicht.[2] Gleichzeitig gab er eine Reihe wichtiger Anwendungen meines Satzes auf gewisse zahlentheoretische Funktionen. In einer anderen Arbeit veröffentlichte er einen zweiten, auch von mir herrührenden, verwandten Satz, nebst Beweis und wandte denselben auf eine idealtheoretische Funktion an.[3]

Unser Satz behauptet, dass, wenn die Koeffizienten der DIRICHLETschen Reihe eine gewisse Bedingung erfüllen, die Reihe an allen Regularitätsstellen ihrer Konvergenzgeraden konvergiert. Ich habe schon in der erwähnten, kurzen Mit-

[1] M. RIESZ: Sur les séries de DIRICHLET et les séries entières, Comptes rendus, Paris, Bd. 149 (1909, 2).

[2] E. LANDAU: Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren HARDY und AXER, Prace matematyczno-fizyczne, Warszawa, Bd. 21 (1910). Vergl. S. 151—167.

[3] E. LANDAU: Über eine idealtheoretische Funktion, Transactions of the Amer. Math. Soc., Bd. 13 (1912). Vergl. S. 18—19. Für andere Anwendungen dieser Sätze vergl. D. CAUER: Neue Anwendung der PFEIFFERschen Methode zur Abschätzung zahlentheoretischer Funktionen, Inauguraldissertation, Göttingen (1914) und G. H. HARDY: On the expression of a number as the sum of two squares, Quarterly Journal of Mathematics, no. 183 (1915).

teilung hervorgehoben, dass unser allgemeiner Satz den bekannten FATOUschen Satz über Potenzreihen als Spezialfall umfasst. Es ist mir nun neuerdings gelungen, für diesen letztgenannten Satz einen überaus einfachen Beweis zu finden, der an anderer Stelle veröffentlicht wurde.[1] Derselbe gestaltet sich für unseren allgemeinen Satz über DIRICHLETsche Reihen fast ebenso einfach wie für Potenzreihen. In Abschnitt 1 der vorliegenden Arbeit soll nun der Beweis für den genannten allgemeinen Satz entwickelt werden. Im Abschnitte 2 wird unter anderem gezeigt, dass unser Satz den FATOUschen Satz enthält. In Abschnitt 3 wird die Bedingung (1) von Abschnitt 1 durch eine gleichwertige ersetzt, und daraus werden dann ein Spezialfall des Satzes und einige Sätze für gewisse spezielle Exponentenfolgen hergeleitet. Im Abschnitte 4 wird endlich auseinandergesetzt, wie unsere Ergebnisse auf verwandte Integralausdrücke übertragen werden können.

In der vorliegenden Arbeit wird überall vorausgesetzt, dass die betrachtete Funktion an den fraglichen Stellen regulär ist. Ich gedenke in einer späteren Arbeit auszuführen, wie die Regularität durch weniger einschränkende Bedingungen ersetzt werden kann.[2] Auch auf die Ausdehnung der vorliegenden Ergebnisse auf *typische Mittel*[3] komme ich bei einer späteren Gelegenheit zurück.

1. Satz I. *Erfüllen die Koeffizienten einer* DIRICHLET*schen Reihe*

$$f(z) = a_0 e^{-\lambda_0 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z} + \cdots$$

die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{e^{\lambda_n c}} = 0, \qquad (c > 0),^{4} \tag{1}$$

und ist die infolge der Bedingung (1) *für* $R(z) > c$ *reguläre Funktion* $f(z)$ *auch in gewissen Punkten der Geraden* $R(z) = c$ *regulär, so konvergiert die Reihe in diesen Punkten.*[5] *Die Konvergenz ist eine gleichmässige auf jeder abgeschlossenen Strecke der*

[1] M. RIESZ: Neuer Beweis des FATOUschen Satzes, Gottinger Nachrichten (1916); Sätze über Potenzreihen. Arkiv för Mat., Astr. och Fys. (1916).

[2] Vergl. M. RIESZ: Comptes rendus, a. a. O. und Über einen Satz des Herrn FATOU, Journal für Mathematik, Bd. 140 (1911).

[3] Für die ausführliche Darstellung der Eigenschaften dieser Mittel vergl. G. H. HARDY and M. RIESZ: The general theory of DIRICHLET's series, Cambridge Tract in Mathematics etc. (1915).

[4] Die Bedingung ist auch bei $c = 0$ hinreichend aber nicht mehr notwendig. Bleibt der Ausdruck auf der linken Seite von (1) nur beschränkt, so gilt dasselbe für die Teilsummen der Reihe an jeder Regularitätsstelle der Geraden $R(z) = c$. Ähnliches gilt, wenn in den späteren Bedingungen die Voraussetzung, dass gewisse Ausdrücke gegen Null konvergieren, ersetzt wird durch die Voraussetzung, dass diese Ausdrücke beschränkt bleiben, oder in der Ausdrucksweise von Herrn LANDAU, wenn o durch O ersetzt wird.

[5] Wie gewöhnlich, setzen wir $R(a + bi) = a$ und $I(a + bi) = b$.

Geraden, welche ausschliesslich aus Regularitätsstellen besteht. Wie bekannt,[1] *ist die obige Bedingung* (1) *auch notwendig, damit die Gerade* $R(z) = c$ *wenigstens eine Konvergenzstelle der Reihe enthalte.*

Wir setzen

$$A_n = a_0 + \cdots + a_n$$

und

$$A(v) = A_n, \qquad \lambda_n < v \leq \lambda_{n+1}$$

$$A(v) = 0, \qquad 0 \leq v \leq \lambda_0.^{2}$$

Dann ist bekanntlich nach der Abelschen Transformation

$$(2) \qquad a_0 e^{-\lambda_0 z} + a_1 e^{-\lambda_1 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z} =$$

$$= A_0 (e^{-\lambda_0 z} - e^{-\lambda_1 z}) + A_1 (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}) + \cdots + A_{n-1} (e^{-\lambda_{n-1} z} - e^{-\lambda_n z}) +$$

$$+ A_n e^{-\lambda_n z} = z \int_0^{\lambda_n} A(v) e^{-vz} dv + A_n e^{-\lambda_n z}.$$

Die Bedingung (1) kann auch in der Gestalt

$$(3) \qquad \lim_{v=\infty} A(v) e^{-vc} = 0$$

geschrieben werden. Dann folgt aber aus (2), dass die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ in jedem samt Begrenzung in der Halbebene $R(z) > c$ gelegenen, endlichen Gebiete gleichmässig konvergiert und daselbst eine regulär analytische Funktion darstellt. Es ist auch für $R(z) > c$

$$(4) \qquad f(z) = z \int_0^{\infty} A(v) e^{-vz} dv.$$

Es möge nun die Funktion $f(z)$ auch auf der Geraden $R(z) = c$ Regularitätsstellen besitzen und $x = c + \tau i$ sei eine solche Stelle. Wir bestimmen zwei Punkte $z_1 = c + \tau_1 i$ und $z_2 = c + \tau_2 i$ derart, dass $\tau_1 < \tau < \tau_2$ sei, und die Funktion $f(z)$ auf der ganzen Strecke z_1, z_2 (mit Einschluss der Endpunkte) regulär sei. Wir können dann die Zahl $b < c$ so nahe an c wählen, dass die Funktion $f(z)$ auch

[1] J. L. W. V. Jensen: Sur une généralisation d'un théorème de Cauchy, Comptes rendus, Paris, Bd. 106 (1888, 1). Diese Behauptung wird übrigens auch in Abschnitt 2 der vorliegenden Arbeit bewiesen.

[2] Natürlich kann λ_0 auch 0 sein.

noch im Rechteck z_1, z_2, $b + \tau_2 i, b + \tau_1 i$ dieselbe Eigenschaft besitze. Wir setzen der Kürze halber $z_1' = b + \tau_1 i$, $z_2' = b + \tau_2 i$. Wir setzen endlich $z_1'' = d + \tau_1 i$, $z_2'' = d + \tau_2 i$, wo d eine beliebige, aber feste Zahl $> c$ bedeutet.

Wir betrachten jetzt die Funktionen

$$g_n(z) = e^{\lambda_n(z-c)}(z - z_1)(z - z_2)(f(z) - (a_0 e^{-\lambda_0 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z}))$$

und werden zeigen, dass bei hinreichend grossem n auf der ganzen Begrenzung des Rechtecks z_1', z_1'', z_2'', z_2'

(5) $$|g_n(z)| < \varepsilon$$

wird, wie klein auch die positive Zahl ε sein mag.[1]

Wegen (1) können wir für ein beliebig kleines, positives δ eine Zahl ν finden derart, dass

(6) $$|A_n e^{-\lambda_n c}| < \delta \text{ für } n > \nu$$

und daraus folgt, dass

(7) $$|A(v) e^{-vc}| < \delta \text{ für } v > \lambda_\nu.$$

Wir setzen der Kürze halber noch $\sigma = R(z)$. Für $\sigma > c$ ist dann wegen (2) und (4)

(8) $$|f(z) - (a_0 e^{-\lambda_0 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z})| = \left| z \int_{\lambda_n}^{\infty} A(v) e^{-vz} dv - A_n e^{-\lambda_n z} \right|.^{2}$$

Wählen wir jetzt $n > \nu$, so folgt aus (6), (7) und (8)

(9) $$|f(z) - (a_0 e^{-\lambda_0 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z})| < \delta |z| \int_{\lambda_n}^{\infty} e^{-v(\sigma - c)} dv + \delta e^{-\lambda_n(\sigma - c)} =$$

$$= \delta e^{-\lambda_n(\sigma-c)} \left(1 + \frac{|z|}{\sigma - c}\right) \leq \delta e^{-\lambda_n(\sigma - c)} \left(1 + \frac{K}{\sigma - c}\right),$$

wo K das Maximum von $|z|$ im Rechtecke z_1', z_1'', z_2'', z_2' bedeutet.

[1] In $g_n(z)$ könnte auch statt $e^{\lambda_n(z-c)}$ die Funktion $e^{\lambda(z-c)}$ stehen, wo λ eine beliebige Zahl bedeutet, die der Bedingung $\lambda_n \leq \lambda \leq \lambda_{n+1}$ genügt.

[2] Dieser Ausdruck kann auch in der Form $z \int_{\lambda_{n+1}}^{\infty} A(v) e^{-vz} dv - A_n e^{-\lambda_{n+1} z}$ geschrieben werden.

Es möge noch H das Maximum der Werte $|z - z_1|$ und $|z - z_2|$ für alle Punkte z des genannten Rechtecks bedeuten.

Ist nun z ein beliebiger Punkt der Strecke z_1, z_1'', so ist $|z - z_1| = \sigma - c$. Also ist nach (9) auf dieser Strecke

$$(10)\quad |g_n(z)| < e^{\lambda_n(\sigma - c)}(\sigma - c)\, H\, \delta\, e^{-\lambda_n(\sigma - c)}\left(1 + \frac{K}{\sigma - c}\right) =$$

$$= \delta(\sigma - c)\, H + \delta H K < \delta H(d - c + K).$$

Dieselbe Ungleichung gilt aus Symmetriegründen auch für die Strecke z_2, z_2''.

Es sei jetzt z ein Punkt der auf der Geraden $\sigma = d$ gelegenen Strecke z_1'', z_2''; dann ist wegen (9)

$$(11)\quad |g_n(z)| < e^{\lambda_n(d - c)} H^2\, \delta\, e^{-\lambda_n(d - c)}\left(1 + \frac{K}{d - c}\right) = \delta H^2\left(1 + \frac{K}{d - c}\right).$$

Um $|g_n(z)|$ auch auf den anderen Teilen der Begrenzung des Rechtecks z_1', z_1'', z_2'', z_2' abzuschätzen, bezeichnen wir mit M das Maximum von $|f(z)|$ in diesem Rechtecke und mit A die grösste der Zahlen $|A_0|, |A_1|, \cdots |A_\nu|$. Dann ist mit Rücksicht auf (2), (6) und (7) für $b \leqq \sigma \leqq c$, $\tau_1 \leqq I(z) \leqq \tau_2$

$$(12)\quad |f(z) - (a_0 e^{-\lambda_0 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z})| < M + \delta e^{-\lambda_n(c - \sigma)} + K A \int_0^{\lambda_\nu} e^{-(v - c)} dv +$$

$$+ K\delta \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} e^{-v(\sigma - c)}\, dv < M + \delta e^{\lambda_n(c - \sigma)} + K A \lambda_\nu e^{\lambda_\nu(c - \sigma)} + \frac{K\delta}{c - \sigma} e^{\lambda_n(c - \sigma)}.$$

Auf der Strecke z_1', z_1 ist $|z - z_1| = c - \sigma$, folglich

$$|e^{\lambda_n(z - c)}(z - z_1)(z - z_2)| \leqq e^{-\lambda_n(c - \sigma)}(c - \sigma) H$$

also mit Benutzung von (12) und auf Grund von $c - \sigma \leqq c - b$

$$(13)\quad |g_n(z)| < (c - \sigma)\, e^{-\lambda_n(c - \sigma)} H(M + K A \lambda_\nu e^{\lambda_\nu(c - b)}) + \delta H(c - b + K).$$

Durch Differentiation folgt unmittelbar, dass der Ausdruck $u e^{-\lambda_n u}$, als Funktion von $u \geqq 0$ betrachtet, sein Maximum für $u = \frac{1}{\lambda_n}$ erreicht. Daher ist

$$(c - \sigma)\, e^{-\lambda_n(c - \sigma)} \leqq \frac{1}{\lambda_n} \qquad (\sigma \leqq c).$$

Daraus folgt, dass das erste Glied auf der rechten Seite von (13) bei hinreichend grossem n kleiner als δ wird und somit ist dargelegt, dass bei hinrechend grossem n auf der ganzen Strecke z_1', z_1 und ebenso auch auf der Strecke z_2', z_2

$$(14) \qquad |g_n(z)| < \delta(1 + H(c - b + K))$$

ausfällt.

Auf der Strecke z_1', z_2' ist endlich wegen (12) und $c - \sigma = c - b$

$$|g_n(z)| < e^{-\lambda_n(c-b)} H^2 \left(M + \delta e^{\lambda_n(c-b)} + K A \lambda_\nu e^{\lambda_\nu(c-b)} + \frac{K\delta}{c-b} e^{\lambda_n(c-b)}\right) =$$

$$= e^{-\lambda_n(c-b)} H^2 \left(M + K A \lambda_\nu e^{\lambda_\nu(c-b)}\right) + \delta H^2 \left(1 + \frac{K}{c-b}\right).$$

Für hinreichend grosses n ist das erste Glied des letzten Ausdruckes kleiner als das zweite, folglich

$$(15) \qquad |g_n(z)| < 2\delta H^2 \left(1 + \frac{K}{c-b}\right).$$

Bei hinreichend kleinem δ ergeben die Ungleichungen (10), (11), (14), (15) die Ungleichung (5) für die ganze Begrenzung des Rechtecks z_1', z_1'', z_2'', z_2'.

Damit sind wir aber gleich am Ziele. Denn die Funktionen $g_n(z)$ sind im betrachteten Rechtecke regulär, mithin erreicht ihr absoluter Betrag sein Maximum auf der Begrenzung. Daraus ergibt sich, bei hinreichend grossem n, für einen beliebigen inneren Punkt x der Strecke z_1, z_2

$$|g_n(x)| < \varepsilon,$$

oder

$$(16) \qquad |f(x) - (a_0 e^{-\lambda_0 x} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n x})| < \frac{\varepsilon}{|x - z_1|\,|x - z_2|},$$

d. h. die behauptete Konvergenz unserer Reihe.

Auf die gleichmässige Konvergenz kann man nun folgendermassen schliessen. Besteht die Strecke x_1, x_2 der Geraden $R(z) = c$ ausschliesslich aus Regularitätsstellen, so ist sie in einer grösseren Strecke enthalten, welche dieselbe Eigenschaft besitzt. Bezeichnen wir die Endpunkte dieser grösseren Strecke wiederum mit z_1 und z_2, so folgt aus (16) die gleichmässige Konvergenz für die Punkte der Strecke x_1, x_2.

2. In den folgenden Abschnitten geben wir unserem Satze verschiedene neue Formen, aus denen dann einige interessante Spezialfälle des Satzes folgen.

Durch die lineare Substitution $z' = z - c$ geht Satz I in den folgenden über.

Satz I'. *Es sei c eine beliebige, aber feste, positive, reelle Zahl. Erfüllen dann die Koeffizienten der* Dirichlet*schen Reihe*

$$f(z) = a_0 e^{-\lambda_0 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z} + \cdots$$

die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 e^{\lambda_0 c} + \cdots + a_n e^{\lambda_n c}}{e^{\lambda_n c}} = 0, \tag{17}$$

und ist die infolge dieser Bedingung für $R(z) > 0$ reguläre Funktion $f(z)$ auch in gewissen Punkten der imaginären Achse regulär, so konvergiert die Reihe in diesen Punkten. Die Konvergenz ist gleichmässig auf jeder Strecke der imaginären Achse, die ausschliesslich aus Regularitätsstellen besteht. Die Bedingung (17) ist auch notwendig, damit die imaginäre Achse wenigstens einen Konvergenzpunkt der Reihe enthalte.

Dieser Satz geht durch die Transformation $e^{-z} = x$ für $\lambda_n = n$ in den genannten, folgendermassen lautenden Satz von Fatou[1] über.

Erfüllen die Zahlen a_n die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0, \tag{18}$$

so konvergiert die Potenzreihe

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

an jeder Regularitätsstelle des Einheitskreises. Die Konvergenz ist auf jedem Regularitätsbogen eine gleichmässige.

In der Tat nimmt, für $\lambda_n = n$, die Bedingung (17) die folgende Gestalt an:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 + a_1 R + \cdots + a_n R^n}{R^n} = 0, \qquad (R > 1) \tag{19}$$

wo R eine feste Zahl bedeutet. Wir haben also nur zu zeigen, dass die Bedingungen (18) und (19) vollständig gleichwertig sind.

Es sei zuerst (18) erfüllt. Dann lässt sich bei beliebig kleinem ε die Zahl ν derart bestimmen, dass für alle $m > \nu$

$$|a_m| < \varepsilon$$

wird. Mithin ist für $n > \nu$

[1] P. Fatou: Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., Bd. 30 (1906). Vergl. S. 389—391.

$$\frac{|a_0 + a_1 R + \cdots + a_n R^n|}{R^n} < \frac{|a_0 + \cdots + a_\nu R^\nu| + \varepsilon(R^{\nu+1} + \cdots + R^n)}{R^n} <$$

$$< \frac{|a_0 + \cdots + a_\nu R^\nu|}{R^n} + \varepsilon \frac{R}{R-1}.$$

Für hinreichend grosses n ist dieser Ausdruck $< \frac{2R}{R-1}\varepsilon$, d. h. (19) folgt wirklich aus (18).

Es sei nun umgekehrt (19) erfüllt. Dann ist bei genügend grossem n

$$\frac{|a_0 + \cdots + a_{n-1} R^{n-1} + a_n R^n|}{R^n} < \varepsilon$$

und

$$\frac{|a_0 + \cdots + a_{n-1} R^{n-1}|}{R^n} < \frac{|a_0 + \cdots + a_{n-1} R^{n-1}|}{R^{n-1}} < \varepsilon.$$

Daraus folgt durch Subtraktion $|a_n| < 2\varepsilon$. Mithin hat auch die Bedingung (19) die Bedingung (18) zur Folge.

Wir kehren jetzt zu dem allgemeinen Satze I' zurück. In demselben spielt augenscheinlich die positive Konstante c eine rein zufällige Rolle. Die Vermutung liegt also nahe, dass die Beziehung (17) für alle positiven Zahlen besteht, wenn sie für eine einzige solche Zahl besteht. Dies ergibt sich in der Tat aus dem folgenden, übrigens bekannten Satze.

Ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 e^{\lambda_0 \alpha} + \cdots + a_n e^{\lambda_n \alpha}}{e^{\lambda_n \alpha}} = 0, \tag{20}$$

wo α eine beliebige, feste, komplexe Zahl bedeutet, so ist auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 e^{\lambda_0 \beta} + \cdots + a_n e^{\lambda_n \beta}}{e^{\lambda_n \beta}} = 0, \tag{21}$$

wo β eine beliebige komplexe Zahl sein kann, deren reeller Teil positiv ist.

Unsere Behauptung folgt leicht aus der Abelschen Transformation. Wir setzen

$$A_{\alpha,n} = a_0 e^{\lambda_0 \alpha} + \cdots + a_n e^{\lambda_n \alpha}$$

$$A_\alpha(v) = A_{\alpha,n} \text{ für } \lambda_n < v \leq \lambda_{n+1} \text{ und } = 0 \text{ für } 0 \leq v \leq \lambda_0.$$

Dann ist nach (2)

$$A_{\beta,n} = a_0 e^{\lambda_0 \beta} + \cdots + a_n e^{\lambda_n \beta} = (\alpha - \beta) \int_0^{\lambda_n} A_\alpha(v) e^{v(\beta-\alpha)} dv + A_{\alpha,n} e^{\lambda_n(\beta-\alpha)}. \tag{22}$$

Nach (20) kann man eine Zahl ν bestimmen derart, dass

$$|A_{\alpha,n}| < \varepsilon\, e^{\lambda_n R(\alpha)} \text{ für } n > \nu$$

und also auch

$$|A_\alpha(v)| < \varepsilon\, e^{v R(\alpha)} \text{ für } v > \lambda_\nu.$$

Aus (22) ergibt sich nun mit Rücksicht auf die letzten Ungleichungen

$$|A_{\beta,n}| < |\alpha - \beta| \left| \int_0^{\lambda_\nu} A_\alpha(v)\, e^{v(\beta-\alpha)}\, dv \right| + |\alpha - \beta|\, \varepsilon \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} e^{v R(\beta)}\, dv + \varepsilon\, e^{\lambda_n R(\beta)} <$$

$$< |\alpha - \beta| \left| \int_0^{\lambda_\nu} A_\alpha(v)\, e^{v(\beta-\alpha)}\, dv \right| + \varepsilon\, e^{\lambda_n R(\beta)} \left(\frac{|\alpha-\beta|}{R(\beta)} + 1 \right).$$

Bei hinreichend grossem n ist das erste (von n unabhängige) Glied des letzten Ausdruckes kleiner als das zweite und daraus erhält man unsere obige Behauptung.

Aus diesem letzten Ergebnisse ersieht man auch leicht, dass die Bedingung (17) (bzw. die Bedingung (1)) auch notwendig ist, damit die imaginäre Achse (bzw. die Gerade $R(z) = c$) wenigstens einen Konvergenzpunkt enthalte.

Es sei in der Tat die Reihe $\Sigma a_n e^{-\lambda_n z}$ in einem Punkte $z = ti$ der imaginären Achse konvergent. Man kann dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Reihe gegen den Wert Null konvergiert, da dies immer durch Veränderung von z. B. a_0 erreicht werden kann, was den Grenzwert (17) nicht beeinflusst. Dann ist aber (20) für $\alpha = -ti$, also auch (21) für $\beta = c$ erfüllt. Dies besagt aber eben, dass auch (17) erfüllt ist.

3. In diesem Abschnitte werden wir (17) durch eine gleichwertige Bedingung ersetzen, die folgendermassen lautet.

Es gebe eine positive Konstante K derart, dass bei beliebig kleinem ε und hinreichend grossem n

(23) $$|a_n + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \text{ sobald } 0 \leq \lambda_{n+p} - \lambda_n \leq K$$

ist.[1]

[1] Die Bedingungen (1) und (17) erinnern an den Ausdruck von Herrn Cahen für die Konvergenzabszisse der Dirichletschen Reihen. Dieser Ausdruck ist bekanntlich im Allgemeinen nur dann gültig, wenn die Konvergenzabszisse positiv ist. Die Bedingung (23) erinnert nun an einen Ausdruck für dieselbe Konvergenzabszisse, der immer gültig ist, und den, von einander unabhängig, die Herren Lindh und Kojima und in einem Spezialfalle auch Herr Knopp gefunden haben. Die Bedingung (23) ist auch mit

$$\lim_{n=\infty} e^{\lambda_n c}(a_n e^{-\lambda_n c} + a_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} c} + \cdots) = 0 \qquad (c > 0)$$

Man hat sicher mit Rücksicht auf das bekannte ABELsche Lemma (das auch aus der oben angewandten ABELschen Transformation folgt)

$$(24)\qquad |a_n + \cdots + a_{n+p}| = |e^{-\lambda_n c} a_n e^{\lambda_n c} + \cdots + e^{-\lambda_{n+p} c} a_{n+p} e^{\lambda_{n+p} c}| \leq$$

$$\leq e^{-\lambda_n c} \operatorname{Max} |a_n e^{\lambda_n c} + \cdots + a_{n+r} e^{\lambda_{n+r} c}|, \quad r = 0, 1, \cdots p.$$

Ist nun (17) erfüllt und ist n genügend gross, so ist

$$|a_0 e^{\lambda_0 c} + \cdots + a_n e^{\lambda_n c} + \cdots + a_{n+r} e^{\lambda_{n+r} c}| < \frac{\varepsilon}{2 e^K} e^{\lambda_{n+r} c}, \quad r = 0, 1,$$

folglich, wenn $\lambda_{n+r} - \lambda_n \leq \lambda_{n+p} - \lambda_n \leq K$ ist,

$$|a_n e^{\lambda_n c} + \cdots + a_{n+r} e^{\lambda_{n+r} c}| < \frac{\varepsilon}{e^K} e^{\lambda_{n+r} c} < \varepsilon e^{\lambda_n c},$$

also nach (24)

$$|a_n + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \qquad 0 \leq \lambda_{n+p} - \lambda_n \leq K,$$

d. h. die Beziehung (23).

Es sei jetzt umgekehrt (23) erfüllt. Aus dem ABELschen Lemma folgt

$$|a_m e^{\lambda_m c} + \cdots + a_{m+p} e^{\lambda_{m+p} c}| \leq e^{\lambda_{m+p} c} \operatorname{Max} |a_m + \cdots + a_{m+r}|, \quad r = 0, 1, \cdots p,$$

also nach (13) für jedes $m > \nu$, wo ν eine genügend grosse Zahl bedeutet,

$$(25)\qquad |a_m e^{\lambda_m c} + \cdots + a_{m+p} e^{\lambda_{m+p} c}| < \varepsilon e^{\lambda_{m+p} c}, \quad 0 \leq \lambda_{m+r} - \lambda_m \leq K.$$

Wir teilen jetzt die Exponenten $\lambda_{\nu+1}, \cdots \lambda_n$ folgendermassen in Gruppen ein

$$\lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}, \cdots \lambda_{p_1}; \lambda_{p_1+1}, \lambda_{p_1+2}, \cdots \lambda_{p_2}; \cdots; \lambda_{p_i+1}, \lambda_{p_i+2}, \cdots, \lambda_{p_{i+1}}; \cdots; \lambda_{p_j+1}, \lambda_{p_j+2}, \cdots \lambda_n;$$

wo

gleichwertig. Diese letzte Bedingung erinnert wieder an eine Formel der Herren PINCHERLE und SCHNEE für negative Konvergenzabszissen. (Für Literaturangaben betreffs dieser verschiedenen Formeln vergl. HARDY and RIESZ, a. a. O., S. 8.)

Es ist einleuchtend, dass aus (23) eine analoge Bedingung für jeden anderen festen Wert K' folgt. Denn besteht (23) für einen festen Werten K, so besteht es naturgemäss für jeden anderen festen Wert, der kleiner als K ist. Andererseits zieht (23) eine analoge Bedingung für alle ganzzahlige Multipla von K mit sich. Aus diesen beiden Tatsachen folgt unsere Behauptung, und wir könnten auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit $K = 1$ voraussetzen. Daraus folgt dann leicht, dass die Bedingung (23) mit der folgenden gleichwertig ist:

Bei beliebig kleinem ε und hinreichend grossem n ist

$$|a_n + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon(\lambda_{n+p} - \lambda_n + 1) \qquad (p \geq 0);$$

oder auch mit der folgenden: bei beliebig kleinem ε und hinreichend grossem n ist

$$|a_{n-p} + a_{n-p+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon(\lambda_n - \lambda_{n-p} + 1) \qquad (p > 0).$$

$$\lambda_n - \lambda_{p_j} > K, \qquad 0 < \lambda_n - \lambda_{p_j+1} < K,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$\lambda_{p_i+1} - \lambda_{p_i} > K, \qquad 0 < \lambda_{p_i+1} - \lambda_{p_i+1} \leq K,$$
$$\cdots\cdots$$
$$0 \leq \lambda_{p_1} - \lambda_{\nu+1} \leq K.$$

Dann ist

$$\lambda_{p_i+1} < \lambda_n - (j-i)K. \tag{26}$$

Wir setzen jetzt

$$\sum_{h=\nu+1}^{p_1} a_h e^{\lambda_h c} = A_1, \quad \sum_{h=p_1+1}^{p_2} a_h e^{\lambda_h c} = A_2, \cdots \sum_{h=p_i+1}^{p_{i+1}} a_h e^{\lambda_h c} = A_{i+1}, \cdots \sum_{h=p_j+1}^{n} a_h e^{\lambda_h c} = A_{j+1},$$

so ist nach (25) und (26)

$$|A_{i+1}| < \varepsilon\, e^{(\lambda_n - (j-i)K)c}.$$

Es ist mithin

$$|a_{\nu+1} e^{\lambda_{\nu+1} c} + \cdots + a_n e^{\lambda_n c}| = |A_{j+1} + A_j + \cdots + A_{i+1} + \cdots + A_1| <$$
$$< \varepsilon e^{\lambda_n c} + \varepsilon e^{(\lambda_n - K)c} + \varepsilon e^{(\lambda_n - 2K)c} + \cdots = \frac{\varepsilon e^{\lambda_n c}}{1 - e^{-Kc}}.$$

Folglich ist bei genügend grossem n

$$|a_0 e^{\lambda_0 c} + \cdots + a_n e^{\lambda_n c}| < |a_0 e^{\lambda_0 c} + \cdots + a_\nu e^{\lambda_\nu c}| + |a_{\nu+1} e^{\lambda_{\nu+1} c} + \cdots + a_n e^{\lambda_n c}|$$
$$< \frac{2\varepsilon e^{\lambda_n c}}{1 - e^{-Kc}}$$

d. h. die Beziehung (17). Also sind die Bedingungen (17) und (23) wirklich gleichwertig.

Wir wollen nun aus Satz I' mit Hilfe von (23) einige speziellere Resultate herleiten.

Ist $\lambda_n = n$ und wählt man $K < 1$, so geht (23) in $|a_n| < \varepsilon$ über, wir erhalten also wieder den Fatouschen Satz.

Die Bedingung (23) ist sicher erfüllt, wenn a_n den folgenden zwei Bedingungen genügt

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0; \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 0. \tag{27}$$

Dies ergibt natürlich wieder den Fatouschen Satz, aber auch folgenden Satz über *gewöhnliche* Dirichletsche Reihen.

Ist $\lim_{n=\infty} n a_n = 0$, *so konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *an jeder Regularitätsstelle der imaginären Achse.*

Wie ich in der erstgenannten Landauschen Arbeit gezeigt habe, folgt für *gewöhnliche* Dirichletsche Reihen der Satz I leicht aus diesem spezielleren Satze.[1]

Ich will schliesslich bemerken, dass für alle solche Exponentenfolgen, für welche die Differenz $\lambda_n - \lambda_{n-1}$ beschränkt bleibt, die beiden Bedingungen (27) offenbar durch die eine Bedingung $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 0$ ersetzt werden können.[2] Ist dagegen die Differenz $\lambda_n - \lambda_{n-1}$ immer grösser als eine feste positive Zahl, so können die Bedingungen (27) durch die Bedingung $\lim_{n=\infty} a_n = 0$ ersetzt werden.

4. Unsere Ergebnisse lassen sich leicht auf Integrale von der Form

$$\int_0^{\infty} a(v) e^{-vz} dv \tag{28}$$

oder Stieltjessche Integrale von der Form

$$\int_0^{\infty} e^{-vz} dA(v) \tag{29}$$

übertragen. In (28) bedeutet $a(v)$ eine Funktion, die über jede endliche Strecke integriert werden kann, und in (29) bedeutet $A(v)$ eine Funktion, die auf jeder endlichen Strecke von beschränkter Schwankung ist. Der Ausdruck (29) umfasst natürlich sowohl die Integrale (28) als auch die Dirichletschen Reihen.

Für die Ausdrücke (28) und (29) ist die Bedingung (1) naturgemäss durch

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega c} \int_0^{\omega} a(v) dv = 0$$

bzw. durch

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega c} A(\omega) = 0$$

zu ersetzen. Die Bedingung (23) geht entsprechend in

[1] Vergl. a. a. O. S. 156—158.

[2] Für eine andere Herleitung dieses Ergebnisses vergl. Hardy and Riesz, a. a. O. S. 47.

$$\left| \int_{\omega}^{\omega+K'} a(v)\,dv \right| < \varepsilon, \qquad \omega > \mu,\ K' \leqq K$$

bzw.

$$|A(\omega + K') - A(\omega)| < \varepsilon, \qquad \omega > \mu,\ K' \leqq K$$

über.

Alle Beweise laufen genau so wie oben, nur ist statt der ABELschen Transformation stets eine partielle Integration vorzunehmen.

Islinge, den 11. März 1916.

BIBLIOGRAPHIE.

Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.

St-Pétersbourg 1913.

MARKOFF, A., Démonstration du second théorème-limite du calcul des probabilités par la méthode des moments. Bicentenaire de la loi des grands nombres 1713—1913. (Supplém. à la 3:e éd. russe du »Calcul des probabilités».) Avec un portr. de J. Bernoulli. — IV + 66 pp. 8.

American Mathematical Society.

New York 1913.

The Princeton Colloquium. Lectures on Mathematics, delivered sept. 15 to 17, 1909, before members of the Amer. Math. Society in connection with the summer meeting held at Princeton University, Princeton, N. J., by GILBERT AMES BLISS and EDWARD KASNER. — III + 107—117 pp. 8.

Fundamental existence theorems by G. A. BLISS. Introduct. Ordin. points of implicit funct. Singular points of impl. funct. Existence theorems for different. equat. — Differential-geometric aspects of dynamics, by E. KASNER. Introd. Trajectories in an arbitr. field of force. Nat. families: The geometry of conservat. fields of force. Transformat. theories in dynamics. Constrain. motions in a field. Generalizat. of the traject. problem includ. brachistochrones a. catenaries. More complicat. types of force.

Belin Frères.

Paris 1914.

BIOCHE, CH., Histoire des mathématiques. — VI + 92 pp. 8. Fr. 1: 75.

Les mathématiques avant l'Ecole d'Alexandrie. L'Ecole d'Alexandrie. Le moyen âge. La géométrie de la Renaissance. La formation de l'algèbre. La géom. analytique. Le calcul infinitésimal. La géom. aux XVIIe et XVIIIe siècles. Le XIXe siècle. L'astronomie dans l'antiquité. L'astron. moderne.

G. Bell & Sons.

London 1914—1915.

Bragg, W. H., and Bragg, W. L., X-rays and crystal structure. — VII + 228 pp. 8. 7 sh. 6 d.

Introd. Diffraction of waves. The X-ray spectrometer. The properties of X-rays. Crystal structure. X-ray spectra. The analysis of crystal structure I, II. The relation between cryst. symmetry a. the arrangement of the atoms. The analysis of cryst. III. The intensity of X-ray reflect. The analysis of the Laue photographs. Supplement. notes.

Sommerville, D. M. Y., The elements of non-euclidean geometry. XVI + 274 pp. 8.

Historical. Element. hyperbolic geometry. Elliptic geometry. Analyt. geometry. Representations of non-euclidean geometry in euclidean space. »Space-curvature» a. the philosophical bearing of non-euclidean geometry. Radical axes, homothetic centres, a. syst. of circles. Inversion a. allied transformations. The conic.

Albert Bonnier.

Stockholm 1915.

Hedström, J. S., och Rendal, C., Algebra för gymnasiet. — 245 pp. 8.

Bokstavsräkn. med hela tal. Bokstavsräkn. med bråk. Lin. ekvat. med en obekant. Problem, som leda till lin. ekvat. med en obekant. Grafisk framställn. Lin. ekvat. med flera obek. Problem. Kvadratrötter. Kvadrat. ekvat. med en obek. jämte problem. Ekvat. av högre grad med en obek. jämte probl. Ekvationssystem av andra el. högre grad jämte probl. Rötter. Potenser. Logaritmer. Derivator. Serier. Sammansatt ränta. Maxima o. minima. Gränsvärden. Asymptoter. Spec. uppgifter. Bland. ex. Hist. notiser. Svar.

G. Braunsche Verlag.

Karlsruhe i. B. 1913.

Schuster, F., Die moderne theoretische Physik und der Äther. Eine Verteidigung des materiellen Äthers. — 44 pp. 8.

Vorw. Die mod. theoret. Physik. Der Lichtäther u. d. Relativitätsprinzip. Der mater. Äther. Der Widerstand im Raume. Schlussbetracht.

Cambridge University Press.

Cambridge 1913—1916.

Archibald, Raymond Clare, Euclid's book on divisions of figures. With a restoration based on Woepcke's text and on the Practica geometriæ of Leonardo Pisano. — VIII + 88 pp. 8. 6 sh.

Introduct. Proclus and Euclid's book »On divisions of figures». »De divisionibus» by Muhammed Bagdedinus and the Dee MS. The Woepcke Euclid MS. Practica geometriæ of Leonardo Pisano (Fibonaci). Synopsis of Muhammed's treatise. Commandinus' treatise. Syn. of Euclid's treat. Analysis of Leonardo's work. — Abraham Savasorda, Jordanus Nemorarius, Luca Paciuolo. Muhammed Bagdedinus a. other arab. writers on Div. of Fig. Pract. applicat. of the problems on Div. of Fig. The μετρικά of Heron of Alexandria. Connect. betw. Euclid's book *On Divisions*, Apollonius' treat. *On Cutting off a Space* and a Pappus-Lemma to Euclid's book of *Porisms*. — Restaurat. of Euclid's περὶ διαιρέσεων βιβλίον.

Bôcher, Maxime, An introduction to the study of integral equations. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathemat. Physics. 10). — 71 pp. 8. 2 sh. 6 d.

Introduct. Some preliminary propositions a. definitions. Abel's mechan. problem. Solution of Abel's equat. Liouville's introduct. of integral equat. of the sec. kind. The method of successive substitut. Volterra's treatment of equat. of the sec. kind. Iterated a. reciprocal functions. Lin. alg. equations with an infinite number of variables. Fredholm's solut. The integral equat. with a param. The fundament. theorem concern. homogen. integral equations with some applicat. Symmetric kernels. Orthogon. funct. The integral equat. of the first kind whose kernel is finite. Equat. of the first kind whose kernel or whose interval is not finite.

Campbell, Norman Robert, Modern electrical theory. Sec. ed. (Cambridge Physical Series.) — XII + 400 pp. 8. 9 sh.

Note on the direct. of vectors. The properties of electricity. Dielectrics. Conductors: Electrolytic a. metallic. Gaseous conduct. Magnetic susceptibility. Magneto-optics. — Radiation. Rays from radioact. substances. Light. Complete radiat. a. the structure of light. X-rays a. γ-rays. — The properties of matter. The struct. of the atom. The properties of mov. systems. — The aether. Aberration.

Darwin, Sir George Howard, Scientific Papers. Vol. 5. Supplement. volume, containing biographical memoirs by Sir Francis Darwin and Professor E. W. Brown, lectures on Hill's lunar theory etc. Ed. by F. J. M. Stratton and J. Jackson. — VI + 82 pp. 8. 6 sh.

Portr. of Sir George Darwin. Memoir of Sir G. Darwin by his brother Sir Francis Darwin. The scient. work of Sir G. Darwin by Prof. E. W. Brown. Inaugural lecture (deliv. at Cambridge, in 1883, on elect. to the Plumian Professorship). Introduct. to dynam. astronomy. Lectures on Hill's lunar theory. On librat. planets a. on a new family of period. orbits. Address to the internat. congress of mathematicians at Cambridge in 1912.

Hardy, G. H., & Riesz, Marcel, The general theory of Dirichlets series. (Cambridge tracts in mathematics and math. physics, 18.) — 78 pp. 8. 3 sh. 6 d.

Introduct. Element. theory of the convergence af Dirichlet's series. The formula for the sum of the coeff. of a Dirichlet's series: the order of the funct. represented

by the series. The summation of series by typical means. Abelian a. Tauberian theorems. Further developments of the theory of functions represent. by Dirichlet's series. The multiplicat. of Dirichlet's ser. Bibliography.

Havelock, T. H., The propagation of disturbances in dispersive media. (Cambridge Tracts... 17). — 87 pp. 8. 3 sh. 6 d.

Simple groups a. group velocity. The velocity of light. The Kelvin method for wave groups. Illustrat. of group analysis. Action of a prism up. white light. The flow of energy. Propagat. of wavefronts with discontinuities. Bibl.

Macmahon, Percy A., Combinatory analysis. Vol. I. — XIX + 300 pp. 8. 15 sh.

Symmetric functions: Element. theory. Connexion with the theory of distribut. The distribut. into parcels a. groups in gen. The operators of the theory of distribut. Applicat. of the operators d. a. D. — Generalizat. of the theory of sect. I: The theory of separat. Generalizat. of Girard's formula. The different. operators of the theory of separat. A calculus of binom. coefficients. The theory of three identities. — Permutations: The enumerat. of permutat. The theory of permutat. The theory of displacements. Other applicat. of the master theorem. Lattice permutat. The indices of permutations. — Theory of the compositions of numbers: Unipartite numb. Multipartite numb. The graphic representat. of the composit. of tripart. a. multipart. numbers. Simon Newcomb's problem. Generalizat. of the foregoing theory. — Distributions upon a chess board, to which is prefixed a chapt. on perf. partitions. The enumerat. of the partitions of multipart. numbers.

Thompson, A. W. H., A new analysis of plane geometry, finite and differential. With numerous examples. — XII + 120 pp. 8. 7 sh.

Introd. Fundamentals of the geometry of two, three and four elements. Reduction of measures containing vectorial elements. Reduct. of measures contain. equational elements. — Differentiation of measures of simple elements. Differentiat. of determinates of simple elem. Differentiat. of vector. elements. Differentiat. of equation. elem. Reduction of measures contain. function. elem. Generalized displacement of a point. — Plane curves: Reduct. of complex function. elem. Successive differentiat. of measures. Integrat. of measures. Miscellan. Examples. Appendix. Table of formulæ.

Whittaker, E. T., and Watson, G. N., A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions. Sec. ed., completely rev. — 560 pp. 8. 18 sh.

Complex numbers. The theory of convergence. Continuous funct. a. uniform converg. The theory of Riemann integration. The fundament. properties of analyt. funct.; Taylor's, Laurent's, a. Liouville's theorems. The theory of residues; applicat. to the evaluat. of difinite integrals. The expansion of funct. in infinite series. Asymptotic expansions a. summable series. Fourier ser. Lin. different. equat. Integral equations. — The gamma funct. The Zeta funct. of Riemann. The hypergeom. funct.

Legendre functions. The confluent hypergeom. funct. Bessel funct. The equations of mathemat. physics. Mathieu funct. Elliptic funct. General theorems a. the Weierstrass funct. The theta funct. The Jacobian elliptic funct. Appendix.

The Clarendon Press.

Oxford 1913—1914.

Elliott, Edwin Bailey, An introduction to the algebra of quantics. Sec. ed. XVI + 416 pp. 8. 15 sh.

Principles a. direct methods. Essential qualities of invariants. Essent. qualit. of covariants. Cogredient a. contragredient quantities. Binary quantics. Invariants, etc., as functions of differences. Binary quantics contin. Annihilators. Seminvariants. Further theory of the operators Ω and O. Reciprocity. Generat. functions. Hilbert's proofs of Gordan's theorem. Protomorphs, etc. Furth. theory of seminvar. The bin. quantic of infinite order. Canonical forms, etc. Invariants a. covariants of the bin. quantic a. sextic. Sev. bin. quantics. Restrict. substitutions. Bin. quantics in Cartesian geom. Ternary quantics. The quadratic a. cubic.

Thomson, J. J., The atomic theory. The Romanes Lectures 1914. Delivered in the Sheldonian theatre June 10, 1914. — 39 pp. 8. 1 sh. 6 d.

Columbia University Press.

New York 1915.

Planck, Max, Eight lectures on theoretical physics, delivered at Columbia University in 1909. Trans. by A. P. Wills. (Publicat. Nr 3 of the Ernest Kempton Adams fund for physical research.) — 130 pp. 4. $ 1: —.

Introd. Reversibility a. irreversib. Thermodynamic states of equilibrium in dilute solut. Atomic theory of matter. Equat. of state for a monatomic gas. Heat radiation. Electrodynamic theory. Statist. theory. General dynamics. Principle of least action. Principle of relativity.

Ernest Flammarion.

Paris 1913.

Toulouse, E., Henri Poincaré. (Enquête médico-psychologique sur la supériorité intellectuelle.) — 204 pp. 8. Fr. 3: 50.

Lettre de M. H. Poincaré. Préface. Hérédité: Ligne paternelle. Ligne maternelle. Collatéraux. Descendance. — Développement. — Examen et vie physique. — Audition. Vision. Audition colorée. Mouvement. — Mémoire auditive, tactile, musculaire, olfactive et gustative, visuelle. Mémoire d. couleurs, d. longueurs, d. figures géométriques, d. formes, d. chiffres. Calcul mental. Mémoire des lettres, d. mots, d. phrases et des idées, mémoire affective. Attention. Association d. idées. Observation. Langage. Caractère. Habitudes. Opinions. Le problème du génie. Cas de M. H. Poincaré.

Gauthier-Villars & C:ie.

Paris 1913—1916.

L'Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1916. — 700 pp. 16. 41 fig. Fr. 1: 50.

Calandrier pour l'an 1916. Phénomènes célestes, marées, étoiles pour 1916. Calandriers. Terre. Coordonnées astronomiques. Temps. Soleil. Lune. Planètes, satellites et petites planètes. Comètes. — Cartes magnétiques de la France. Thermométrie. Densités. Chaleur, dilatation, points crit. d. fluides. Tensions de vapeur. Chaleurs spécifiques. Chaleurs de fusion et de vaporisat. Solubilité. Elasticité d. solides, résistances. Compressibilité, capillarité, viscosité. Acoustique. Optique et spectroscopie. Electricité, unités C. G. S. Radioactivité. Equivalents électrochimiques. Poids atomiques d. corps simples. Thermochimie et tableaux divers. Supplément pour l'an 1917.

G. Bigourdan, La pression barométrique moyenne et le régime d. vents en France.

Emile Picard, Notice sur le Commendant Guyou.

Etc. etc.

Borel, Emile, Introduction géométrique à quelques théories physiques. — 137 pp. 8. Fr. 5: —.

Les déplacements euclidiens à deux et à trois dimens. La géom. euclid. quaternaire. Sur une géom. hyperbolique à deux dimens. Les déplacements hyperbol. à trois et à quatre dimensions, et leur applicat. à l'étude de la cinémat. du principe de relativité. Fonctions d'un très grand nombre de variables à 10^{24} dimens. — Sur l. principes de la théorie cinét. d. gaz. La mécanique statist. et d'irréversibilité. La relativité de l'espace d'après M. Henri Poincaré. Quelq. remarques s. la théorie d. résonateurs. S. un problème de probab. géométriques. La cinémat. dans la théorie de la relativité. Les théories molécul. et l. mathématiques.

Borel, Emile, Leçons sur la théorie des fonctions. (Eléments et principes de la théorie d. ensembles; applications à la théorie d. fonctions.) 2:e éd. (Collection de monographies sur la théorie d. fonctions, publ. par M. Emile Borel.) — VIII + 259 pp. 8.

Pref. Notions gén. s. l. ensembles. Les nombres algébr. et l'approximat. d. incommensurables. Les ensembles parf. et l. ensembles mesurables. Le prolongement analyt. Sur la converg. de cert. séries réelles. La notion de fonct. d'une variable complexe. — La notion de puissances. La croissance d. fonct. et l. nombres de la deuxième classe. La notion de fonct. en gén. — Les polémiques s. le transfini et s. la démonstration de M. Zermelo. Les probabilités dénombrables et leurs applicat. arithmét. La théorie de la mesure et la théorie de l'intégrat. Complém.

Cauchy, Augustin, Oeuvres complètes. Publ. sous la direction scientif. de l'Académie d. Sciences. 2:e sér. T. XI: Exercices d'analyse et de physique mathématique. T. 1. Paris 1840. 2:e éd. réimprimée d'après la prem. éd. — 512 pp. 4.

Sec. série: Mémoires publ. dans divers recueils, autres que ceux de l'Académie. Ouvrages classiques. Mémoires publ. en corps d'ouvrages. Mémoires publ. séparément.

Coffin, J. G., Calcul vectoriel avec applications aux mathématiques et à la physique. Trad. et notation française par Alex. Véronnet. Avec une lettre au traducteur par Paul Appell. — XXXIII + 212 pp. 8.

Opérations élément. de calcul vectoriel. Produit algébr. et géométr. de deux vecteurs. Produits algébr. et géométr. comprenant plus de deux vect. Différentiation d. vect. Les opérateurs différentiels. Applicat. à la théorie électr. Applicat. à la dynamique, à la mécanique et à l'hydrodynam. Additions à la sec. éd.

Les idées modernes sur la constitution de la matière. Conférences faites en 1912 par E. Bauer, A. Blanc, E. Bloch, Mme P. Curie, A. Debierne, L. Dunoyer, P. Langevin, J. Perrin, H. Poincaré, P. Weiss. (Société française de physique. Collection de mémoires relat. à la physique. 2. sér.) — 371 pp. 8.

Les preuves de la réalité moléculaire, par J. Perrin. Les grains d'électricité et la dynam. électromagnét., par P. Langevin. Les quantités élément. d'énergie et d'action, par E. Bauer. La théorie électronique d. métaux, par E. Bloch. L'ionisation par chocs et l'étincelle électrique, par A. Blanc. Les gaz ultra-rarifiés, par L. Dunoyer. Les rayonnements d. corps radioactifs, par Mme P. Curie. Les transformat. radioactives, par A. Debierne. Les moments magnét. d. atomes et le magnéton, par P. Weiss. Les rapports de la matière et de l'éther, par H. Poincaré.

Jordan, C., Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique. 3:e éd. T. 3: Equations différentielles. — 623 pp. 8.

Equat. différent. ordinaires: Notions prélimin. Equat. du prem. ordre. Syst. d'équat. simultanées. Equat. lin. aux différentielles totales. Etude directe d. intégrales. — Equat. lin.: Généralités. Equat. lin. à coeff. constants. Intégration par d. séries. Intégrat. par d. intégrales définies. Equat. de M. Picard. — Equat. aux dérivées partielles: Notions prélimin. Equat. aux dériv. part. du prem. ordre. Equat. aux dériv. part. du sec. ordre. Equat. lin. — Calcul. d. variations: Première variat. des intégrales simples. Variation sec. Variation d. intégrales multiples. — Note sur les équat. aux variat. Sur le calcul d. variat. Sur l'équat. de Fredholm.

Niewenglowski, B., Cours de géométrie analytique à l'usage d. élèves de la classe de mathématiques spéciales . . . 2:e éd. T. 3: Géométrie dans l'espace. Avec une Note sur les transformations en géométrie par Emile Borel. — 608 pp. 8.

Coordonnées. Transformat. d. coordonnées rectilignes. Plan et ligne droite. Points, droites, plans imagin. Sphère. Courbes gauches; tangente, plan osculateur, courbures. Plants tangents. Lieux géométr. Générat. d. surfaces ou d. lignes. Notions sur les

surfaces réglées. Enveloppes. Notions s. l. systèmes de droites. Complexes. Congruences. Fig. homothétiques. Classificat. d. quadriques rapportées à d. coordonnées ponctuelles. Théorie du centre. Plans diamétraux. Diamètres. Plans principaux. Cordes princip. Axes. Equation en S. Réduct. de l'équat. du sec. degré. Pôles et plans polaires. Polaires réciproques. Propriétés. d. diamètres conjugués dans les quadriques à centre. Cônes du sec. degré. Plans tangents (Formes réd.); sphère de Monge; lieu d. sommets d. cônes de révolut. circonscrits à une quadrique. Normales. Génératrices rectilignes. Sections circul. Discussion d'une équat. numér. du sec. degré. Déterminat. d. quadriques. Intersect. de deux quadr. Focales. Quadr. homofocales. Eléments d'une sect. plane d'une quadr. Variat. de la courbure d. sect. normales en un point simple d'une surface. Déterminat. de courbes et de surfaces par d. équat. différent. Applicat. d. imaginaires à la géométrie analyt. à trois dimens. — Note s. l. transformat. en géométrie, par E. Borel.

Trignart, A., Table auxiliaire d'intérêts composés. Avec une préf. de A. Barriol. — VIII + 21 pp. 8.

Préf. Introduct. Applicat. d. tables. Valeurs de $(1{,}0001)^n$ pour n égal à 1, 2, 3..., 1000. Valeurs de $(1{,}0001)^n$ pour n égal à 1000, 2000, ..., 100,000. Valeurs de $(1{,}0001)^n$ pour n égal à 100,000, 200,000, ... 1,000,000.

Vaucher, Alphonse, Théorie mathématique de l'échelle musicale. — 67 pp. 8.

Préf. Introd. Formes et propriétés générales de l'echelle. Forme et propriétés particul. de diverses échelles. L'échelle musicale réelle. Conclusions. Append. Trois planches.

R. Friedländer & Sohn.

Berlin 1914.

Bubnow, Nikolaus, Arithmetische Selbstständigkeit der europäischen Kultur. Ein Beitrag zur Kulturgeschichte. Aus d. Russischen übers. von Joseph Lezius. — VIII + 285 pp. 8. M. 10: —.

Einführ. Pythagoreische u. indoarabische Irrtümer. Der Kolumnenabakus im klass. Altertume. Rechensteine mit griechischen u. röm. Zeichen. Unsere Ziffern als Merkzeichen auf d. Rechensteinen d. Abakus. Ihr altsemit. od. chaldäischer Ursprung. Die klassische Terminologie d. Abakus. Der griech. Ursprung d. Wortes »Abakus». Das Rechnen auf d. Abakus. Zusammenhang mit d. griech. Abakus u. d. russ. Rechenbretten. Theorie d. Abakus. Die Denominations- u. Differenzmethode d. klass. Arithmetik. Zusammenfassung.

Louis Geisler.

Paris 1911—1912.

Blancarnoux, Paul, Toute la mécanique rationnelle et appliquée, à la portée de tous. Panorama méthodique et complet en 12 volumes. — 1654 pp. 2341 dessins. 8.

Statique. Cinématique. Cinétique. Résistance des matériaux. Générateurs de vapeur. Moteurs à vapeur. Appareils auxiliaires. Chauffage et ventilation. Automoteurs thermiques. Machines hydrauliques et frigorifiques. Outils mécaniques. Mécanique de précision.

Georg & Cie.

Genève 1914.

Fehr, H., Publications du Comité central de la *Commission internationale de l'enseignement mathématique.* Compte rendu de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique tenue à Paris du 1 au 4 avril 1914. — 172 pp. 8.

Liste d. membres. Programme. Compte rendu sommaire. Règlement. Séances d. délégués. La Commission internat. pendant la période août 1912 à avril 1914, par H. Fehr. — Discours par MM. P. Appell., G. Castelnuovo, le *Secrétaire gén.*, G. Darboux. — Emile Borel, L'adaption de l'enseignement second. aux progrès de la science. Maurice d'Ocagne, Le rôle d. mathémat. dans l. sciences de l'ingénieur. — Les resultats obtenus dans l'introduct. du calcul diff. et intégral dans l. classes supér. d. établissements seconds: Rapport gén., par E. Beke. Rapport spécial, par Ch. Bioche. Discussion. — La préparation mathémat. d. ingénieurs dans l. diff. pays: Rapport gén., par P. Stäckel. Discussion.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung.

Berlin & Leipzig 1915.

Bohnert, F., Grundzüge der ebenen Geometrie. Mit 220 Fig. (Samml. Schubert II.) — VIII + 223 pp. 8.

Vorbereitendes. Dreiecke. Vierecke. Die vollst. Lösung v. Konstruktionsaufgab. Die Kreislehre. Der Flächeninhalt einfacher Fig. Die Proportionalität d. Strecken. Die Ähnlichkeit d. Fig. Die regelmäss. Vielecke. Die Ausmessung d. Kreises. Algebr. Geometrie.

A. Hermann & Fils.

Paris 1915.

Fabry, E., Problèmes de mécanique rationnelle à l'usage des candidats aux certificats de licence et à l'agrégation. — 425 pp. 8. Fr. 12:—.

Cinématique. Statique. Dynamique du point. Moments d'inertie. Mouvement d'un solide. Mouvement d. systèmes. Mouvements relatifs. Percussions. Hydrostatique. Attraction.

S. Hirzel.

Leipzig 1914—1915.

Mangoldt, Hans von, Einführung in die höhere Mathematik. Für Studierende u. zum Selbststudium. Bd. 3: Integralrechnung. Mit 111 Fig. — X + 485 pp. 8. M. 13: 60 geh.; M. 14: 60 geb.

Einfache Integrale: Bestimmte u. unbest. Integrale. Grundregeln zur Berechn. unbestimmter Integrale. Übersicht üb. die wichtigst. Arten v. Funktionen, deren Integrale in geschlossen. Form darstellbar sind. — Zur Technik d. Integrierens: Zur Integrat. d. ration. Funkt. Zur Integrat. d. irration. algebraischen Funktionen. Integration unendl. Reihen. — Anwendungen einfacher Integrale. Bestimmte Integrale m. komplexen Grenzen. — Mehrf. Integrale: Differentiation u. Integrat. eines best. Integrales in bezug auf einen Parameter. Flächen- u. Raumintegrale. — Anwend. mehrfacher Integrale: Volumenberechn. Inhaltsberechn. krummer Flächenstücke. Schwerpunkte, Trägheitsmom., Potentiale. Integrat. vollst. Differentiale. — Die Integralsätze von Gauss, Green u. Stokes. Uneigentl. Integrale. — Differentialgleich.: Erklär. u. allgem. Sätze. Differentialgleich. erst. Ordn. Differentialgleich. höh. Ordn. Formeltab.

Stark, J., Prinzipien der Atomdynamik. III. Teil: Die Elektrizität im chemischen Atom. Mit 94 Fig. — XVI + 280 pp. 8. M. 5: — geh.; M. 6: — geb.

Begriff. d. chem. Atoms u. Moleküls auf Grund chem. Erfahrungen. Physikal. Nachweis d. atom. Struktur chem. Grundstoffe. Wissenschaftl. Hauptproblem d. chem. u. physik. Forschung im zwanzigst. Jahrhundert. Das negat. Elektron u. d. posit. Ladung als Bestandteile d. chem. Atoms. Hypothese üb. d. Struktur d. Oberfläche chem. Atome. Hypothese üb. d. Natur d. chem. Kraft. Überlegungen zugunst. d. Valenzelektron-Hypothese. Kritik d. Hypoth. d. chem. Einzelkraft. Verhältnis d. Valenzelektron-Hypoth. zur Hypothese v. Berzelius üb. d. Polarität chem. Atome. — Hauptarten d. elektr. Valenzfeldes. Die wechselseit. einfache Bindung elektropositiver, elektronegat. u. elektrozweifach. Atome. Die mehrfache Bindung. Nähewirk. innermolekularer Bindungen, mehrseit. Bindung. Benzolbindung. Wechsel d. Wertigkeit. Die gruppierende Bindung. — Allgem. üb. Lockerung u. Reissen v. innermolekul. Bindungen durch zwischenmolekul. Stösse. Allgem. üb. Lockerung u. Reissen v. innermolekul. Bindungen durch Anlagerung. Ionen-Reaktionen. Zwischenmolekulare Umlagerungen an Doppelbind. Katalyse bei zwischenmolekul. Reaktionen. Innermolekul. Umlagerungen. Allgem. üb. zwichenmolek. Bind. Das physik. u. d. chem. Molekül im gasförm., flüss. u. kristall. Aggregatzustand. Zwischenmolekul. Bind. u. Leitung d. Elektrizität in Metallen. Zwischenmolekul. Bind. in Kristallen elektrolytischer Moleküle. Beziehung zw. d. Konstitut. chem. Moleküle u. ihrer zwischenmolekul. Bindung. — Zentren, Frequenz u. Energie d. Schwingungen d. Valenzfelder chem. Atome. Ultraviolette u. violette Banden v. Valenzelektronen. Zwischen- u. innermolekul. Nähewirk. auf die Schwingungen v. Valenzelektronen. Die Valenzelektr. als Dispersionselektronen. Die Refraktionsäquivalente chem. Elemente. Natürl. Drehung d. Schwingungsebene d. Lichtes.

Ulrico Hoepli.

Milano 1916.

Berzolari, Luigi, Geometria analitica. Vol. II: Curve e superficie del secondo ordine. — XI + 427 pp. L. 3. — (Manuali Hoepli 390—391.)

Determinazione di una conica per punti. Polarità determ. da una conica. Generazione proiettiva d. coniche. Le con. come curve razionali. Fasci e schieri di coniche.

Propr. diametr. delle coniche. Forme ridotte d. equazioni d. coniche. Propr. metriche d. coniche studiate sulle loro equaz. normali. Propr. focali d. coniche. — Polarità determ. da una quadrica. Quadriche rigate. Fasci e schiere di quadr. Propr. diametr. d. quadr. Forme ridotte d. equaz. d. quadr. Forma e proprietà matriche delle quadr. stud. sulle loro equaz. norm. Sezioni circolari di una quadrica. Propr. focali d. quadr.

Imp. La Cuna de América.

Santo Domingo 1915.

Cabral, A. Fiallo, Codigo organico y reglementario de educacion comun. Ed. oficial. Santo Domingo. — 340 pp.

Cabral, Aristides Fiallo, Cuadro Sinoptico de la doctrina biocosmica de la gravitacion universal y de la jeneracion de los mundos. — 17 pp. Fol.

Universidad Nacional de La Plata.

1914.

Gans, R., Estados correspondientes del magnetismo con una aplicación a la teoría del teléfono. (Contribución al estudio de las ciencias físicas y matematicas. Ser. fís. Vol. 1: 1.) — 44 pp. 8.

Kommissionsverlag Ludwig Kókai.

Budapest 1915.

Holba, Stefan, Eine neue Bahn in das Reich der Algebra. Forschungen und Gedanken eines unberufenen. Algebraische Lösung des Casus irreducibilis, der Gleichung 5. Grades und des Fermat'schen Problems. — 64 pp. 8. M. 2: 50.

Mayer & Müller.

Berlin 1915.

Weierstrass, Karl, Mathematische Werke, hrsg. unter Mitwirk. einer von d. Königl. Preuss. Akademie d. Wiss. eingesetzten Commission. Bd. 5: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Bearb. von J. Knoblauch. — Bd. 6: Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Functionen. Bearb. von Rudolf Rothe. Mit ein. Bildn. von Weierstrass. VIII + 327 pp. 4. — IX + 354 pp. 4.

Bd. 5: Einleit. Transformation d. Differentials $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$. Integrat. d. Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ durch Reihenentwickelung. Die Function $\wp u$. Die Funct. σu.

Die part. Diff. Gleich. d. σ-Function. Lösung d. Gleichung $\wp u = s$ durch Reihenentwickelung. Bestimm. aller Lösungen d. Gleich. $\wp u = s$. Grundformeln d. Theorie d. σ-Funktion. Die Perioden d. ℘-Funct. f. reelle Invarianten. Die Funct. $\sigma_\alpha u$ und die σ-Quotienten. Die Diff.-gleich. d. σ-Quotienten. Darstellung d. σ-Funct. durch ein unendl. Product. Umwandlung d. unendl. Productes f. d. σ-Funct. Darstell. ellipt. Functionen mittels d. σ-Funct. Darstell. ellipt. Functionen durch d. ℘-Function. Darstell. d. Funct. $\sigma_\alpha u$ durch unendl. Producte. Weit. Umwandl. d. Productausdrücke f. d. σ-Funct. Die vier Theta-Funct. Die allgem. Theta-Funct. Die Theta-Funct. mit zwei Parametern. Verwandlungsformeln für d. Θ- und σ-Funct. Bezieh. zwischen σ-Funct. von mehrgliedr. Argumenten. Die Additionstheoreme d. σ-Quotienten. Relat. Zwischen Theta-Funct. von mehrgliedr. Argumenten. Das Multiplicationstheorem. d. ℘-Funct. Die Multiplicationstheoreme d. σ-Quot. Die ellipt. Integrale. Die Additionstheoreme d. Integrale erst., zweit. u. dritter Art. Formeln zur Berechn. d. Perioden. Bestimm. ein. primit. Periodenpaares d. ℘-Funct. f. belieb. Grössen e_α. Bestimm. von u aus d. Gleich. $\wp u = s$. Anwend. d. Formeln d. 18. u. 29. Kapitels auf den Fall reeller Invarianten. Transform. d. ellipt. Funct. Transform. specieller Funct. Zur Transform. d. ℘-Funct. Die Transform. zweit. Ordn.

Bd. 6: Einleit. Der Flächeninh. d. Mantels eines schiefen Kegels mit kreisförm. Grundfläche. Die Oberfläche eines dreiaxigen Ellipsoids. Das Potential eines homog. Ellipsoids u. einer homog. Ellipse. Bestimm. d. Intervalls f. d. Wert d. Integrals $\int_{x^0}^{x^1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ u. Transformat. d. ellipt. Differentials in die Legendre-Jacobische Normalform. Integrat. d. ellipt. Differentialgleich. Die Theilung d. Lemniscate u. d. complexe Multiplicat. d. ellipt. Functionen. Das sphärische u. das ebene Pendel. Die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Bestimm. d. geodät. Linien auf einem Rotationsellipsoide. Anm.

Felix Meiner.

Leipzig 1914.

Bolzano, Bernard, Werke. Mit Unterstützung d. Gesellschaft für Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst u. Literatur in Böhmen u. der Kant-Gesellschaft. Unter Mitwirk. von Mitgliedern d. Philosophischen Gesellschaft an d. Universität Wien hrsg. von Alois Höfler. I. Wissenschaftslehre, in 4 Bden. Bd. 1: Dr. B. Bolzanos Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grössten Theils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter. Hrsg. von mehreren seiner Freunde. Mit einer Vorrede des Dr. J. Ch. A. Heinroth. Erster Band. Sulzbach, 1837. — XVI + 571 pp. 8. M. 12: — geh.; M. 14· — geb.

Lewy, Heinrich, Über die apriorischen Elemente der Erkenntnis. T. 1: Die Stufen der reinen Anschauung. Erkenntnistheoretische Untersuchungen üb. den Raum und die geometrischen Gestalten. — IX + 204 pp. 8. M. 6: —.

Einleit. — Vorbereit. Betrachtungen. Stufen d. empirischen Anschauung. Einleit. Untersuchungen üb. d. Stufen d. reinen Anschauung, insbes. üb. d. erste Stufe. Die reinen Gestalten (zweit. Stufe d. rein. Anschauung). Ihre Unbegreiflichkeit auf d. Standpunkt d. Rezeptivität. Die Begriffe d. rein. Gestalten. Der Relationscharakter d. geom. Begriffe, dargelegt an einf. Beispielen aus d. Geometrie. Zum Problem d. Substrats d. geom. Relationen. Bemerk. üb. d. Punkt. Das Problem d. anschaulichen Moments d. geom. Relationen. Der Begriff d. rein. Anschauung u. d. Problem d. rein. Raums. Folgerungen u. neue Probl. f. d. zweit. Stufe d. rein. Anschauung. Die ontische Funkt. d. rein. Raums u. d. geom. Relationen. Die konkrete Fig. Schlussbemerk.

P. Noordhoff.

Groningen 1912—1915.

Saar, J. du, Rente-, Annuiteiten- en Sterftetafels. Mit toelichting. — 95 pp. 8. F. 1: —.

Stieltjes, Thomas Jan, Oeuvres complètes. Publ. par les soins de la Société mathémat. d'Amsterdam. T. 1. — VII + 471 pp. 4. Fl. 14: —.

De la représentat. approx. d'une fonct. par une autre. Remarques sur l'intégrale $\int_0^1 \log \Gamma(x+u)\,du$. Notiz üb. ein. element. Algorithmus. À propos de la form. d'interpolat. de Lagrange. Quelq. remarques à propos d. dérivées d'une fonct. d'une seule variable. À propos de quelq. théorèmes concern. les séries infinies. De la transformat. de la fonct. périod.... Sur un algorithme de la moyenne géom. Le nombre 2 comme résidu quadrat. Contribut. à la théorie d. résidus cub. et biquadrat. Sur un théorème de M. Tisserand. Preuve du théorème, d'après lequel une fonct. ent. et rat. s'annule pour cert. valeurs réelles ou complexes de la variable. Quelq. considérat. sur la fonct. rat. ent. d'une variable complexe. Möglichkeit od. Unmöglichk. einer Pothenotischen Bestimm. Sur la théorie d. résidus biquadrat. Sur le nombre d. diviseurs d'un nombre ent. Sur l'évaluation approchée d. intégrales. Sur quelq. théor. arithmét. Sur la décomposit. d'un nombre en cinq carrés. Sur un théorème de Liouville. S. le nombre de décomposit. d'un entier en cinq carrés. S. la décomposit. quadrat. de nombres prem. de la forme $3n+1$. Note s. le déplacement d'un syst. invar. dont un point est fixe. S. quelq. applicat. arithmét. de la théorie d. fonctions ellipt. S. le caract. du nombre 2 comme résidu ou non résidu quadrat. Quelq. remarques s. l'intégrat. d'une équat. diff. Note s. le problème du plus court crépuscule. Quelq. recherches s. la théorie d. quadratures dites mécan. S. un développement en fract. continue. Note s. la densité de la terre. Quelq. remarques s. la variat. de la densité dans l'intérieur de la terre. Note s. quelq. formules pour l'évaluat. de cert. intégrales. S. une généralisat. de la théorie d. quadrat. mécaniques. Note à l'occasion de la réclamat. de M. Markoff. Un théorème d'algèbre. S. cert. polynômes qui vérifient une équat. diff. lin. du sec. ordre et s. la théorie d. fonct. de Lamé. Sur quelq. théorèmes d'algèbre. S. les polynômes de Jacobi. S. une généralisat. de la série de Lagrange. Sur l'intégrale... S. une fonct. uniforme.

S. une loi asymptot. dans la théorie d. nombres. S. quelq. formules qui se rapportent à la théorie d. fonct. ellipt. S. quelq. intégrales définies.

WIJDENES, P., Vraagstukken over hoogere algebra en rekenkunde. — 175 pp. 8. F. 2: 50.

Permutaties en combinaties. Machten van een Polynom. Determinanten. Lin. vergelijkingen. Complexe getallen. Het begrip functie. Max. en minima. Vergelijkingen. Oplossing v. hoogere machtsvergelijk. Splitsing in gebrokens. Rekenkundige reeksen v. hoog. orde. Limieten. Afgeleiden. Oneindig voortloop. reeksen. Wederkeerige reeksen. Kettingbreuken m. toepassingen. Binomium. Exponent. en logarith. functies. Transcend. funct. m. complexe variable. Sym. functies. Eliminatiemethoden. Algem. herhaling v. de hoog. algebra. Rekenkunde. Gemengde opgaven ov. Rekenkunde. Form. en tafels.

WIJDENES, P., Antwoorden op de Vraagstukken over hoogere algebra. — 32 pp. 8. F. 0: 50.

WIJDENES, P., DE LANGE, D., Rekenboek voor de Hoogere Burgerschool. 1 & 2. 5:e Druk. — 131 + 143 pp. 8. F. 1: 90.

Inleid. Optelling. Aftrekking. Vermenigvuldiging en Ged. Producten. Machten, G. G. D., K. G. V. Deeling. Kenmerk. v. Deelbaarh.; G. G. D. door deeling. Verhoudingen. Evenredighed. Vraagstuk. Cijferoefeningen. Aanteekening. Talstelsels. Breuken. Tijdrek. Thermometerschalen. Rijkspostspaarb. Muntstelsel. Romeinsche cijfers. Metriekstelsel. Post en telegraaf. — Vierkantsworteltrekking. Benad. waarden. Rekenkund. reeksen. Meetkund. reeksen. Samengest. intrest. Afhankelijkheid v. grootheden. Vraagstukken. Aanteekeningen.

WIJDENES, P., en DE LANGE, D., Leerboek der algebra. D. III. 2. Druk. — 151. pp. 8. F. 1: —.

Vergelijk. v. d. tweeden graad met twee en meer onbek. Onbepaalde vergelijk. Logarithmen. Exponentialvergelijk. Rekenkund. reeksen. Meetkund. reeksen. Harmon. reeksen. Samengest. intrest. Variaties, permutaties en combinaties. Binomium v. Newton. — Vraagstukken.

WIJDENES, P., en DE LANGE, D., Antwoorden behoorende bij Leerboek der algebra, Deel III. — 29 pp. 8. F. 0: 40.

The Open Court Publishing Company.

Chicago and London 1916.

RICHARDSON, ROBERT P., and LANDIS, EDWARD H., Fundamental conceptions of modern mathematics. Variables and quantities. With a discussion of the general conception of functional relation. — XV + 216 pp. 8. $ 1: 25.

Casa Editrice G. B. Petrini di Giovanni Gallizio.

Torino 1912.

Burali-Forti, C., Corso di geometria analitico-proiettiva. Per gli Allievi della R. Accademia Militare. — VII + 267 pp. 8. L. 8: —.

Formazioni geom.; punti, rette, piani. Direzioni e giaciture. Elementi ortogonali. Proiezioni. Rotazioni. Funzioni, limite, derivate, integrali, gradiente. Princip. sistemi di coordinate. — Proprietà gen. delle linee piane. Alcune linee piane. Propr. gen. delle linee gobbe. Elica cilindrica. — Superfici e sist. ∞^1 di linee: Generalità. Inviluppo e traiettorie ortog. di un sist. ∞^1 di lin. Superfici rig. Superfici di rotaz. Superfici elicoidali. — Elementi proiettivi. Fig. proiett. di 1ª specie. Proiettività in gen. Costruz. d. proiettiv. fra due fasci dist. Costruz. d. proiettività fra due fasci sovrapposti. Involuzione. — Costruz. di una conica per punti e p. tang. mediante fasci proiettivi. Teor. di Pascal e Brianchon. Diametri ed assi. Fuochi e direttrici. Costruz. di una conica data med. la sua equaz. gen. cartesiana. Quadriche. — Form. vettoriali gen. per il calcolo di aree e vol.

Karl Prochaska.

Wien, Teschen, Leipzig 1912—1915.

Müller, P. Joh., Die Welträtsel im Lichte der neueren physikalisch-chemischen und astronomischen Forschung. Betrachtungen eines modernen Naturforschers. — 218 pp. 8. M. 3: —.

Der Kampf um d. Weltanschauung. Die Raumenenergie als Ursache d. mechan. Bewegungen. Die Schwächen d. kinet. Gastheorie. Existenz d. Äthers u. seine Beziehungen zur Raumenergie. Raumenergetik u. Weltanschauung. Ein neues Welträtsel u. seine Bezieh. zur Weltanschauung. Anm.

Müller, P. Joh., Neues vom Weltall. — 59 pp. 8. M. 1: —.

Müller, P. Joh., Das Rätsel der Schwerkraft gelöst durch die Raumenergetik. — 51 pp. 8. M. 1: 20.

Kržiwanek, Karl, Gravitation und Lichtgeschwindigkeit. 116 pp. 8. M. 4: — geh.

Vorwort. Gravitation u. Lichtgeschwindigkeit. Ebbe u. Flut d. Weltmeeres. Übersicht üb. d. Problem von d. Schwerkraft. Konstitution des Kosmos u. einige Erläuterungen physikal. Natur. Schlussbetrachtung.

Kržiwanek, Karl, Analytische Darstellung der Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes. — 31 pp. 8.

Vorwort. Einleit. Die Evektion. Die Variation. Die jährl. Gleichung. Die parallakt. Gleichung. Schlussbetrachtungen.

Emil Roth.

Giessen 1914.

Schmehl, Chr., Rechenbuch für höhere Lehranstalten. T. 1: Das Rechnen mit ganzen Zahlen, gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen. 12:e Aufl. — VIII + 236 pp. 8. T. 2: Die bürgerlichen Rechnungsarten. Mit einem Anhang: Aufgaben zur Kranken-, Unfall- und Invalidenversicherung. Berechnung der Flächen- u. Körperinhalte. 13:e Aufl. — VIII + 267 pp. 8.

1. Das Rechnen mit ganzen unbenannt. u. einfach benannt. Zahlen. Mehrfach benannte Zahlen m. dezimaler Währungszahl. Mehrf. benannte Zahlen m. nichtdezim. Währungszahl. Zahlentheorie. Das Rechnen mit gem. Brüchen. Das Rechnen m. Dezimalbrüchen. — Die deut. Münzen, Masse u. Gewichte.

2. Einfache Regel-di-tri mit gerad. Verhältnissen. Einf. Regel-di-tri mit umgekehrt. Verhältn. Verm. Aufgaben m. gerad. u. umgekehrt. Verhältn. Zusammengesetzte Regel-di-tri. Zinsrechn. Allgem. Potenzrechn. Gewinn- u. Verlustrechn. Rabatt- u. Diskontrechn. Warenrechn. Teilungsrechn. Mischungsrechn. Alligationsrechn. Terminrechn. Effektenrechn. Kettensatz. Aufgaben etc. Die deut. Münzen, Masse u. Gewichte. Tafeln: Wertpapier. Zinsscheine u. Erneuerungsschein. Ausländ. Münztafel.

Schmehl, Chr., Die Algebra und algebraische Analysis nebst einer element. Theorie d. Determinanten u. den Anfangsgründen der Differentialrechnung in den ober. Klassen von höh. Lehranstalten, insbesond. der Realgymnasien u. Oberrealschulen. Für den Schulgebrauch u. Selbstunterricht. Mit 34 Fig. 2:e verb. Aufl. — VIII + 316 pp. 8.

Diophant. Aufgaben. Die Binomialkoeffizienten. Arithmet. Reihen höh. Ordnung. Kombinatorik. Wahrscheinlichkeitsrechn. Der binom. Lehrsatz f. posit. ganze Exponenten. Funktionen v. veränderl. Grössen u. graphische Darstellungen. Gleichungen höh. Grades. Kub. Gleichungen. Biquadrat. Gleichungen. Auflösung d. höh. Gleich. durch Näherung. Das Rechnen mit komplex. Zahlen. Entwickelung d. Funkt. in unendliche Reihen. Der binom. Satz f. belieb. reelle Exponenten. Element. Theorie d. Maxima u. Minima. Determinanten. Kettenbrüche.

Leonhard Simion Nf.

Berlin 1913—1914.

Gabrilovitsch, Leonid, Über mathematisches Denken und den Begriff der aktuellen Form. (Bibliothek für Philosophie, hrsg. von Ludwig Stein. Bd. 8.) — 92 pp. 8. M. 2:50 geh.

Schröder, Georg, Der grosse Fermat'sche Satz. Ein mathematisches Problem gelöst. — 62 pp. 4. M. 4: — brosch.

Die Produktenform. Das Potenzenprodukt. Die grad. Exponenten. Die ganze Zahl α_n. Die Differenzengleich. Die Teilbarkeit d. Gleich. M_n durch 2^{n-1}. Der

Idelakreis bei Teilung v. $2^{n-1} b^n$ durch ungrad. Potenzzahlen. Die bedeuts. Teilungsfähigkeit d. Ausdruckes ... Die Differenzengleich. Die Teilbarkeit d. Gleich. Z_n durch 2^3. Die Teilbark. durch 3^1 etc.

Julius Springer.

Berlin 1914.

HORT, W., Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. Darstellung der f. d. Ingenieurswissenschaften wichtigsten gewöhnl. u. partiellen Differentialgleichungen sowie der zu ihrer Lösung dienenden genauen u. angenäherten Verfahren einschliesslich d. mechanischen u. graphischen Hilfsmittel. Mit 255 Fig. — IX + 540 pp. 8. M. 16: — geb.

Gewöhnl. Differentialgleichungen. Differentialgleich. erst. Ordnung. Die Differentialgleich. zweit. Ordn. Differentialgleichungen höherer Ordn. Simultane Differentialgleich. Die Differenzengleichungen. — Partielle Differentialgleich.: Einleit. Einfache part. Differentialgleich. aus verschiedenen Gebieten. Die Differentialgleich. d. Potentials. Die Differentialgleich. d. Bewegungen elast. Körper. Die Diff.-gl. der Hydrodynamik. Die Diff.-gl. der Elektrodynamik.

Mathematische Abhandlungen, HERMANN AMANDUS SCHWARZ zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet von *Freunden* und *Schülern*. Mit dem Bildnis von H. A. Schwarz u. 53 Fig. im Text. — — VIII + 451 pp. 8. M. 24: — geb.

Widmung. — BOLZA, OSKAR, Über Variationsprobleme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen. CARATHÉODORY, C., Elementarer Beweis f. d. Fundamentalsatz d. konf. Abbildungen. CAUER, DETLEF, Üb. die Pfeiffersche Methode. FEJÉR, LEOPOLD, Üb. die Konvergenz d. Potenzreihe a. d. Konvergenzgrenze in Fällen d. konf. Abbildung auf d. schlichte Ebene. HARTOGS, F., Üb. d. Beweis eines Satzes aus d. Theorie d. analyt. Funktionen mehrerer Veränderl. HENSEL, K., Die Exponentialdarstellung d. Zahlen eines algebr. Zahlkörpers f. d. Bereich eines Primdivisors. HESSENBERG, GERHARD, Element. Beweise f. e. Maximumseigenschaft d. Sehnenvierecks. HETTNER, G., Üb. die Schwarzsche Minimalfläche. HILB, EMIL, Zur Theorie d. lin. Differentialgleichungen 3. Ordnung m. drei singulären Stellen. HILBERT, DAVID, Üb. d. Invarianten eines Systems v. belieb. vielen Grundformen. HÖLDER, OTTO, Abschätzungen i. d. Theorie d. Differentialgleichungen. HURWITZ, A., Üb. d. Weierstrass'sche σ-Funktion. JACOBSTHAL, ERNST, Beitr. z. Kroneckerschen Theorie d. algebr. Zahlen. JAHNKE, E., Ein Orthogonalsyst. f. d. Thetafunktionen v. drei Argumenten. JUNG, HEINRICH W. E., Üb. d. kanon. Klasse einer auf einer algebr. Fläche lieg. algebr. Kurve. KNESER, ADOLF, Z. Theorie d. Determinanten. KOEBE, PAUL, Üb. diejen. analyt. Funktionen eines Argum., welche ein algebr. Additionstheorem besitzen, u. die endl.-vieldeutig umkehrbar. Abelschen Integrale. KORN, A., Zwei Anwendungen d. Methode d. sukzessiven Annäherungen. LAMPE, EMIL, Üb. einige elementargeom. Beziehungen, die aus d. Eigenschaften d. Einheitswurzeln fliessen. LANDAU, EDMUND, Üb. d. Primzahlen in def. quadrat. Formen u. d. Zetafunktion reiner kub. Körper.

Lichtenstein, Leon., Üb. eine Integro-Differentialgleichung u. d. Entwickl. willkürlicher Funktionen nach deren Eigenfunkt. Mertens, Franz, Üb. d. Bildung zyklischer Gleichungen v. Grade λ^2, wo λ eine unger. Primzahl bezeichnet. Mohrmann, Johannes, De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum. Müntz, Ch. H., Üb. d. Approximationssatz v. Weierstrass. Neovius, E. R., Analyt. Bestimmung einiger ins Unendl. reichender Minimalflächenstücke, deren Begrenz. gebildet wird v. drei gerad. Linien, v. welchen zwei sich schneiden, währ. d. dritte der Ebene d. beid. ersten parallel ist. Rothe, Rudolf, Z. geom. Optik in einem inhomogenen Medium m. stetig veränderl. Brechungsindex. Salkowski, E., Üb. eine besond. Art. v. Linienkongruenzen. Schmidt, Erhard, Bemerkung z. Potentialtheorie. Schottky, F., Z. d. Beweisen d. Lindemannschen Satzes. Schrutka, Lothar v., Beweis d. Satzes, dass d. Entfernungen eines Punktes v. drei gegeb. Punkten die kleinste Summe aufweisen, wenn sie m. einand. gleiche Winkel bilden. Schur, I., Üb. d. Entwickl. einer gegeb. Funktion nach d. Eigenfunktionen eines posit. definit. Kerns. Simon, Max, Sophie Germain. Steinitz, Ernst, D. allgem. Theorie d. Körper u. d. Fundamentalsatz d. Algebra. Toeplitz, O., Bemerk. üb. einen Satz v. Mercer.

B. G. Teubner.

Leipzig & Berlin 1913—1916.

Ahrens, W., Mathematiker-Anekdoten. Mit den Bildnissen von A. Riese, P. Fermat, L. Euler, C. F. Gauss, J. L. Lagrange, A. L. Cauchy, B. Riemann, K. H. Schellbach, H. Grassman. (Mathematische Bibliotek, hrsg. von W. Lietzmann und A. Witting. 18.) — 54 pp. 8. M. 0: 80.

Adam Riese. Karl Friedr. Gauss. Cauchy im Wettstreit mit Henri Mondeux. Bernhard Riemann auf d. Gymnas. Hermann Grassman. Karl Schellbach. G. S. Ohm u. d. Schüler. Direktor August. Kurd Lasswitz in d. Klasse. Quandoque bonus dormitat Homerus. Leonhard Euler u. die Fürstin Daschkoff. François Arago vor d. Examinatorenstuhl von Louis Monge u. von Legendre. Die »Mathematiker» d. Tagespresse. Wie erreicht man es, bei ein. Einkauf die Ware umsonst u. noch bares Geld dazu zu erhalten? Tapferkeit im Kriege das Ergebnis mathemat. Überlegung. Die Math. im Schul- u. Hochschulunterricht d. »guten alten Zeit». Logarithmen. Der »grosse Fermatsche Satz» u. der Wolfskehl-Preis. Reg.

Czuber, Emanuel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Bd. 1: Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmasslehre. Mit 25 Fig. Dritte sorgfält. durchgeseh. u. erweit. Aufl. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern . . ., Bd. 9, 1.) — XII + 462 pp. M. 12: — geh.; M. 14: — geb.

Entwickl. d. Grundbegriffe. Methoden d. Wahrscheinlichkeitsbestimmung. Mittelwerte. Geom. Wahrscheinlichkeiten. — Produkt binom. Faktoren u. d. Binomialformel. Das Theorem v. Bernoulli. Das Theorem v. Poisson. Das Gesetz d. grossen Zahlen. — Wahrscheinlichk. d. mögl. Ursachen eines beobacht. Ereignisses. Wahrscheinlichk.

künft. Ereignisse auf Grund v. Beobacht. — Die mathemat. Erwartung. Die Sätze v. Tschebyscheff. Die Theoreme v. Bernoulli u. Poisson. Spielprobleme. Das mathemat. Risiko. Die moral. Erwart. — Grundleg. Entwicklungen. Anwend. auf verschied. Probleme. — Das Fehlergesetz. Genauigkeitsmasse. — Direkte Beobachtungen. Vermitt. Beobacht. Bedingte Beobacht. — Kollektivgegenstände u. d. Mittel zu ihrer Beschreibung. Analyt. Darstellung willkürl. Verteilungen. Anwend. Tafeln.

Enriques, Federigo, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Hermann Fleischer. Mit einem Einführungswort von Felix Klein. 2. Auf. — XIV + 354 pp. 8. M. 9: — geh.; M. 10: — geb.

Einleit. Fundament. Sätze. Gesetz d. Dualität. Einleit. Sätze. Harmonische Gruppen. Das Axiom d. Stetigkeit u. seine Anwend. Der Fundamentalsatz d. Projektivität. Projektivität zw. Gebilden erst. Stufe. Involution in Geb. erst. Stufe. Projektivitäten zw. Geb. zweit. Stufe. Die Kegelschnitte. Projektivität zw. Kegelschnitten. Bestimmte Aufgaben. Eigensch. d. Brennpunkte d. Kegelschnitte. Die metr. Eigenschaften d. Kegel zweit. Grades. Projektivität zw. Gebilden dritt. Stufe. Anhang.

Forchheimer, Philipp, Hydraulik. — X + 566 pp. 8. M. 18: — geh.; M. 19: — geb.

Gegenstand d. Hydraulik. Definit. d. Flüssigkeit. — Hydrostatik. Die grundleg. Beziehungen d. Hydraulik. Gleichförm. (von Zeit u. Ort unabhäng.) Strömung in Röhren. Gleichförm. Strömung in off. Läufen. Die Geschwindigkeitsverteilung. Stationäre Strömung. Mit d. Zeit veränderl. Strömung. Das Strömen in Röhren u. Wasserläufen bei unstät. Wandung. Der Ausfluss durch Öffnungen. Der Überfall. Füllung u. Entleerung v. Wasserbecken u. Gefässen. Schwingungen. Wellenbewegung. Der Wasserstoss. Grundwasserbeweg. Einwirk. d. Wassers auf d. Flussbett od. d. Meeresgrund.

Fricke, Robert, Analytische Geometrie. Mit 96 Fig. (Teubners Leitfäden für d. math. u. techn. Hochschulunterricht.) — 135 pp. 8. M. 2: 80.

Analyt. Geom. d. Ebene: Die Koordinaten in d. Ebene u. d. Darstellung d. eben. Kurven durch Gleichungen. Die Geraden u. d. Kreise. Die Ellipsen, Hyperbeln u. Parabeln. Gemeinsame Gleichungen für d. Kurven zweit. Grades. Einige bei einfach. Mechanismen auftret. Kurven. — Analyt. Geom. d. Raumes: Die Koordinaten im Raume u. d. Darstell. d. Flächen u. Kurven durch Gleichungen. Die Ebenen, die Geraden u. d. Kugeln. Die Ellipsoide, die Hyperboloide u. d. Paraboloide.

Fricke, Robert, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. Teil I: Die funktionentheoretischen und analytischen Grundlagen. Mit 83 Fig. X + 500 pp. 8.

Einleit. Zusammenstellung von Sätzen üb. analyt. Funktionen. — Die ellipt. Integrale u. ihre zur ersten Stufe gehörend. Normalgestalten. Das ellipt. Integral erst. Gattung erst. Stufe u. die durch dasselbe vermitt. Abbildungen. Die ellipt. Funktionen erst. Stufe. Die eindeut. doppeltperiod. Funktionen erst. Stufe. Die ellipt. Modulfunkt. erst. Stufe u. ihre inversen Funktionen. — Die Normalgestalten zweit. u. viert. Stufe d. Verzweigungsform u. d. ellipt. Integrale. Die ellipt. Funktionen zweit. Stufe. Die Modulfunktionen zweit. Stufe u. d. lineare Transformation d. ellipt. Funkt. zweit. Stufe.

Goldenring, Robert, Die elementargeometrischen Konstruktionen des regelmässigen Siebzehnecks. Eine historisch-kritische Darstellung. Mit 51 Fig. — 69 pp. 8. M. 2: 80 geh.

Allgem. üb. die Konstruktion d. regelmäss. Siebzehnecks. Die geom. Lösung quadrat. Gleichungen. Die Konstruktionen d. Siebzehnecks bei uneingeschränktem Gebrauch von Zirkel u. Lineal. Die Steinerschen Konstrukt. d. Siebzehnecks. Die Mascheronischen Konstrukt. d. Siebzehnecks. Die Konstrukt. d. Siebzehnecks mittels d. recht. Winkels.

Grossman, Marcel, Darstellende Geometrie. Mit 109 Fig. (Teubners Leitfäden für d. math. u. techn. Hochschulunterricht.) — V + 138 pp. 8. M. 2: 80 geb.

Einleit. Konjug. Normalprojektionen. Axonometrie. Zentralprojektion. Geom. Grundlagen d. Photogrammetrie. — Allgem. Eigenschaften d. Kurven u. Flächen. Topograph. Flächen. Kegel- u. Zylinderflächen. Kurven zweit. Grades. Durchdringungen von Kegel- u. Zylinderflächen. Rotationsflächen. Regelflächen. Flächen zweit. Grades.

Heger, Richard, Fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln, sowie Hülfstafeln zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen. Für den Gebrauch an höh. Schulen. 2. verb. Aufl. — 124 pp. 8. M. 2: 40 geb.

Herglotz, Gustaf, Über die analytische Fortsetzung des Potentials ins Innere der anziehenden Massen. (Preisschriften gekr. u. hrsg. von d. Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft. 44.) — 52 pp. 8. M. 3: 60 geh.

Üb. das logarithmische Potential ebener, homog., v. algebraischen Kurven — insbesond. bizirkularen C_4 — begrenzter Flächenstücke u. seine analyt. Fortsetzung. Üb. das Newtonsche Potential homog., v. algebraischer Flächen — insbesond. bizirkul., symmetr. F_4 — begrenzter Rotationskörper u. seine analyt. Fortsetzung.

Hjelmslev, Johannes, Geometrische Experimente. Aus d. Dänischen übers. von Albert Rohrberg. Mit 56 Fig. (Beihefte zur Zeitschrift für Math. u. Naturwiss. Unterricht, hrsg. v. W. Lietzmann u. E. Grimsehl. 5.) — 70 pp. 8. M. 2: 40 geh.

Konstruktion u. Experiment. Schnittpunkte eines Kreises mit ein. Kegelschnitte. Die Dreiteil. d. Winkels. Kubikwurzelausziehung. Allgem. Aufgab. dritt. u. viert. Grades. Besondre Aufg. dritt. u. viert. Grades. Der dreibeinige Zirkel. Schrittversuche. Einschiebungen. Verschiebungsversuche. Reduktionswinkel. Experimentelle Darstellung d. Kegelschnitte. Die allgem. Gleich. n^{ten} Grades. Aufgab. im Raume. Raumversuche. Transzendente Aufgab. Theorie d. Kreisevolvente. Anwend. d. Kreisevolvente. And. transzend. Aufgaben.

Ischak, Frida, Das Perpetuum mobile. Mit 38 Abbild. (Aus Natur u. Geisteswelt. 462.) — 103 pp. 8. M. 1: 25 geb.

Einleit. Begriff. d. Perp. mob. Ursprung d. Idee. Älteste Dokum. Das mechan. Perp. mob. Das magnet. Perp. mob. Das hydraul. Perp. mob. Das Perp. mob. u. die scholast. Wiss. Das chem. Perp. mob. Das Perp. mob. der Mystiker. Perp. mob.

mit Hilfe d. Kapillarität u. ähnl. Erscheinungen. Automaten. Die Geschichte eines wiss. Betruges. Die Ansichten üb. das Perp. mob. vom Standpunkt d. voreuerget. Physik. Das perp. mob. in der erst. Hälfte des 19. Jahrhunderts. Das Perp. mob. u. das Prinzip d. Erhalt. d. Energie. Das Perp. mob. II. Art. Perp.-mob.-Projekte aus neuerer Zeit. Das scheinb. Perp. mob. Das Perp. mob. in der Gegenwart. Reg.

KLEIN, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. T. 2: Geometrie. Vorlesung gehalt. im Sommersemester 1908. Ausgearb. von E. HELLINGER. 2. Aufl. — 547 pp. 4. M. 7: 50 geh.

Zweck u. Form d. Vorlesung. Die »Fusionsbestreb.» — Strecke, Flächeninhalt, Rauminhalt als relative Grössen. Das Grassmannsche Determinantenprinzip f. d. Ebene. Das Grassmannsche Prinz. f. d. Raum. Klassifikat. d. räumlichen Elementargebilde nach ihrem Verhalten bei rechtwinkl. Koordinatentransformationen. Erzeugnisse d. Grundgebilde. — Allgem. üb. Transformat. u. ihre analyt. Darstellung. Affine transformationen. Projektive Transformat. Höh. Punkttransformat. Transformat. m. Wechsel d. Raumelementes. Die Imaginärtheorie. — Die Systematik. Grundlagen d. Geometrie. — Über d. Unterricht: Bedeut. d. hist. Untergrundes. Entgegenstell. moderner Anforderungen. Kritisches zum heut. Unterrichtsbetriebe. Der Unterricht in England, in Frankreich, in Italien, in Deutschland. Zusätze zur zweit. Aufl.

KLEIN, F., und SOMMERFELD, A., Über die Theorie des Kreisels. H. 1.: Die kinetischen Grundlagen der Theorie. 2. durchgeseh. Abdr. — VIII + 196 pp. 8. M. 5: 60 geh.; M. 6: 60 geb.

Die Kinematik d. Kreisels. Einführ. in die Kinetik (Statik u. Impulstheorie). Die Eulerschen Gleich. nebst weit. Ausführungen zur Kinetik d. Kreisels. — Die allgem. Beweg. des schweren sym. Kreisels. Einführ. der ellipt. Integrale. Üb. besond. Bewegungsformen des schwer. sym. Kreisels, namentl. üb. die pseudoreguläre Präcession sowie üb. die Stabilität d. Bewegungen. Darstellung d. Kreiselbeweg. durch ellipt. Funkt. — Die stör. Einflüsse. Astronom. u. geophysik. Anwend.: Der auf d. Horizontalebene spiel. Kreisel. Theorie u. Wirklichkeit. Einfluss d. Reibung, d. Luftwiderstandes, d. Elasticität von Material u. Unterlage auf die Kreiselbeweg. — Astron. Anwend. Geophysik. Anwendungen. — Die technischen Anwend. d. Kreiseltheorie.

KRÜGER, L., Transformation der Koordinaten bei der konformen Doppelprojektion des Erdellipsoids auf die Kugel und die Ebene. (Veröffentlichung d. Kgl. Preuss. Geodät. Institutes, N. F., N:o 60.) Mit 3 Fig. — 43 pp. 4. M. 3: — geh.

Einleit. Transformat. d. Koordinaten bei transvers. Mercatorprojektion d. Kugel. Transformat. eines ebenen Koordinatensystems d. konf. Doppelprojektion in ein anderes. Transformat. d. rechtwinkl. ebenen Koordinaten d. konf. Doppelprojektion in rechtwinkl. sphäriod. Koordinaten. Transformat. in rechtwinkl. Koordinaten d. Gauss'schen konf. direkt. Abbildung d. Erdellipsoids in d. Ebene.

LANGE, MAX, Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. 2. Aufl. Mit d. Bildn. E. Laskers und P. Morphys etc. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd. 281.) — 108 pp. 8. M. 1: 25 geb.

Einleit. Die Regeln d. Schachspiels. Die prakt. Partie. Strategie u. Prinzipien d. Spiels. Das Endspiel. Namen- u. Sachreg.

Leman, Alfred, Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Mit ein. Bildn. von P. Fermat. (Mathematische Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting. 19.) — 59 pp. 8. M. 0: 80 kart.

Lenz, K., Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd. 490.) — VI + 114 pp. 8. M. 1: 25.

Die Rechenvorrichtungen für die Addition u. Subtraktion, f. d. Multiplikat. u. Division. — Geschichtliches üb. Rechenmaschinen. Die Hauptbestandteile u. d. Einteil. d. Rechenmaschinen. Die Addiermaschin. ohne Antriebhebel. Die Addiermaschin. mit Antriebhebel. Die Sprossenradmaschin (Odhner-Masch.). Die Staffelwalzenmaschin. (Thomas-Masch.). Die Mercedes-Euklid-Masch. Die nach d. Multiplikationsprinzip arbeit. Rechenmaschinen u. vergleich. Übersicht üb. alle Rechenmasch. Die Schreibrechenmaschin. Die logarithm. Rechenvorrichtungen.

Lorentz, H. A., Les théories statistiques en thermodynamique. Conférences faites au Collège de France en november 1912. Rédigées en 1913 par L. Dunoyer. — 120 pp. 8. M. 5: 80 geh.

La notion de probabilité. Formule de Boltzmann. Définit. de la probabilité. Ex. d'un gaz parfait monoatomique. Sur »l'insensibilité« de la form. de Boltzmann. Applicat. de la form. à un corps quelconque. — Molécules à dimensions finies. L'entropie calculée de diff. manières. Gaz parfait au repos. Gaz parf. en mouvement. Tendance vers l'état le plus probable. Deux définit. de la probabilité. Ensembles canoniques et microcanoniques. Fluctuations en densité. Emission d. particules α. Fluct. en énergie. Eparpillement de la lumière. Opalescence critique. Mouvement d'un grain suspendu. Mouvem. brownien généralisé. Mouvem. brown. dans un gaz raréfié. Théorie statist. du rayonnement. Energie d'un vibrateur linéaire. Energie d'un vibrat. quelc. Chaleur spécif. Difficult. dans la théorie de l'absorption. Fluctuat. dans le rayonnement noir. Hypothèse d. quanta d'énergie. Conclusion. Notes.

Näbauer, Martin, Grundzüge der Geodäsie. (Handbuch d. angew. Mathematik, hrsg. von H. E. Timerding. III.) Mit 277 Abbild. — XIV + 420 pp. 8. M. 9: — geh.; M. 9: 60 geb.

Ausgleichungsrechn. nach d. Methode d. kleinst. Quadrate: Elemente d. Fehlertheorie. Ausgleich. vermittelnder Beobachtungen. Ausgleich. bedingter Beobacht. — Niedere Geodäsie: Einleit. Geodät. Masseinheiten. Elemente d. Instrumentenkunde. Aufnahmearbeiten. Verarbeit. d. Aufnahmen. Absteckungsarb. — Höh. Geodäsie: Einl. Die Kugel als Projektionsfläche. Aufgab. d. Landesvermessung. Die Erde als Rotationsellipsoid (Sphäroid). Das Geoid.

Netto, Eugen, Algebra. Mit 8 Fig. (Grundlehren der Mathematik für Studierende u. Lehrer, 1. Teil. II. Bd.) — XII + 232 pp. 8. M. 7: 20 geb.

Determinanten. Funktionen. Elementareigensch. ganzer Funkt. einer Variablen. Gleichungen. Lin. Gleichungen. Resultanten u. Diskriminanten. Die Gleichungen zweit., dritt. u. viert. Grades. Wurzelexistenzbeweise. Einwertige u. zweiwert. Funktionen. Die Einheitswurzeln. Die Kreisteilungsgleich. Zykl. u. reziproke Gleich. Substitutionengruppen. Funktionengattungen. Die Auflösbarkeit algebr. Gleichungen. Transformation. Invarianten u. Kovarianten. Quadrat. Formen. Der Sturmsche Satz.

ROHRBERG, A., Der mathematische Unterricht in Dänemark. Berichte u. Mitteilungen, veranlasst durch die internat. mathemat. Unterrichtskommission. 2. Folge: 1. (Beihefte zur Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht, hrsg. von W. Lietzmann u. E. Grimsehl. 2.) — VI + 69 pp. 8. M. 2: 40 geh.

Die Organisat. d. dän. höh. Schule. Der Rechenunterricht. Der Arithmetikunterricht. Der geom. Unterricht. Der Algebraunterricht. Die Infinitesimalrechn. Die Ausbild. d. Lehrer f. höh. Schulen. Die Ausbild. d. Elementarlehrer. Die math. Ausbild. d. Ingenieure.

RUNGE, C., Graphische Methoden. Mit 94 Fig. (Sammlung math.-phys. Lehrbücher hrsg. von E. Jahnke. 18.) — 142 pp. 8. M. 4: 40 geh.; M. 5: — geb.

Graphisches Rechnen. Graph. Darstellung d. Funktionen einer od. mehrer unabhäng. Veränderlichen. Die graph. Methoden d. Differential- u. Integralrechnung.

SALMON, GEORGE, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Nach der freien Bearb. von WILHELM FIEDLER neu hrsg. von FRIEDRICH DINGELDEY. 8. Aufl. Teil I. — XXX + 452 pp. 8. M. 12: — geb.

Der Koordinatenbegriff u. der Punkt. Der Gleichungsbegriff u. d. Gerade. Aufgaben üb. Geraden u. Geradenpaare. Symbol. Gleichungen u. duale homogene Koordinaten. Von d. Projektivität u. d. kollinearen Gebilden. Der Kreis. Syst. v. Kreisen. Haupteigenschaften d. Kurven zweit. Grades. Die Mittelpunktseigenschaften v. Ellipse u. Hyperbel. Die Fokaleigenschaften v. Ellipse u. Hyperbel. Die Parabel. Besond. Beziehungen zweier Kegelschnitte. Die Methode d. Unendlichkleinen.

SCHELL, WILHELM, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. 3. Aufl. neu bearb. von ERICH SALKOWSKI. — XI + 196 pp. 8. M. 8: — geh.

Einleit. Das Hauptdreikant einer Raumkurve. Krümmung. Sphär. Abbild. Tangentenfläche u. Filarevolventen. Die Polarfläche u. d. Evoluten. Schmiegungskugel u. Schmiegungskegel. Die reflektizier. Fläche. Windschiefe Flächen. Die Fläche d. Hauptnormalen. Die Fläche d. Binormalen. Besond. Raumkurven. Die Schmiegungshelix u. d. kon. Schmiegungsloxodrome. Geometrie d. Beweg. d. Kurven doppelt. Krümmung. Die zyklifizier. Flächen. Kurvenpaare. Die Evolutoiden. Parallele Raumkurven. Mehrfache Evoluten. Weit. Sätze u. Aufgaben.

Die Kultur der Gegenwart. T. III. Abt. 3: 1: Physik, unter Redaktion von E. Warburg. Mit 106 Fig. VIII + 762 pp. 8. M. 22: — geh.; M. 24: — geb. (in Halbfranz M. 26: —).

Mechanik: Die Mechanik im Rahmen d. allgem. Physik, von E. Wiechert. Akustik: Histor. Entwicklung u. kultur. Beziehungen von F. Auerbach. Wärmelehre: Thermometrie, von E. Warburg. Kalorimetrie, von L. Holborn. Entwickl. d. Thermodynamik. von F. Henning. Mechanische u. therm. Eigenschaften d. Materie in d. drei Aggregatzuständen, von L. Holborn. Umwandlungspunkte, Erschein. bei koexistier. Phasen, von L. Holborn. Wärmeleitung, von W. Jaeger. Wärmestrahlung, von H. Rubens. Theorie d. Wärmestrahl., von W. Wien. Experiment. Atomistik, von E. Dorn. Theoret. Atomistik, von A. Einstein. Elektrizitätslehre: Entwickl. d. Elektrizitätslehre bis zum Siege d. Faraday'schen Anschauungen, von F. Richarz. Die Entdeckungen v. Maxwell u. Hertz, von E. Lecher. Die Maxwell'sche Theorie u. d. Elektronentheorie, von H. A. Lorentz. Ältere u. neuere Methoden d. Magnetismus, von R. Gans. Die Energie degradier. Vorgänge im elektromagnet. Feld, von E. Gumlich. Die drahtlose Telegraphie, von F. Braun. Schwingungen gekoppelter Systeme, von M. Wien. Das elektr. Leitungsvermögen, von H. Starke. Die Kathodenstrahlen, von W. Kaufmann. Die posit. Strahlen. von E. Gehrcke u. O. Reichenheim. Die Röntgenstrahlen, von W. Kaufmann. Entdeckungsgeschichte u. Grundtatsachen d. Radioaktivität, von J. Elster u. H. Geitel. Radioakt. Strahlungen u. Umwandl., von St. Meyer u. E. v. Schweidler. Lehre vom Licht: Entwickl. d. Wellenlehre d. Lichtes, von O. Wiener. Neuere Fortschritte d. geom. Optik, von O. Lummer. Spektralanalyse, von F. Exner. Struktur d. Spektrallinien, von E. Gehrcke. Magnetooptik, von P. Zeeman. Allg. Gesetze u. Gesichtspunkte: Verhältnis d. Präzisionsmässungen zu d. allgem. Zielen d. Physik, von E. Warburg. Die Erhalt. d. Energie u. d. Vermehrung d. Entropie, von F. Hasenöhrl. Das Princip d. kleinst. Wirkung, von M. Planck. Die Relativitätstheorie, von A. Einstein. Phänomenolog. u. atom. Betrachtungsweise, von W. Voigt. Verhältnis d. Theorien zueinander, von M. Planck.

Weber, Heinrich, und Wellstein, Josef, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. In drei Bänden. 2. Band: Elemente der Geometrie, bearb. von Heinrich Weber, Josef Wellstein und Walther Jacobstahl. 3. Aufl. Mit 237 Fig. — XIV + 594 pp. 8. M. 12: — geb.

Grundlag. d. Geometrie: Kritik d. Grundbegriffe. Die natürl. Geom. als eine d. unendl. vielen Erscheinungsformen einer rein begriffl. Geometrie (Metageometri). Grundleg. d. projekt. Geometrie. Planimetrie. — Ebene Trigonometrie u. Polygonometrie. Sphärik u. sphär. Trigonometrie. — Analyt. Geom. d. Ebene. Punkte, Ebenen u. Gerade im Raume. Rauminhalt u. Flächeninh. Drehungsgruppen u. regul. Körper.

Wolff, Georg, Der mathematische Unterricht der höheren Knabenschulen Englands. *Berichte u. Mitteilungen veranlasst durch die internat. math. Unterrichtskommission. 2. Folge: II.* (Beihefte zur Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht hrsg. von W. Lietzmann u. E. Grimsehl. 3.) — V + 207 pp. 8. M. 5: — geh.

Allgem. üb. das System d. engl. höh. Schulen. Geschichtl. Entwickl. des math. Unterrichts in England. Der heut. mathemat. Unterricht in England. Schlusswort. Prüfungsaufg.

L. v. Vangerow.

Bremerhaven & Leipzig 1914.

LÁSKA, W., Einleitung in die geometrische Funktionentheorie. 2. Aufl. — 87 pp. 8. M. 2: — geh.; M. 2: 50 geb.

Die Grundlagen. Komplexe Differentiale u. Integrale. Anh.: Harmon. Funkt.

LÁSKA, W., Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie. 2. T.: Praktische u. theoretische Astronomie nebst der mathematischen Geographie. Für das Selbststudium u. z. Gebrauche an Lehranstalten. — VIII + 164 pp. 8. M. 5: — geh.; M. 6: — geb.

Astronom. Messungen. Die geographischen Ortsbestimmungen. Die Bahnbestimmung. Die astronom. Phänomenologie. Die Kartographie. Die Geometrie d. Erdgestalt. Tafeln.

Friedr. Vieweg & Sohn.

Braunschweig 1913—1914.

BERLINER, H., Involutionssysteme in der Ebene des Dreiecks. — XII + 212 pp. 8. M. 8: — geh.

Vorw. Verzeichn. d. Konstruktionsaufgaben. Einleit. — Vom Dreieck erzeugte Involutionen. Der Prozess d. Repräzentantenbild. Üb. eine neue, spezielle Erzeugungsart d. Kurven dritt. Ordnung m. isoliert. Doppelpunkt bezw. dritt. Klasse m. isoliert. Doppeltangente.

BAUER, WILHELM, und HANXLEDEN, ERICH v., Lehrbuch der Mathematik für Realanstalten.

1. Unterstufe der Planimetrie nebst Stereometrie u. Trigonometrie. Mit 336 Fig. — VIII + 252 pp. 8.

Einführ. in d. Planimetrie. Kreis u. Winkel. Seit. u. Winkel eines Dreiecks. Symmetrie. Kongruenz. Geom. Örter u. Konstruktionen. Das Viereck. Der Kreis. Flächengleichheit geradlin. Fig. Flächenberechn. geradlin. Fig. Die regelmäss. Vielecke, sowie d. Umfang u. d. Flächeninhalt d. Kreises. Proportionalität. Ähnl. Fig. Massbeziehungen. Anw. d. Algebra auf d. Geometrie. — Anleit. z. Perspekt. Zeichnen. Geraden u. Ebenen im Raum. Prisma u. Zylinder. Pyramide u. Kegel. Die Kugel. — Die trigon. Funkt. Die Berechn. rechtwinkl. u. gleichschenkl. Dreiecke. Die trig. Funkt. belieb. Winkel. Die Berechnung schiefwinkl. Dreiecke.

2. Oberstufe der Geometrie. Mit 187 Fig. — X + 286 pp. 8.

Die Transversalen eines Dreiecks. Harmon. Punkte u. harm. Strahlen. Die Potenzlin. Ähnlichkeitspunkte u. Ähnlichkeitsachseln. Pol u. Polare. — Goniometrie. Drei-

ecksaufgab. Schwierigere Vierecksaufgab. — Geraden u. Ebenen im Raum. Neigungswinkel. Prisma u. Zylinder, Pyramide u. Kegel. Die Kugel. Die Vielflache. — Die Ecke. Sphär. Trigonometrie. Aufgab. aus d. math. Geographie. Aufgab. aus d. Astronomie. — Analyt. Geom. d. Ebene: Punkt u. Gerade. Der Kreis. Die Parabel. Die Ellipse. Die Hyperbel. Pol. u. Polare. Strahlenbüchsel u. Potenzlinie. — Transformat. d. Koordinatensystems; Polarkoordinaten. Geom. Örter. Diskuss. d. allgem. Gleichung 2. Grades.

3. Unterstufe d. Arithmetik. Mit 48 Fig. — X + 271 pp. 8.

Best. u. allgem. Zahlen. Zahlenausdrücke. Auswert. v. Buchstabenausdrücken. Einführ. in d. Arithmetik. Multiplikat. Division. Eingekleid. Gleich. Verhältnisse u. Proport. Gleich. erst. Grades m. mehr. Unbek. Graphische Darstellung. Graph. Lösung d. Gleich. 1. Grades. Die Lehre v. d. Potenzen. Die Lehre v. d. Wurzeln. Quadrat. Gleich. Die Lehre v. d. Logarithmen.

4. Oberstufe der Arithmetik. Mit 29 Fig. — VIII + 208 pp. 8.

Gleich. höh. Grades, die sich auf quadrat. zurückführen lassen. Exponentialgleich. Gleich. 2. Grades mit zwei Unbek. Eingekleid. Gleich. Graph. Auflös. d. quadrat. Gleich. mit zwei Unbek. Die Reihen. Zinseszins- u. Rentenrechn. Versicherungsmath. Imag. u. komplexe Zahlen. Kombinatorik u. Wahrscheinlichkeitsrechn. Anw. d. Kombinatorik. Gleich. 3. Grades. Max. u. Minima. Ganze rat. Funkt. Num. Gleich. Unendl. Reihen. Wiederhol. Aufbau d. arithmet. Lehrganges.

5. Differential- und Integralrechnung nebst den Grundzügen d. synthetischen u. darstellenden Geometrie. Mit 173 Fig. — X + 216 pp. 8.

Stetigkeit u. Grenzwerte v. Funkt. Begriff d. Differentialquotienten. Die Differentialformeln. Differenzierung alg. Funkt. Differenzierung d. transzend. Funkt. Differentialquot. höh. Ordn. Anw. d. Differentialrechn. Die unendl. Reihen. Berechn. unbest. Ausdrücke. Anw. d. Differentialrechn. auf d. Mechanik. Anw. d. Diff.-rechn. auf d. analyt. Geometrie. — Der Integralbegriff. Die Integrationsformeln. Berechn. v. Integralen durch Substitution u. part. Integration. Integrat. d. alg. rat. Funkt. Integrat. v. irrat. u. transzend. Funkt. Best. Integrale. Anw. d. best. Integrals auf d. Berechn. v. Flächen u. Bogen. Anw. d. best. Integrals auf d. Berechn. d. Inhaltes u. d. Oberfläche v. Umdrehungskörpern. Anw. d. Integralrechn. auf d. Physik. Anw. d. Integralrechn. auf besond. Probleme d. Mechanik. — Die Kegelschnitte als geom. Örter. Der Kegelschnitt als Bild eines Kreises. Der Kegelschnitt als Schnittkurve eines Kreiskegels. — Punkt, Gerade, Ebene in Normalprojekt. Einf. Körper in Normalprojekt. Ebene Schnitte durch Körper.

Runge, C., Erläuterung des Rechnungsformulars zur Zerlegung einer empirisch gegebenen periodischen Funktion in Sinuswellen. — 13 pp. 8.

Schachenmeier, Richard, Zur mathematischen Theorie der Beugung an Schirmen von beliebiger Form. — 91 pp. 8.

Einleit. Lösung d. Problems in den Hauptzügen. Mathemat. Hilfsmittel u. Ergänzungen zum I. Teil.

VALENTINER, SIEGFRIED, Die Grundlagen der Quantentheorie in elementarer Darstellung. Mit 8 Fig. (Samml. Vieweg. Tagesfragen aus d. Gebieten d. Naturwissenschaften u. d. Technik. 15.) — 67 pp. 8. M. 2: 60.

Historisches. Der Weg zum Planck'schen Strahlungsgesetz. Prüfung d. Gesetzes an d. Erfahrung. Energieaustausch zwischen Oszillatoren u. Hohlraumstrahlung. Die Hypothese v. Wirkungsquantum bei nicht period. Vorgängen.

VALENTINER, SIEGFRIED, Anwendungen der Quantenhypothese in der kinetischen Theorie der festen Körper u. der Gase. (Samml. Vieweg. Tagesfragen aus d. Gebieten d. Naturwissenschaften u. d. Technik. 16.) Mit 4 Fig. — 72 pp. 8. M. 2: 60.

Einleit. Die Atomwärme fester Körper. Zusammenstellung d. Formeln f. d. Atomwärmen u. ihrer Gültigkeitsgrenzen. Zustandsgleichung d. festen Körpers. Die Energiequantenhypothese in d. kinet. Theorie d. Gase.

WITTE, HANS, Raum und Zeit im Lichte der neueren Physik. Eine allgemeinverständliche Entwicklung des raumzeitlichen Relativitätsgedanken bis zum Relativitätsprinzip. Mit 17 Fig. (Samml. Vieweg. Tagesfragen aus d. Gebieten d. Naturwissenschaften u. d. Technik. 17.) — 84 pp. 8. M. 2: 80.

Einleit. Vorläufiger Umriss. Absoluter Raum u. absolute Zeit I. Lagenrelativität. Absolut. Raum u. absolut. Zeit II. Das Relativitätsprinzip d. ält. Mechanik. Absolut. Raum u. absolut. Zeit III: Abs. Raum u. Weltäther. Erste Untersuchungsreihe üb. d. Äther. Zweite Untersuchungsreihe üb. d. Äther. Der Michelson-Versuch. Das neue Relativitätsprinzip: Grundleg. Prinz. d. konstanten Lichtgeschwindigkeit. Die Relativierungen v. d. erst. Ordnung. Die Relativierungen v. d. zweit. Ordn. Zusammenfassung. Folgerungen. Schluss.

Nicola Zanichelli.

Bologna 1915.

ENRIQUES, FEDERIGO, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. Pubbl. per cura de OSCAR CHISINI. Vol. 1. — XIV + 397 pp. 8.

Prefaz. — Le equazioni $f(x) = 0$ e i gruppi di punti sulla retta. Interpretazioni fondament. dell'equaz. $f(xy) = 0$: curve e corrispondenze. Nota sul significate dell'espress. »in generale» e sui computi di costanti. — Le involuzioni e i gruppi finiti di proiettività sulla retta. Teoria element. delle curve piane. Nota sulla funzioni algebr. e s. rappresentazioni reali dell'immaginario.

Divers.

Gifford, E., Natural Sines to every second of arc, and eight places of decimals. — 543 pp. 8. 15 sh. (Printed by Abel Heywood & Son, Manchester 1914. Sent post free on receipt of postal order by E. Gifford, Oaklands, Chard, Somerset, England.)

From 0° to 90° to 8 decimal places. The sines to 10″ cop. from the Opus Palatinum of Rheticus, publ. in 1596. The sines to 1″ interpol. by the Thomas calculat. machine from Rheticus' fig. for 10″, each being cop. to 10 places a. obvious mistakes corr. so that the differences run in descend. series. The table is arranged like Chambers' log tables.

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

41

BERLIN
MAYER & MULLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2

STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.
1918

PARIS
A. HERMANN ET FILS.
6 RUE DE LA SORBONNE.

UPPSALA 1918
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

REDACTION

INHALTSVERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 41. — 1918. — TOME 41.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEM MAXIMALBETRAGE EINER ANALYTISCHEN FUNKTION UND DEM GRÖSSTEN BETRAGE BEI GEGEBENEM ARGUMENTE DER FUNKTION.

VON

A. WIMAN

in UPPSALA.

Es sei die Bemerkung vorangeschickt, dass, wie wohl aus den folgenden Entwicklungen hervorgehen wird, die Klarlegung des obigen Zusammenhanges auch Licht sowohl über das Theorem des Herrn PICARD als auch über die Eigenschaften der Lösungen von Differentialgleichungen in der Umgebung von Unbestimmtheitspunkten zu werfen vermag.

§ 1.

Bezeichnet $A(r)$ das Maximum des reellen Teiles einer ganzen Funktion und $M(r)$ den Maximalbetrag, so hat Herr BOREL bewiesen,[1] dass die Ungleichung

$$(1) \qquad M(r) < [A(r)]^{1+\varepsilon},$$

wo ε eine beliebige positive Grösse bedeutet, für eine unendlich wachsende Folge von r-Werten erfüllt sein muss. In (1) lässt sich, wie ohne weiteres ersichtlich ist, $A(r)$ durch $B(r)$ ersetzen, wenn für das Minimum des reellen Teiles die Bezeichnung $-B(r)$ eingeführt wird. Als erste Aufgabe stellen wir uns hier zu zeigen, *dass nicht nur* (1) *eine weit umfassendere Gültigkeit als bloss für ganze Funktionen besitzt, sondern auch insbesondere, dass dasselbe sogar für die äusserst präzise Ungleichung*

[1] Man sehe BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières,* Acta Math. XX (1897), S. 368. Die Frage ist späterhin von anderen Verfassern aufgenommen worden. Man vergleiche etwa VALIRON, *Sur quelques théorèmes de M. Borel,* Bull. de la Soc. Math. de France, XLII (1914), S. 247.

(I) $$M(r) < A(r)(1+\varepsilon)$$

behauptet werden kann.

Der Beweis von (1) wurde zunächst durch Benutzung einer von Herrn Hadamard gegebenen Relation zwischen $A(r)$ und dem Betrage $m(r)$ des grössten Gliedes der Taylor'schen Entwicklung erbracht. Behufs der oben besprochenen Gültigkeitserweiterung wollen wir uns einer ähnlichen Relation bedienen, welche freilich in gewissen Fällen etwas weniger scharf ist, aber den Vorteil gewährt, dass durch dieselbe auch Schlüsse über die Stellen auf dem Kreise $|z| = r$ gezogen werden können, für welche die Ungleichung (1) besteht.

Die Entwickelung

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

möge entweder eine ganze Funktion oder eine Funktion mit dem Konvergenzradius 1 bezeichnen, auf welchen letzteren Fall ja die Taylor'schen Reihen mit endlichem Konvergenzradius reduziert werden können. Es sei für einen gewissen Wert $|z| = r$ $c_n z^n$ das grösste Glied von $F(z)$. Schreibt man $c_n = |c_n| e^{i\gamma_n}$ und $z = re^{i\varphi}$, so nimmt dieses Gleied *einen positiven reellen Wert* an, falls

$$\gamma_n + n\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

ist, d. h. für die n Argumente

(2) $$\varphi = -\frac{\gamma_n}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots n-1).$$

Ebenso ersieht man, dass für die n zwischenliegenden Argumente

(2_1) $$\varphi = -\frac{\gamma_n}{n} + \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

das grösste Glied *einen negativen reellen Wert* bekommt. Bezeichnen etwa $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ irgend welche auf dem Kreise $|z| = r$ in dieser Weise äquidistante Stellen, so hat man offenbar den Mittelwertsatz

$$\frac{F(z_0) + F(z_1) + \cdots + F(z_{n-1})}{n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} z^{n\nu}.$$

Hieraus folgt, dass die Relation

$$A(r) \geq m(r) - |c_0| - \sum_{\nu=2}^{\infty} |c_{n\nu}| r^{n\nu} \tag{3}$$

für mindestens eines von den n Argumenten (2) gelten muss, und ebenso, dass sich ein Gleiches für $B(r)$ bezüglich der Argumente (2_1) aussagen lässt. Für den Fall einer nicht ganzen Funktion $F(z)$ haben wir in einer früheren Arbeit,[1] deren Ergebnisse hier überhaupt eine grundlegende Bedeutung haben, bewiesen, dass, falls $F(z)$ auf dem Konvergenzkreise nach der Bezeichnung des Herrn Hadamard die Ordnung ∞ besitzt, d. h. falls

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log |c_n|}{\log n} = \infty, \tag{4}$$

zwischen dem Betrage des grössten Gliedes und dem Maximalbetrage die Ungleichung

$$M(r) < [m(r)]^{1+\varepsilon} \tag{5}$$

für eine unendliche Folge $r = r_1, r_2, \cdots r_n, \cdots$ mit $\lim_{n=\infty} r_n = 1$ besteht, wobei auch in entsprechender Weise der Index des grössten Gliedes ins Unendliche steigen muss. Da man nun auch, wie wir jetzt nachweisen wollen,

$$A(r) > m(r)(1 - \varepsilon) \tag{6}$$

annehmen darf, so ergibt sich durch Kombination von (5) und (6) die zu beweisende Ungleichung (1).

Um den fraglichen Beweis zu erbringen, benutzen wir die Resultate von § 5 in unserer soeben zitierten Arbeit, indem wir $F(z)$ mit einer Funktion

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$$

vergleichen. Da wir

$$\lim_{n=\infty} \frac{|c_n|}{n^k} = \infty$$

haben, so muss es beliebig grosse Indices n geben, dass, wenn für $r = r_n$ bez. $r = \varrho_n$ das Glied $c_n z^n$ bez. $n^k z^n$ in $F(z)$ bez. $\Phi(z)$ den grössten Betrag hat, man stets

[1] *Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylor'schen Reihe*, Acta Math. XXXVII (1914), S. 326.

$$\frac{|c_n| r_n^n}{|c_{n+h}| r_n^{n+h}} \geq \frac{n^k \varrho_n^n}{n^{k+h} \varrho_n^{n+h}} \qquad (h = 1, 2, 3, \cdots)$$

erhält; freilich kann dabei r_n nicht ganz beliebig in dem zugehörigen Intervalle gewählt werden. Nun lässt sich ϱ_n bestimmen, indem wir $n^k r^n$ in Bezug auf n derivieren, wodurch wir

$$\varrho_n = e^{-\frac{k}{n}}$$

erhalten. Mit Rücksicht auf eine Entwickelung, deren Glieder bez. dieselben absoluten Beträge wie $\Phi(z)$ besitzen, wird jetzt (3) durch

$$(3_1) \qquad A(\varrho_n) \geq n^k \varrho_n^n - 1 - \sum_{\nu=2}^{\infty} (n\nu)^k \varrho_n^{n\nu} = \left(\frac{n}{e}\right)^k \left[1 - e^k \sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{\nu}{e^\nu}\right)^k\right] - 1$$

ersetzt. Man hat aber, wie leicht ersichtlich,

$$e^k \sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{\nu}{e^\nu}\right)^k < \left(\frac{2}{e}\right)^k \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{2e}\right)^k},$$

und letztere Grösse wird offenbar beliebig klein, falls k genügend gross gewählt wird. Durch eine solche Wahl von k kann man also es immer bewirken, dass, wie klein auch die positive Grösse ε genommen wird, man

$$A(\varrho_n) > m(\varrho_n)(1 - \varepsilon)$$

erhält. Hiermit ist aber auch unsere Behauptung bezüglich der Ungleichung (6) erwiesen, woraus dann der in diesem § zu beweisende Satz folgt, d. h. *es ist die Gültigkeit von* (1) *auf Funktionen mit endlichem Konvergenzradius erstreckt, wenn die Ordnung der bez. Funktion auf dem Konvergenzkreise* ∞ *ist.*

Wir glauben doch hiermit nicht die äusserste Grenze erhalten zu haben, für welche (1) allgemein gilt. Es wäre z. B. denkbar, dass die der obigen Erweiterung zu Grunde liegende Bedingung

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |c_n|}{\log n} = \infty$$

sich durch

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |c_n|}{\log n} > 0$$

ersetzen liesse.

Es ist weiter unbefriedigend, dass wir zwar nachgewiesen haben, dass (1) für mindestens ein Argument (2) und, wenn $B(r)$ für $A(r)$ eintritt, ebenfalls für ein oder mehrere Argumente (2_1) gilt, aber wir sind zu keiner Entscheidung darüber gekommen, inwieweit es immer derartige Argumente geben muss, welche benachbart auftreten, wofür ja freilich alle Wahrscheinlichkeit spricht. Für die Anwendungen wäre aber ein solcher Satz über die Verteilung der fraglichen Argumente äusserst wichtig. Hierüber wollen wir auch in einem folgenden § nach einer anderen Methode Aufschluss geben.

§ 2.

Über die Grössenordnung von ganzen transzendenten Funktionen mit positiven Koeffizienten hat man von mehreren Verfassern Untersuchungen,[1] welche dahinzielen, dass, wenn n den Index des grössten Gliedes bedeutet, unter sehr ausgedehnten Voraussetzungen man für dieselbe eine Genauigkeit erhält, bei welcher nur von einem gegen 1 konvergierenden Faktor abgesehen wird, indem man bloss eine Gruppe von Gliedern zu berücksichtigen braucht, deren Anzahl in einem für $\lim n = \infty$ beliebig kleines Verhältnis zu n steht. Es wäre gewiss keine grössere Schwierigkeit zu überwinden, um Resultate dieser Art auch auf nicht ganze Funktionen mit der Ordnung ∞ auf dem Konvergenzkreise auszudehnen. Wollte man den Satz nicht durchweg für $\lim n = \infty$ aufstellen, sondern nur für eine unendliche Folge von Indices, so hätte man sogar den Beweis ganz allgemein sowohl für ganze tranzendente Funktionen als auch für Funktionen mit endlichem Konvergenzradius von der bezeichneten Art unter der einzigen Voraussetzung führen können, dass die Koeffizienten positiv oder Null sein sollen. Es erscheint uns nicht unwahrscheinlich, dass der Satz, bei welcher es ja sich um das Verhältnis der Funktion an der Stelle handelt, wo dieselbe den Maximalbetrag hat, ebenso allgemein bei komplexen Koeffizienten gilt. Da es aber auf sehr erhebliche Schwierigkeiten zu stossen scheint, um die für den Beweis des letzteren Satzes nötige Abschätzung von Summen komplexer Glieder auszuführen, so wollen wir auch hier auf den Beweis für den Spezialfall von positiven Koeffizienten verzichten.

Die Sachlage ist nun auch wiederholt von Herrn Borel dahin charakterisiert worden, dass für die Grössenordnung der Funktion dem grössten Gliede eine durchaus entscheidende Bedeutung zukommt, und in unserer schon zitier-

[1] Es genüge auf die bezügliche zuletzt erschienene uns bekannte Arbeit zu verweisen, welche wohl auch die grösste Präzision erzielt hat, nämlich Valiron, *Sur le calcul approché de certaines fonctions entières,* Bull. de la Soc. Math. de France, XLII (1914), S. 252.

ten Arbeit glauben wir die Hauptfragen über das Verhältnis zwischen dem Maximalbetrage und dem Betrage des grössten Gliedes klargelegt zu haben. Von diesen Resultaten wollen wir jetzt eine Anwendung machen, indem wir auseinandersetzen, wie an solchen Stellen, wo der Betrag der Funktion dem Betrage $m(r)$ des grössten Gliedes mindestens gleich ist, was ja für den Maximalbetrag $M(r)$ der Fall ist, man eine Anzahl zentraler Glieder herausnehmen kann, so dass die nach beiden Richtungen nicht mitgenommenen Gleider keinen wesentlichen Einfluss über die Eigenschaften der Funktion besitzen. Zunächst soll dies betreffend den Betrag der Funktion gelten. Dabei nehmen wir bei der Abschätzung der nicht zentralen Glieder die absoluten Beträge einer Majorantfunktion und bestimmen die nötigen Voraussetzungen, damit diese Summe $< \varepsilon\, m(r)$ sei. Es ist dann $(1 - \varepsilon)\, m(r)$ eine untere Grenze für den Betrag des Inbegriffes der zentralen Glieder. Eine solche Methode ist freilich nichts weniger als vollkommen. Wenn es aber im nächsten Paragraphen gilt, nochw eiter gehende Schlüsse über die Eigenschaften der Funktion zu ziehen, so werden wir auf neue Schwierigkeiten stossen, welche noch mehr den Funktionenbereich umgrenzen, für welchen es uns gelungen ist, den Beweis durchzuführen. Doch ist zu bemerken, dass für die ganzen Funktionen die hier besprochenen Probleme ganz leicht erledigt werden, und dieser Fall ist ja als der überaus wichtigste zu betrachten.

Zunächst nehmen wir an, dass eine Vergleichsfunktion

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$$

existiert, für welche man

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_{n-1}} = 1 + n^{-\alpha} \qquad (1 < \alpha < 2)$$

wählen kann, wo, wie in unserer vorigen Arbeit ausgeführt wird, für $|z| = \varrho_n$ $\gamma_n z^n$ das Glied vom grössten Betrage liefert. Nach S. 320 ebenda ersieht man ohne Schwierigkeit, dass es, wenn n hinreichend gross ist, für $\lim \varrho_n = 1$ erlaubt ist

$$|\gamma_n| < e^{n^{2-\alpha+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0)$$

zu setzen. Man erhält weiter beim Vergleich mit S. 312 unserer zitierten Arbeit

$$(7) \qquad \frac{|\gamma_{n-\nu-1}|\, \varrho_n^{n-\nu-1}}{|\gamma_n|\, \varrho_n^n} \leqq \prod_{\varkappa=0}^{\nu} [1 + (n - \varkappa)^{-\alpha}]^{-(\nu-\varkappa)},$$

sowie

$$(7_1) \qquad \frac{|\gamma_{n+\nu+1}|\varrho_n^{n+\nu+1}}{|\gamma_n|\varrho_n^n} < \prod_{\varkappa=0}^{\nu}(1+(n+\varkappa+1)^{-\alpha})^{-(\nu-\varkappa)}$$

$$< (1+(n+\nu+1)^{-\alpha})^{-\frac{\nu(\nu+1)}{2}} < e^{-\frac{\nu^2}{2(n+\nu)^\alpha}(1-\delta)},$$

wo für δ, wenn n (und ν) genügend gross gewählt wird, eine beliebig kleine positive Grösse gesetzt werden kann. Will man jetzt für $|z| = \varrho_n$ den Betrag der Summe der nicht zentralen Glieder, also derjenigen, deren Indices enweder $> n + \nu$ oder $< n - \nu$ sind, mit $m(\varrho_n)$ vergleichen, so wird offenbar das Verhältnis

$$< 2\sum_{r}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2}{2(n+\nu)^\alpha}(1-\delta)}$$

oder mit Bezug darauf, dass man δ immer kleiner nehmen kann,

$$(8) \qquad < 2\int_{r}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2(n+x)^\alpha}(1-\delta)}\,dx.$$

Behufs der Abschätzung des Integrals (8) zerlegen wir dasselbe in zwei Teilintegrale. Eine partielle Integration ergibt zunächst

$$(9) \qquad \int_{n}^{\infty} e^{-\frac{1-\delta}{2}\frac{x^2}{(n+x)^\alpha}}\,dx < \int_{n}^{\infty} e^{-\frac{1-\delta}{2^{1+\alpha}}x^{2-\alpha}}\,dx$$

$$< \frac{(1+\eta)\,2^{1+\alpha}\,n^{\alpha-1}}{(2-\alpha)(1-\delta)}\,e^{-\frac{(1-\delta)n^{2-\alpha}}{2^{1+\alpha}}} \qquad (\eta > 0).$$

Andererseits ist ersichtlich:

$$(9_1) \qquad \int_{r}^{n} e^{-(1-\delta)\frac{x^2}{(n+x)^\alpha}}\,dx < \int_{r}^{\infty} e^{-\frac{1-\delta}{2^\alpha n^\alpha}x^2}\,dx < \frac{2^{\alpha-1}n^\alpha}{(1-\delta)r}\,e^{-\frac{(1-\delta)r^2}{2^\alpha n^\alpha}}.$$

Es muss r so genommen werden, dass auch in (9_1), was für (9) von selbst erfüllt wird, sich für $\lim n = \infty$ eine beliebig kleine Grösse ergibt. Am einfachsten geschieht dies, indem wir $r = n^{\beta/2}\,(2 > \beta > \alpha)$ setzen. Das Verhältnis des von den nicht zentralen Gliedern herrührende Betrages zu $m(r)$ wird dann

$$(10) \qquad < e^{-n^{\beta-\alpha-\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Nach dem allgemeinen Prinzipe, welches im letzten Paragraphen unserer mehrmals zitierten Abhandlung begründet wird, können wir jetzt den Satz aufstellen:

Es bezeichne

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

entweder eine ganze transzendente Funktion oder eine Funktion mit dem Konvergenzradius 1 *unter der Bedingung*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log |c_n|}{n^{\eta}} > 0 \qquad (\eta > 0). \tag{11}$$

Es sei ε *eine beliebig kleine positive Grösse und* $0 < \eta_1 < \eta$. *Die zentralen Glieder sollen in*

$$\sum c_\nu z^\nu \qquad \left(n - n^{1-\frac{\eta_1}{2}} < \nu < n + n^{1-\frac{\eta_1}{2}}\right) \tag{12}$$

enthalten sein, wenn n *den Index des grössten Gliedes bedeutet. Es gibt dann immer eine unendliche Folge von Indices* n, *für welche man als Verhältnis des von den nicht zentralen Gliedern herrührenden Betrages zu* $m(r)$ *eine Grösse erhalten kann, welche*

$$< e^{-n^{\eta-\eta_1-\varepsilon}} \tag{13}$$

ist. Für ganze transzendente Fuktionen kann man insbesondere bei beliebigem $\delta > 0$ $\eta = 1 - \delta$ *in* (13) *nehmen. Es ist dann möglich in* (12) *der Bedingung für* ν *die genauere Gestalt*

$$n - n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} < \nu < n + n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{14}$$

zu geben.

Durch die Bedingung (11) werden ja keineswegs sämtliche Funktionen mit der Ordnung ∞ auf dem Konvergenzkreise erschöpft. Mit den uns hier zur Verfügung stehenden Mitteln sehen wir übrigens keine Möglichkeit, den obigen Satz, auch bei etwaiger Modifikation desselben, auf sämtliche der in Rede stehenden Funktionen zu erweitern. Etwas weiter können wir doch die Frage führen, indem wir eine Vergleichsfunktion $\Phi(z)$ heranziehen, für welche z. B.

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_{n-1}} = 1 + \frac{(\log n)^{\lambda+1}}{n^2} \qquad (\lambda > 0)$$

gesetzt werden kann. Die Sache wird dann auf die Abschätzung des Integrals

$$(8) \qquad \int\limits_r^\infty e^{-\frac{x^2}{2(n+x)^2}[\log(n+x)]^{\varkappa+1}}\,dx.$$

zurückgeführt. Man hat offenbar

$$(\bar{9}) \qquad \int\limits_n^\infty e^{-\frac{x^2}{2(n+x)^2}[\log n+x)]^{\varkappa+1}}\,dx < \int\limits_n^\infty e^{-\frac{1}{8}[\log(n+x)]^{\varkappa+1}}\,dx < \int\limits_n^\infty (n+x)^{-\frac{1}{8}(\log n)^\varkappa}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{8}(\log n)^\varkappa - 1}(2n)^{-\frac{1}{8}(\log n)^\varkappa+1}.$$

Andererseits ist für $r = \delta n$

$$(\bar{9}_1) \qquad \int\limits_{\delta n}^n e^{-\frac{x^2}{2(n+x)^2}[\log(n+x)]^{\varkappa+1}}\,dx < \int\limits_{\delta n}^\infty e^{-\frac{x^2}{8n^2}(\log n)^{\varkappa+1}}\,dx = \frac{2n\sqrt{2}}{(\log n)^{\frac{\varkappa+1}{2}}}\int\limits_{\frac{\delta}{2\sqrt{2}}(\log n)^{\frac{\varkappa+1}{2}}}^\infty e^{-y^2}\,dy <$$

$$< \frac{4n}{\delta(\log n)^{\varkappa+1}}e^{-\frac{\delta^2}{8}(\log n)^{\varkappa+1}} = \frac{4}{\delta(\log n)^{\varkappa+1}}n^{-\frac{\delta^2}{8}(\log n)^{\varkappa}+1}.$$

Für die Vergleichsfunktion lässt sich demnach behaupten, dass, wie klein auch $\delta > 0$ gegeben wird, das Verhältnis des von den nicht zentralen Gliedern herrührenden Betrages zu $m(r)$, wenn n genügend gross ist,

$$(\overline{10}) \qquad < n^{-(\log n)^{\varkappa-\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0)$$

wird.

Man erschliesst ohne Schwierigkeit (wobei man etwa ähnliche Relationen wie (56) und (57) unserer zitierten Arbeit heranziehen kann), dass die Funktionen $F(z)$, für welche sich mit Hilfe der zuletzt betrachteten Vergleichsfunktion ein ähnlicher Satz wie der früher in diesem Paragraphen hergeleitete Hauptsatz aufstellen lässt, durch die Eigenschaft

$$(\overline{11}) \qquad \overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log|c_n|}{(\log n)^{2+\eta}} > 0 \qquad (\eta > 0)$$

charakterisiert werden. Funktionen mit unendlicher Ordnung auf dem Konvergenzkreise erhält man aber jedenfalls noch, falls in $(\overline{11})$ der Exponent $2+\eta$ auf $1+\eta$ erniedrigt wird.

§ 3.

Es besteht, wie leicht ersichtlich, die Identität

$$F\left(z e^{\frac{i\lambda\pi}{n}}\right) = e^{i\lambda\pi}\left[F(z) + \sum_{\nu=-n}^{\infty}\left(e^{\frac{\lambda i\pi\nu}{n}} - 1\right) c_{n+\nu} z^{n+\nu}\right]. \tag{15}$$

Bei den Anwendungen, welche wir hiervon machen wollen, ist es vorteilhaft, für n den Index des grössten Gliedes zu nehmen. Eine wichtige Frage gilt insbesondere das Verhältnis des Betrages von

$$F(z, \lambda) = \sum_{\nu=-n}^{\infty}\left(e^{\frac{\lambda i\pi\nu}{n}} - 1\right) c_{n+\nu} z^{n+\nu} \tag{16}$$

zu $|F(z)|$, wenn die reelle Grösse λ unter gewissen Schranken bleibt. Ist nämlich dieses Verhältnis sehr klein, so bleibt ja der Betrag von $F(z)$ fast unverändert, das Argument wächst aber mit einer Grösse, welche sehr wenig von λ verschieden ist, d. h. *das grösste Glied hat einen bestimmenden Einfluss über die Änderungen des Argumentes der Funktion.*

Ist $F(z)$ eine Funktion mit *positiven* Koeffizienten, für welche die Bedingung ($\overline{11}$) zutrifft, und wird z positiv genommen, so ersieht man aus den Erörterungen des vorigen Paragraphen, dass solche Fälle für beliebig grosse n eintreten, da ja für diejenigen Glieder, welche einen bestimmenden Einfluss auf den Betrag der Funktion haben, der Faktor $\left(e^{\frac{\lambda i\pi\nu}{n}} - 1\right)$ sehr klein wird. Wie wir bereits angedeutet haben, lässt sich dieselbe Eigenschaft für sämtliche Funktionen mit positiven Koeffizienten überhaupt bestätigen, zu denen die Ordnung ∞ auf dem Konvergenzkreise gehört. Die Vermutung liegt dann nahe, dass es sich in ähnlicher Weise auch bei nicht positiven Koeffizienten in der Umgebung der Stellen, wo der Maximalbetrag erreicht wird, verhält, obwohl ein allgemeiner Beweis hierfür mit grossen Schwierigkeiten verbunden sein dürfte. Für Funktionen mit endlicher Ordnung auf dem Konvergenzkreise ersieht man dagegen schon aus dem Beispiel $F(z) = (1 - z)^{-k}$, dass ein ähnlicher Satz von vollständiger Schärfe nicht existiert. Der Maximalbetrag der Funktion ist ja $(1 - r)^{-k}$; wenn das Argument der Funktion um eine Grösse $\pm\pi$ geändert wird, bekommt der Betrag einen Faktor, der $< \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^k$ ist und also nicht für $\lim r = 1$ beliebig nahe an 1 heranrückt, wobei selbstverständlich $k > 1$ vorausgesetzt wird.

Wir machen jetzt noch die weitere Zerlegung

$$F(z, \lambda) = \lambda\pi i \sum_{\nu=-n}^{\infty}\frac{\nu}{n} c_{n+\nu} z^{n+\nu} + \sum_{\nu=-n}^{\infty}\left(e^{\frac{\lambda i\pi\nu}{n}} - 1 - \frac{\lambda i\pi\nu}{n}\right) c_{n+\nu} z^{n+\nu}. \tag{17}$$

Für den absoluten Betrag der letzteren Summe bekommt man eine obere Grenze, indem man jedes Glied durch seinen Betrag ersetzt und dann auf

$$\left| e^{\frac{\lambda i \pi \nu}{n}} - 1 - \frac{\lambda i \pi \nu}{n} \right| \leqq \lambda^2 \pi^2 \frac{\nu^2}{2 n^2}$$

Rücksicht nimmt. Es wird sich dann um die Summe

(18) $$\sum \frac{\nu^2}{n^2} |c_{n+\nu}| r^{n+\nu}$$

handeln, und wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen das Verhältnis dieser Summe zu $m(r)$ für $\lim n = \infty$ verschwindend klein wird. Zu dem Ende ist es nötig, die Voraussetzung zu machen, entweder sei $F(z)$ eine ganze Funktion oder es gelte anderenfalls die Ungleichung (11). Dann ist es möglich, eine Vergleichsfunktion solcher Art zu wählen, dass wir behufs der Abschätzung des in Rede stehenden Verhältnisses eine Relation (7) zu Hülfe nehmen dürfen. Man ersieht ja hieraus, dass für beliebig grosse n die obere Grenze des fraglichen Verhältnisses von keiner höheren Grössenordnung als das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{n^2} e^{-\frac{x^2}{2(n+x)^{\alpha}}} dx$$

wird, wo α irgend eine Zahl zwischen 1 und 2 bedeutet. Der Hauptteil dieses Integrales fällt offenbar zwischen den Grenzen 0 und n, und wir können eben darum dasselbe durch

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{n^2} e^{-\frac{x^2}{8n^{\alpha}}} dx$$

ersetzen. Letzteres Integral lässt sich aber durch die Substitution $x = 2\sqrt{2}\, n^{\alpha/2} y$ in

(19) $$16 \sqrt{2}\, n^{\frac{3\alpha}{2} - 2} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = 4 \sqrt{2\pi}\, n^{\frac{3\alpha}{2} - 2}$$

transformieren. In den Fällen, wo man hier $\alpha < \frac{4}{3}$ setzten darf, was nach unserer mehrmals zitierten Arbeit jedenfalls für

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log |c_n|}{n^{2+\varepsilon}} > 0 \qquad (\varepsilon > 0)$$

erlaubt ist, bekommen wir mithin in (19) für $\lim n = \infty$ eine verschwindend kleine Grösse.

Es wäre zwar möglich, dieses Resultat für nicht ganze Funktionen erheblich zu verbessern. Da es aber mit unseren Mitteln in den folgenden Entwickelungen an erschöpfende Resultate für nicht ganze Funktionen gar nicht zu denken ist, so wollen wir uns fortan der Kürze halber auf *ganze Funktionen* beschränken. Wir können dann in (19) $\alpha = 1 + \delta$ nehmen, wo δ nur der Bedingung $0 < \delta < \frac{1}{3}$ unterliegt. Die in (17) auftretende Restsumme von $F(z, \lambda)$ wird dann höchstens von der Grössenordnung

$$\lambda^2 m(r)\, n^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\delta}.$$

Damit dieselbe von niedrigerer Grössenordnung als $m(r)$ sei, braucht für λ nur die Schranke

$$|\lambda| < n^{\frac{1}{4} - \delta}$$

gesetzt zu werden. Es darf sonach $|\lambda|$ mit n unbegrenzt wachsen, doch wird dabei der Winkel $\frac{\lambda\pi}{n}$ unendlich klein. Wollte man andererseits für $|\lambda|$ eine endliche obere Grenze feststellen, so könnte bei den folgenden Auseinandersetzungen $|F(z)|$ von niedrigerer Grössenordnung als $m(r)$, wie z. B. $n^{-\frac{1}{2} + 2\delta}$, angenommen werden.

Wir schreiben jetzt

$$F(z) = R\, e^{i\Phi},$$

$$\sum_{\nu=-n}^{\nu=n} \frac{\nu}{n}\, c_{n+\nu}\, z^{n+\nu} = F_1(z) = R_1 e^{i\Phi_1}.$$

Die Anfangsstelle z sei so gewählt, dass R ein Maximum von $|F(z)|$ auf dem Kreise $|z| = r$ darstellt. Dagegen braucht R nicht notwendig mit dem Maximalbetrage $M(r)$ identisch zu sein, sondern wir begnügen uns damit, $R \geq m(r)$ vorauszusetzen. Wir suchen den Betrag von

$$(20) \qquad R\, e^{\Phi i} + i \lambda R_1 e^{\Phi_1 i}$$

und finden hierfür

$$(21) \qquad \sqrt{R^2 + \lambda^2 R_1^2 + 2 \lambda R R_1 \sin(\Phi - \Phi_1)}.$$

Die Entwickelung des Quadrates von $\left|F\left(z e^{\frac{\lambda i \pi}{n}}\right)\right|$ fängt nun offenbar mit den Gliedern

$$R^2 + 2\lambda R R_1 \sin(\Phi - \Phi_1)$$

an. Da diese Grösse ein Maximum für $\lambda = 0$ haben soll, so muss

$$\sin(\Phi - \Phi_1) = 0$$

sein. Es lässt sich also (21) durch den einfacheren Ausdruck

$$(21_1) \qquad \sqrt{R^2 + \lambda^2 R_1^2}$$

ersetzen. Dass in (21_1) ein Minimum statt ein Maximum für $\lambda = 0$ auftritt, soll nun durch das Hinzutreten der weggelassenen Glieder von $F\left(z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}\right)$ aufgehoben werden. Ist der aus den letzteren Gliedern herrührende Betrag

$$< \lambda^2 \eta R,$$

so wird

$$(22) \qquad \left|F\left(z e^{\frac{\lambda i \pi}{n}}\right)\right| > \sqrt{R^2 + \lambda^2 R_1^2} - \lambda^2 \eta R.$$

Als notwendige Bedingung für das Maximum bei $\lambda = 0$ erweist sicht demnach

$$(23) \qquad R_1 \leq \sqrt{2\eta}\, R.$$

Die obigen Erörterungen haben klargelegt, wie für eine unendliche Folge $r_1, r_2, \cdots r_n, \cdots$ η gegen Null $\left(\text{wie } n^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\delta}\right)$ konvergiert. Aus (23) ersieht man dann, dass für die in Rede stehende Folge auch $\frac{R_1}{R}$ gegen Null konvergiert, und zwar wie $n^{-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\delta}$.

Betrachtet man jetzt die Zerlegung (15) von $F\left(z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}\right)$ in zwei Faktoren, so ist für $|\lambda| \leq n^{\frac{1}{4}-\delta}$ ersichtlich, dass der Betrag sich nur um Faktoren ändern kann, die für $\lim n = \infty$ beliebig wenig von 1 verschieden sind. Die wesentliche Änderung des Argumentes rührt vom ersten Faktor rechts, also $e^{\lambda \pi i}$, her, da in dem zweiten Faktor das nicht von λ abhängige Glied $F(z)$ von höherer Grössenordnung als das Restglied ist. Die Funktion $F\left(z e^{\frac{\lambda i \pi}{n}}\right)$, wo hier λ als reelle Veränderliche unter den angegebenen Schranken bleibt, wird also *mit absoluten Beträgen, deren Verhältnisse zu einander beliebig wenig von 1 differieren, in regelmässiger Aufeinanderfolge alle möglichen Argumente annehmen, und zwar so, dass die*

Änderung des Argumentes der Funktion diejenige des grössten Gliedes begleitet. Bei dieser Änderung des Argumentes nimmt selbstverständlich die Funktion auch rein reelle oder rein imaginäre, positive oder negative, Werte an.

Der vorhergehende Satz gilt insbesondere bei einer Stelle z, wo der Maximalbetrag $M(r)$ erreicht wird. Das Verhältnis zwischen den Geschwindigkeiten, mit denen die Argumente der Funktion und des grössten Gliedes in der Umgebung einer solchen Stelle auf dem Kreise $|z| = r$ oszillieren, ist also für unendlich steigende r-Werte unendlich wenig von 1 verschieden. *Will man dem Argumente der Funktion die Beschränkung* $-\pi < \Phi \leq \pi$ *auferlegen, und bezeichnet* $A_\Phi(r)$ *den Maximalbetrag der Funktion für ein bestimmtes Argument* Φ, *so bekommt man als Verallgemeinerung von* (I)

$$A_\Phi(r) > M(r)(1 - \varepsilon). \tag{II}$$

Dieser Zusammenhang zwischen den Änderungen des Argumentes der Funktion und desjenigen ihres grössten Gliedes bietet vielleicht eine Erklärung der in unserer vorigen Arbeit hergeleiteten Formel

$$M(r) > m_n \frac{r^n}{r_1 r_2 \cdots r_n}$$

dar, wo $r_1, r_2, \cdots r_n, \cdots$ nicht wie in dem bekannten Theoreme des Herrn Jensen die Bedeutung der Beträge der Nullstellen haben, sondern, wie hier, als Beträge, bei denen je für die grössten Glieder übereinstimmende Indices auftreten, betrachtet werden können.

§ 4.

Aus den obigen Ergebnissen erhält man als erste Anwendung *eine bemerkenswerte Folgerung über die Eigenschaften der ganzen Funktionen von der speziellen Gestalt* $e^{F(z)}$. Bezeichnen $m_a(r)$ und $m_i(r)$ den Maximalbetrag bez. Minimalbetrag dieser Funktion, und schreibt man für $\Phi = 0, \pi$ $A_\Phi(r) = A(r), B(r)$, so hat man offenbar die Ungleichungen

$$\begin{gathered} e^{A(r)} \leq m_a(r) \leq e^{M(r)}, \\ e^{-B(r)} \geq m_i(r) \geq e^{-M(r)}. \end{gathered} \tag{24}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die durch (II) ausgedrückte allgemeine Eigenschaft

$$m_a(r)^{-(1-\varepsilon_1)} > m_i(r) > m_a(r)^{-(1+\varepsilon_1)} \tag{25}$$

für eine unendliche Folge von unendlich wachsenden r-Werten, wo ε_1 eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet. *In (25) liegt aber eine wesentliche Verschärfung eines berühmten Theoremes des Herrn* HADAMARD, *dessen Gültigkeit sich doch auf sämtliche ganze Funktionen erstreckt,* und welches in der Hauptsache seinen Ausdruck in der Ungleichung

$$(26) \qquad \log\frac{1}{m_i(r)} < [\log m_a(r)]^{1+\varepsilon_1}$$

findet.

Es dürfte auch Aufmerksamkeit verdienen, dass *die Bereiche, wo* $|e^{F(z)}|$ *von der Grössenordnung des Maximalbetrages bez. Minimalbetrages ist, offenbar alternieren, so dass, wenn das Argument um eine Grösse* $\frac{2\pi}{n}$ *zugenommen hat, wo* n *den Index des grössten Gliedes von* $F(z)$ *bezeichnet, man wieder aufs neue sich dem Maximalbetrage bez. Minimalbetrage nähert.* Eine solche Oszillation kann man übrigens leicht bei speziellen Funktionen, wie etwa e^{e^z}, näher studieren.

Aus verschiedenen Gründen haben wir die Überzeugung gewonnen, dass das obige Theorem des Herrn HADAMARD auch bei dem allgemeinen Fall der ganzen Funktionen einer Erweiterung fähig ist, so dass (26) durch

$$(26_1) \qquad m_i(r) > [m_a(r)]^{-(1+\varepsilon_1)}$$

ersetzt werden kann. Doch ist es uns bisher nicht gelungen, den Satz in dieser Allgemeinheit zu beweisen. Noch schwieriger dürfte es sein zu entscheiden, für welche Klassen von Funktionen mit einem Konvergenzradius 1 die Ungleichung (26_1) charakteristisch ist. Als ein Beispiel, wo dies nicht der Fall ist, führen wir an:

$$F(z) = e^{-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{(1+z)^2}} \qquad (r < 1),$$

wo $m_i(r)$ und $m_a(r)$ von den bez. Grössenordnungen $e^{-\frac{1}{1-r}}$ und $e^{\frac{1}{(1-r)^2}}$ sind, und wo für die Koeffizienten die Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|c_n|}{n^{1+\ldots-\varepsilon}} = \infty \qquad (\varepsilon > 0)$$

nachgewiesen werden kann.

§ 5.

Für die erste Ableitung haben wir

$$(27) \qquad F'(z) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} (n+\nu)\, c_{n+\nu}\, z^{n+\nu-1} = \frac{n}{z}\left[F(z) + \sum_{\nu=-n}^{\infty} \frac{\nu}{n}\, c_{n+\nu}\, z^{n+\nu}\right] =$$

$$= \frac{n}{z}\left[F(z) + F_1(z)\right].$$

Ist nun z eine Stelle, wo der Maximalbetrag $M(r)$ erreicht wird, so ist nach (23) $\frac{F_1(z)}{F(z)}$ eine sehr kleine Grösse. Unter den dort zu Grunde liegenden Voraussetzungen kann man also schreiben

$$(28) \qquad F'(z) = \frac{n}{z} F(z)\,(1 + \varepsilon_n),$$

wo $|\varepsilon_n| = \eta_n$ beliebig klein wird. Bezeichnet $M_1(r)$ den Maximalbetrag von $F'(z)$, so folgt aus (28)

$$(29) \qquad M_1(r) = \frac{n}{r} M(r)\,(1 + \eta_n).$$

Ganz entsprechende Relationen gelten für die folgenden Ableitungen. Man erhält

$$(30) \quad F^{(\varkappa)}(z) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} (n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(n+\nu-\varkappa+1)\, c_{n+\nu}\, z^{n+\nu-\varkappa}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-\varkappa+1)}{z^{\varkappa}}\left[F(z) + \varkappa F_1(z) + F_2(z,\varkappa)\right].$$

Da die Koeffizienten der zentralen Glieder von $F_2(z,\varkappa)$, denen die eigentliche Bedeutung bei der Abschätzung zukommt, von der Grössenordnung $\frac{\nu^2}{n^2} c_{n+\nu}$ sind, so ist an einer Stelle der hier gedachten Art nach den Auseinandersetzungen in § 3 das Verhältnis $\frac{F_2(z,\varkappa)}{F(z)}$ zu vernachlässigen. *Als Verallgemeinerungen von* (28) *und* (29) *haben wir sonach auch bei den höheren Ableitungen:*

$$(28_1) \qquad F^{(\varkappa)}(z) = \frac{n^{\varkappa}}{z^{\varkappa}} F(z)\,(1 + \varepsilon_n),$$

$$M_\varkappa(r) \geq \frac{n^\varkappa}{r^\varkappa} M(r)(1-\eta_\varkappa). \tag{29$_1$}$$

Für die Grössenordnungen der Maximalbeträge der Ableitungen geben (29) und (29$_1$) zunächst nur untere Grenzen. In völlig analoger Weise lassen sich obere Grenzen feststellen. Es sei z eine Stelle, wo wir für $|F'(z)|$ das Maximum $M_1(r)$ haben. Schreiben wir dann

$$F'(z) = \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} \gamma_{n+\nu}\, z^{n+\nu-1} = \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} (n+\nu)\, c_{n+\nu} z^{n+\nu-1},$$

so erhalten wir

$$F(z) = \gamma_0 + \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} \frac{\gamma_{n+\nu}}{n+\nu} z^{n+\nu} = \frac{z}{n}\left[F'(z) - \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} \frac{\nu}{n} \gamma_{n+\nu} z^{n+\nu-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} \frac{\nu^2}{n(n+\nu)} \gamma_{n+\nu} z^{n+\nu-1}\right] + \gamma_0 = \frac{z}{n} F'(z)(1+\varepsilon_n). \tag{31}$$

Man bekommt in der Tat diese letztere Umformung, indem man beachtet, dass die in § 2 ausgeführte Abschätzung über das Verhältnis der nicht zentralen Glieder zu $m(r)$ leicht auf die erste Ableitung übergeführt werden kann, wenn wir für diese $n c_n z^{n-1}$ als grösstes Glied betrachten, da es ja von keiner wesentlichen Bedeutung ist, falls in (8) der Integrand mit einem Faktor $1+\frac{x}{n}$ multipliziert wird. Dann lassen sich die zwei in (31) auftretenden Summen in ganz derselben Weise wie die entsprechenden Summen in (17) behandeln. In gleicher Weise finden wir betreffend die folgenden Ableitungen für die Stellen, wo $|F^{(\varkappa)}(z)| = M_\varkappa(r)$ ist:

$$F(z) = \frac{z^\varkappa}{n^\varkappa} F^{(\varkappa)}(z)(1+\varepsilon_n). \tag{31$_1$}$$

Aus (31) und (31$_1$) ergibt sich

$$M(r) > \frac{r}{n} M_1(r)(1-\eta_n), \tag{32}$$

sowie allgemeiner

$$M(r) > \frac{r^\varkappa}{n^\varkappa} M_\varkappa(r)(1-\eta_n). \tag{32$_1$}$$

Fassen wir (29) und (32) zusammen, so erhalten wir

$$\text{(III)} \qquad \frac{n}{r} M(r)(1-\eta) < M_1(r) < \frac{n}{r} M(r)(1+\eta),$$

wo die positive Grösse η *beliebig klein gegeben werden kann. Ebenso erschliessen wir aus* (29_1) *und* (32_1) *für die höheren Ableitungen*

$$\text{(III}_1\text{)} \qquad \frac{n^\varkappa}{r^\varkappa} M(r)(1-\eta) < M_\varkappa(r) < \frac{n^\varkappa}{r^\varkappa} M(r)(1+\eta).$$

Die Art und Weise aber, auf welche wir diese Ungleichungen gefunden haben, lehren uns noch, dass, wenn $|z| = r$ gewisse Anforderungen bezüglich des Überwiegens der zentralen Glieder erfüllt, *die Maximalbeträge der Funktion und der Ableitungen einander begleiten, so dass an einer Stelle, wo die Funktion oder irgend eine der Ableitungen den Maximalbetrag hat, die absoluten Beträge der anderen von den zugehörigen Maximalbeträgen nur mit je gegen 1 konvergierenden Faktoren abweichen.*[1]

Aus (28), (28_1), (31) und (31_1) erhalten wir noch Aufschlüsse *über die Beziehungen zwischen den Argumenten der Funktion und ihrer Ableitungen* an einer Stelle der gedachten Art. *Hat man* $z = re^{i\varphi}$, *und bedeutet* Φ *das Argument von* $F(z)$, *so gibt offenbar* $\Phi - \varkappa\varphi$ *einen Näherungswert für das Argument der Ableitung* $F^{(\varkappa)}(z)$.

Die soeben erhaltenen Resultate gestatten verschiedene Anwendungen auf die Beschaffenheit der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, über welche wir uns doch hier kurz fassen müssen. In ganz besonderer Weise bekommt man Aufschlüsse über *die linearen Differentialgleichungen mit rationalen Funktionen als Koeffizienten, deren Lösungen ganze Funktionen sind,* was ja immer der Fall sein muss, wenn $z = \infty$ die einzige singuläre Stelle der Differentialgleichung ist. Substituiert man nämlich $\frac{n}{z} y, \cdots \frac{n^\varkappa}{z^\varkappa} y, \cdots$ für $y', \cdots y^{(\varkappa)}, \cdots$, so erhält man *asymptotische Relationen zwischen* n *und* z, *welche sowohl für die möglichen Grössenordnungen der Maximalbeträge als auch für die Richtungen, in denen die Lösungen ihre Maximalbeträge besitzen können, entscheidend sind;* hierbei hat man sich nur der sogenannten *Newton-Cramer'schen Methode* zu bedienen. Wie ohne Schwierigkeit zu ersehen ist, muss jede derartige Relation von der Gestalt

$$\text{(33)} \qquad n = az^{\frac{\mu}{\nu}}$$

sein, wo μ und ν natürliche Zahlen sind. Hat man $a = |a| e^{i\nu}$, so ergibt sich

[1] Auch bei den früher, insbesondere von Herrn Borel angestellten Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen $M(r)$ und $M_1(r)$ spielt der Vergleich mit dem grössten Gliede eine wesentliche Rolle. Wir verweisen hier nur auf die bereits zitierte Arbeit des Herrn Valiron, *Sur quelques théorèmes de M. Borel.*

aus (33) für das Argument φ von z die Relation

$$(34) \qquad v + \frac{\mu}{\nu}\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

wodurch μ äquidistante Richtungen bestimmt werden. Ebenso findet man durch Rechnungen, die von keinerlei prinzipieller Schwierigkeit sind, auf welche wir aber hier nicht eingehen wollen, dass aus (33), worin ja eine Abhängigkeit zwischen r und dem Index n des zugehörigen grössten Gliedes ausgesprochen wird, als Grössenordnung des Maximalbetrages sich

$$(35) \qquad e^{|a|\frac{\nu}{\mu} r^{\frac{\mu}{\nu}}}$$

ergibt. Doch müssen wir einstweilen die Frage betreffend die Umkehrung dahingestellt lassen, d. h. wir vermögen nicht zu entscheiden, in wie weit zu jeder möglichen Kombination von (34) und (35) auch wirklich eine Lösung der Differentialgleichung gehört.

Jedenfalls finden wir doch, dass die ganzen transzendenten Funktionen, welche als Lösungen von linearen Differentialgleichungen auftreten können, deren Koeffizienten rationale Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind, die folgenden zwei charakteristischen Eigenschaften besitzen müssen.

1. *Dieselben sind nicht nur von rationaler endlicher Ordnung, sondern gehören immer dem nach einer von Herrn* Pringsheim *eingeführten Terminologie sogenannten Mitteltypus an.* Dadurch sind Funktionen wie $\frac{1}{\Gamma(z)}$ und die Riemann'sche Funktion $\xi(z)$ ausgeschlossen.[1]

2. *Die Stellen, wo die Funktionen ihre Maximalbeträge besitzen, ordnen sich asymptotisch in ganz bestimmte Richtungen.*[2]

Als ein einfaches Bespiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' - zy' - z^2 y = 0.$$

Als asymptotische Relation zwischen n und z erhält man

[1] Nach einem längst bekannten Satze gilt für die Funktion $\frac{1}{\Gamma(z)}$ dieser Satz nicht nur für lineare Differentialgleichungen. Man sehe O. Hölder, *Über die Eigenschaft der Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen*, Math. Ann. XXVIII (1886).

[2] Obgleich wir keinen Beweis dafür haben, so können wir es hier nicht unterlassen, die Vermutung auszusprechen, dass auch die Nullstellen sich asymptotisch gewissen bestimmten Richtungen anschmiegen. Man vergleiche doch hier insbesondere die Resultate des Herrn Horn.

$$\frac{n^2}{z^2} - 2\frac{n}{z} - z^2 = 0$$

oder nach der Lösung

(a) $$\frac{n}{z^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

(b) $$\frac{n}{z^2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Durch (a) wird ein Maximalbetrag von der Grössenordnung $e^{\frac{\sqrt{5}+1}{4}r^2}$ in den Richtungen $\varphi = 0, \pi$ charakterisiert; dem gegenüber entsprechen der Lösung (b) die Grössenordnung $e^{\frac{\sqrt{5}-1}{4}r^2}$ und die Richtungen $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}\cdot$ Offenbar ist (a) der allgemeine Fall. Ob es wirklich partikuläre Integrale gibt, für welche (b) charakteristisch ist, scheint nicht ohne weiteres beantwortet werden zu können.

Zur Zeit sind wir mit einer strengen Erledigung der entsprechenden Fragen für den Fall, dass die Koeffizienten transzendente Funktionen sind, wie bei

$$y'' = e^z y,$$

nicht fertig.

Bei nicht linearen Differentialgleichungen ist die Sache auf Grund der möglicherweise auftretenden beweglichen kritischen Punkte verwickelter. Am leichtesten scheint man Kriterien zu bekommen, damit ganze Transzendenten *auch nicht als partikuläre Integrale* auftreten können. Als Beipiele nehmen wir die beiden Gleichungen

(α) $$y''y - 2y'^2 + P(z)y'' + Q(z)y' + R(z)y + S(z) = 0,$$
$$y''y - zy'^2 + P(z)y'' + Q(z)y' + R(z)y + S(z) = 0,$$

wo $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ und $S(z)$ ganze rationale Funktionen bedeuten. Es lässt sich ohne Schwierigkeit *eine obere Grenze für die Ordnung einer ganzen rationalen Funktion*, die hier Lösung sein kann, abschätzen. Hierzu können wir jetzt in ergänzender Weise behaupten, dass die fraglichen Gleichungen *auch keine ganzen transzendenten Funktionen* als Integrale haben können. Denn bei den Maximalbeträgen sind ja $yy'' - 2y'^2$ bez. $yy'' - zy'^2$ mit $-y'^2$ bez. $(1-z)y'^2$ vergleichbar und mithin von höherer Grössenordnung als die linearen Glieder. In ganz anderer Weise verhält es sich mit

(β) $$yy'' - y'^2 + y'' + y + 1 = 0,$$

wo wir das partikuläre Integral $y = \sin(z + c)$ haben. Als ein anderes Beispiel nehmen wir

$$(\gamma) \qquad y'y'' + y^2 + y'' - y = 0,$$

wo als partikuläres Integral $y = ce^{-z}$ auftritt. Die Fälle (β) und (γ) gehören insofern zu zwei verschiedenen Typen, als man, auch wenn die Koeffizienten beliebige rationale Funktionen $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ und $S(z)$ wären, im Falle (γ) auf Grund der vorhergehenden Entwickelungen bestimmt behaupten kann, dass eine etwa als Integral auftretende ganze transzendente Funktion von der Grössenordnung e^r sein muss, ein entsprechendes Ergebnis aber für den Fall (β) nicht herauskommt.

§ 6.

Der spezielle Picard'sche Satz lässt bekanntlich die Formulierung zu, dass keine Relation

$$(36) \qquad e^{F(z)} = e^{F_1(z)} + 1,$$

wo $F(z)$ und $F_1(z)$ ganze Funktionen bedeuten, bestehen kann, es sei denn, dass $F(z)$ und $F_1(z)$ sich auf Konstanten reduzieren. Wir wollen zeigen, wie aus den vorangehenden Entwicklungen sich ein einfacher Beweis für diesen Satz herleiten lässt. Man wird hoffentlich zugeben, dass die Schwierigkeit des Beweises eigentlich in unseren ungenügenden Kenntnissen von den allgemeinen Eigenschaften der ganzen *transzendenten* Funktionen liegt. Dem gegenüber werden wir den Beweisgrund eben darin suchen, dass wir in § 3 analoge Eigenschaften für ganze *transzendente* Funktionen nachgewiesen haben, wie solche für *rationale* Funktionen von selbst einleuchten.

Für die ganze Funktion $F(z)$ gibt es nach § 2 eine unendliche Folge von Indices n, denen Werte $|z| = r_n$ zugeordnet sind, so dass, wenn β irgendwie zwischen 1 und 2 genommen wird, als zentrale Glieder, von denen der wesentliche Einfluss auf $M(r_n)$ herrührt, diejenigen bezeichnet werden können, deren Indices zwischen $n - n^{\beta/2}$ und $n + n^{\beta/2}$ liegen. Beachten wir, dass bei einer ganzen Funktion α beliebig wenig grösser als 1 genommen werden kann, so ist aus (10) zu ersehen, dass das Verhältnis des von den nicht zentralen Gliedern herrührenden Betrages zu $m(r_n)$ und mithin $M(r_n)$

$$(37) \qquad < e^{-n^{\beta-1-\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0)$$

wird. Wir wollen zeigen, dass, falls die Relation (36) als gültig angenommen

wird, die beiden einander zugeordneten Folgen n und r_n die gleiche Bedeutung für $F_1(z)$ wie für $F(z)$ haben müssen.

Da der grösste positive reelle Teil $A(r_n)$ von $F(z)$ dieselbe Grössenordnung wie $M(r_n)$ hat, so muss dies auch für den Maximalbetrag $M_1(r_n)$ von $F_1(z)$ der Fall sein. Man hat also $M_1(r_n) > M(r_n)(1-\varepsilon_n)$ mit $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Wir versuchen mit der Annahme, dass von den Gliedern in $F_1(z)$, deren Indices nicht zwischen $n - n^{3/2}$ und $n + n^{3/2}$ liegen, für $|z| = r_n$ ein Betrag herrühre, der $> \delta_1 A_1(r_n)$ ist, wo δ_1 eine gegebene positive Grösse bedeutet.

Zunächst erinnern wir daran, dass wir bei der Abschätzung einer oberen Grenze für den zu $m(r_n)$ komplementären Faktor $\mu(r_n)$ in $M(r_n) = m(r_n)\mu(r_n)$ die Funktion $F(z)$ durch eine mit n bewegliche Majorantfunktion mit positiven Koeffizienten ersetzt haben, welche übrigens einen endlichen Konvergenzradius hat und das Glied vom Index n dem Betrage nach unverändert besitzt. Es ist einleuchtend, dass innerhalb des Konvergenzkreises dieser Majorantfunktion, welche wir etwa mit $\Phi_n(z)$ bezeichnen können, $M(r)$ niemals den Maximalbetrag von $\Phi_n(z)$ überholen darf. Lässt sich also beweisen, dass aus der gemachten Annahme die Folgerung gezogen werden kann, dass für irgend einen r-Wert der grösste positive reelle Teil der Funktion $F_1(z)$ von höherer Grössenordnung als der Maximalbetrag von $\Phi_n(z)$ wird, so darf hier letzterer Betrag durch $M(r)$ ersetzt werden.

Das Integral (8), durch dessen Abschätzung wir die Resultate (10) und (37) erhalten haben, bezieht sich zunächst auf die nicht zentralen Glieder von $\Phi_n(z)$, also erst in zweiter Instanz auf $F(z)$. Ohne besondere Schwierigkeit lässt sich ersehen, dass das Integral (8) für $\lim n = \infty$ noch unendlich klein wird, falls der Integrand durch

$$e^{(n+x)^{1/2-a-\varepsilon_1}} \qquad (\varepsilon_1 > 0)$$

multipliziert wird, und die untere Grenze $r = n^{3/2}$ gesetzt wird. Es handelt sich ja dann um das Integral

$$\int [illegible] \, dr.$$

und wenn man hier den Exponenten im Integranden betrachtet, so kommt offenbar die entscheidende Bedeutung dem negativen Gliede zu, weil bei gegebenem $\varepsilon_1 > 0$ für $x > n^{3/2}$

$$\frac{x^2}{(n+x)^{\beta-\varepsilon_1}} - \frac{\left(1+\frac{x-n^{3/2}}{n^{3/2}}\right)^2}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\beta}} (n+x)^{\varepsilon_1}$$

mit n ins Unendliche steigt. Da man $\alpha + \varepsilon_1 = 1 + \varepsilon$ setzen kann, so muss es bei der oben angenommenen Eigenschaft von $F_1(z)$ für $|z| = r_n$ mindestens ein Index $n + \nu$ geben, so dass das zugehörige Glied in $F_1(z)$ zu dem entsprechenden in $\Phi_n(z)$ ein grösseres Verhältnis als

(38) $$e^{(n+\nu)^{\beta-1-\varepsilon}}$$

hat. Im Allgemeinen können wir das Verhältnis zwischen den absoluten Beträgen der zu den gleichen Indices $n + \nu$ gehörigen Koeffizienten von $F_1(z)$ und $\Phi_n(z)$ in der Gestalt

$$e^{(n+\nu)^{\varkappa^{(n)}_{n+\nu}}}$$

schreiben, und aus (38) hat man für das Maximum der Exponenten $\varkappa^{(n)}_{n+\nu}$ die untere Grenze $\beta - 1 - \varepsilon$. Für grosse positive ν-Werte müssen dagegen die fraglichen Exponenten negativ werden, da wohl $F_1(z)$, aber nicht $\Phi_n(z)$, eine ganze Funktion ist. Ein Gleiches muss aber, jedenfalls bei genügend grossem n, der Fall sein, wenn ν sich gegen $-n$ bewegt, da offenbar die besondere Bildungsweise von $\Phi_n(z)$ aus $F(z)$ die extremen Koeffizienten in *beiden* Richtungen wesentlich erhöht, so dass die Anfangskoeffizienten von $\Phi_n(z)$ mit n über alle Grenzen wachsen. Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten $d_{n+\nu}$ bez. $c_{n+\nu}$ von $\Phi_n(z)$ und $F(z)$ lässt sich ja folgendermassen charakterisieren, wie aus den beiden ersten Paragraphen unserer in Acta XXXVII publizierten Arbeit hervorgehen dürfte. Wie die Grössen $|c_{n+\nu}|$ von den Elementen $\frac{r_{n+\nu}}{r_{n+\nu-1}}$ eines divergenten Produktes, so hängen die Grössen $d_{n+\nu}$ von den Elementen $\frac{P_{n+\nu}}{P_{n+\nu-1}} = (1 + (n+\nu)^{-\alpha})$ eines konvergenten Produktes ab. Dabei ist aber das Anfangsglied P_1 von solcher Grösse, dass man $P_n = r_n$ bekommt. Es ist also im Allgemeinen zu erwarten, dass man $P_{n+\nu} > r_{n+\nu}$ oder $P_{n+\nu} < r_{n+\nu}$ erhält, je nachdem $\nu < 0$ oder $\nu > 0$ ist. Setzen wir immer $\nu > 0$, so sind für die Abschätzung der Grössen $\frac{d_{n-\nu}}{|c_{n-\nu}|}$ bez. $\frac{d_{n+\nu}}{|c_{n+\nu}|}$ die Produkte

(39a) $$\prod [illegible] P_{\nu} [illegible]$$

bez.

(39b) $$\prod_{\varkappa=1} P_{n+\varkappa}^{r_{n+\varkappa}}$$

von entscheidender Bedeutung.[1] Die Richtigkeit der obigen Behauptung bezüglich der extremen Koeffizienten von $\Phi_n(z)$ folgt jetzt daraus, dass beide Produkte (39) mit ν und (für das erstere) n über alle Grenzen wachsen.

Man ersieht auch, dass für die Funktion $\Phi_n(z)$ die Verhältnisse sich ganz analog stellen, wenn ein anderes Glied als dasjenige vom Index n die Rolle als grösstes Glied übernimmt. Für den Index $n + \nu$ hängt der Komplementärfaktor $\mu_{n+\nu}$ in ganz derselben Weise vom unendlichen Produkte

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + m^{-\alpha})$$

ab, als wenn es sich um eine Majorantfunktion $\Phi_{n+\nu}(z)$ handelt. Ebenso ist es bei der Abschätzung des grössten Gliedes $m_{n+\nu}$; nur dass diese Grösse auch das Anfangsglied von $\Phi_n(z)$ als Faktor besitzt, welches ja beim Übergange zu $\Phi_{n+\nu}(z)$ geändert wird. Das wesentliche ist aber, dass dieses Anfangsglied, wie wir oben hervorgehoben haben, mit n über alle Grenzen wächst. Dadurch wird ja der in unserer früheren Abhandlung gezogene Schluss über das Grössenverhältnis zwischen $\mu_{n+\nu}$ und $m_{n+\nu}$, bei welchem ja ein gegebenes endliches Anfangsglied vorausgesetzt wurde, nur erhärtet.

Wir kehren jetzt zu den Beziehungen zwischen $F_1(z)$ und $\Phi_n(z)$ wieder. Es sei eine positive Grösse $\varkappa < \beta - 1 - \varepsilon$ fixiert. Es gibt dann jedenfalls einen Index n_1, für welchen man $\varkappa_{n_1}^{(n)} > \varkappa$ hat. Andererseits muss es, auf Grund der nachgewiesenen Eigenschaft der Grössen $\varkappa_{n+\nu}^{(n)}$ für $\lim \nu = \infty$, möglich sein, den Index n_1 so zu wählen, dass man

$$\varkappa_{n_1+\nu}^{(n)} > \varkappa \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

erhält. Für $|z| = r_{n_1}$ sei n_1 der Index des grössten Gliedes von $\Phi_n(z)$. Aus der Formel (3) erhält man jetzt, indem man die Abschätzung der betreffenden Glieder von $F_1(z)$ auf die ensprechenden von $\Phi_n(z)$ zurückführt und letztere durch die Verhältnisse zu dem grössten Gliede m_{n_1} ausdrückt:

[1] Man vergleiche insbesondere [12] S. 569 unserer zitierten Arbeit.

$$A_1(r_{n_1}) \geq m_{n_1} \left| e^{n_1^{\varkappa}} - \sum_{\lambda=2}^{\infty} e^{-\frac{(\lambda-1)^2 n_1^2}{2\lambda^{\alpha_1} n_1^{\alpha_1}} + \lambda^{\varkappa} n_1} \right| - c.$$

Da man hier $\varkappa + \alpha_1 < 2$ nehmen kann, und da n_1 offenbar mit n unendlich gross werden muss, so lässt sich die obige Ungleichung auch in der Gestalt

$$(40) \qquad A_1(r_{n_1}) \geq m_{n_1} e^{n_1^{\varkappa}} (1 - \varepsilon_n) \qquad \left(\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0\right)$$

schreiben. *Hierin liegt aber ein Widerspruch mit* (36), denn da für μ_{n_1} nur eine Potenz von n_1 zu setzen ist, so würde sich aus (40) eine höhere Grössenordnung für $A_1(r_{n_1})$ als für $M(r_{n_1}) \leq m_{n_1} \mu_{n_1}$ ergeben.

Wird dann andererseits (36) mit der Annahme verträglich sein, dass auch auf $M_1(r_n)$ nur diejenigen Glieder, deren Indices zwischen $n - n^{\beta/2}$ und $n + n^{\beta/2}$ liegen, von wesentlichem Einfluss sind? Bezeichnet $m_n^{(1)}$ den Betrag des grössten Gliedes der Funktion $F_1(z)$ für $|z| = r_n$, so ersieht man leicht, dass

$$m_n^{(1)} < M(r_n)(1 + \varepsilon_n) \qquad \left(\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0\right)$$

sein muss; denn die Benutzung von (3) gibt ein Resultat, dem man die Gestalt

$$A_1(r_n) > m_n^{(1)} \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)$$

geben kann, und $A_1(r_n)$ darf ja höchstens einen äussert geringen Überschuss über $M(r_n)$ haben. Für

$$F_1(z) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} c_{n+\nu} z^{n+\nu}$$

bekommen wir

$$(41) \qquad F_1\left(z e^{\frac{\lambda i \pi}{n}}\right) = e^{\lambda i \pi} \left| F_1(z) + \lambda \sum_{\nu=-n}^{\infty} \frac{\nu i \pi}{n} c_{n+\nu} z^{n+\nu} + \right.$$

$$\left. \sum_{\nu=-n}^{\infty} \left(e^{\frac{\lambda \nu i \pi}{n}} - 1 - \frac{\lambda \nu i \pi}{n}\right) c_{n+\nu} z^{n+\nu} \right| = e^{\lambda i \pi} [F_1(z) + \lambda \overline{F}_1(z) + \overline{F}_1(z, \lambda)].$$

Die Bestimmung einer oberen Grenze für $|\overline{F}_1(z, \lambda)|$, wobei nur die Glieder, für

welche $-n^{\beta/2} < \nu < n^{\beta/2}$, berücksichtigt zu werden brauchen, führt höchstens auf

$$\frac{\lambda^2 \pi^2 m^{(1)}}{n^2} \int_0^{n^{\beta/2}} x^2 \, dx < \frac{\lambda^2 \pi^2 M(r_n)}{3} n^{\frac{3\beta}{2}-2} (1 + \varepsilon_n).$$

Da man $\beta < \frac{4}{3}$ nehmen kann, wird das Verhältnis dieser Grösse zu $M(r_n)$ und also auch zu $M_1(r_n)$ für $\lim n = \infty$ beliebig klein, falls z. B. $|\lambda|$ unter einer gegebenen endlichen Grenze bleibt. Aber eben diese Eigenschaft ist es nach § 3, welche bedingt, dass für $\lim n = \infty$ das Verhältnis zwischen dem grössten positiven reellen Teile $A_1(r_n)$ und $M_1(r_n)$ gegen 1 konvergiert. Wenn nun $A(r_n)$ und $A_1(r_n)$ sich in solcher Weise den zugehörigen Maximalbeträgen anschmiegen, so verlangt offenbar (36), dass auch $\frac{M(r_n)}{M_1(r_n)}$ gegen 1 konvergieren muss.

Geht man von einer Stelle z aus, wo $|F(z)| = M(r_n)$ ist, so gibt es nach § 3 in der Nachbarschaft auf dem Kreise $|z| = r_n$ mit sehr wenig von $\frac{2\pi}{n}$ abweichenden Zwischenwinkeln beliebig viele Stellen, wo $F(z)$ positiv und $> M(r_n)(1 - \varepsilon)$ ist. Eine Gleichung (36) verlangt nun, dass an diesen Stellen die Differenzen zwischen den reellen Teilen von $F_1(z)$ und $F(z)$ sehr klein sein müssen. Auf Grund des Verhältnisses der fraglichen Grössen zu den bezüglichen Maximalbeträgen muss dann das Argument von $F_1(z)$ näherungsweise ein Vielfaches von 2π sein.

Man hat sonach für eine Folge von λ-Werten, welche der Reihe nach den Näherungswert 2 als Differenz besitzen

$$\left| F_1\left(z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}\right) \right| > M_1(r_n)(1 - \varepsilon).$$

Der Faktor von $\left| F_1\left(z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}\right) \right|$, welcher von λ abhängig ist, weicht mithin sehr wenig von 1 ab. Nun ist es oben nachgewiesen, dass bei gehöriger Beschränkung von $|\lambda|$ das Verhältnis $\frac{|F_1(z, \lambda)|}{M_1(r_n)}$ eine sehr kleine Grösse ist. Man hat demnach für $\left| F_1\left(z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}\right) \right|$ den Näherungswert $|F_1(z) + \lambda F_1(z)|$. Letztere Grösse kann offenbar in der angegebenen Weise nur dann von λ unabhängig sein, falls $\frac{|F_1(z)|}{|F_1(z)|}$ genügend klein ist. Beim Übergange von z zu $z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}$ ändern sich also die Argumente

sowohl von $F(z)$ als $F_1(z)$ annäherungsweise um die Grösse $\lambda\mu$. Da die Stellen, für welche die Argumente der beiden Funktionen Vielfache von 2π sind, einander begleiten, so muss ein Gleiches der Fall sein, wenn die Argumente der beiden Funktionen ungerade Vielfache von π darstellen. Wenn man also z. B. die Winkel zwischen den Richtungen halbiert, in denen $F(z)$ positive reelle Werte bekommt, so gelangt man auf Stellen des Kreises $|z| = r_n$, in denen die reellen Teile von sowohl $F(z)$ als $F_1(z)$ negativ und dem absoluten Betrage nach von der Grössenordnung der Maximalbeträge sind. *Dann werden aber die beiden nicht konstanten Glieder in* (36) *für* $\lim n = \infty$ *beliebig klein; eine solche Identität ist sonach unmöglich.*

Hiermit ist der Beweis des speziellen PICARD'*schen Satzes erbracht, indem wir dargetan haben, dass aus dem durch* (36) *bedingten Übereinanderfallen der Stellen, wo* $F(z)$ *und* $F_1(z)$ *grosse positive Teile haben, als Begleiterscheinung ein Gleiches für Stellen mit grossen negativen Teilen folgt.*

Betreffend die ausgedehnte Literatur, welche sich mit diesen und ähnlichen Fragen beschäftigt hat, sei nur an folgendes erinnert. Der erste Beweis des speziellen PICARD'schen Satzes, der nicht von der Modularfunktion Gebrauch macht, ist von Herrn BOREL gegeben,[1] und die entsprechende Leistung für das allgemeine Theorem rührt sodann von Herrn SCHOTTKY her.[2] Indem wir die sich an die merkwürdigen Resultate des Herrn E. LANDAU anschliessenden Untersuchungen nur kurz erwähnen, wollen wir noch besonders auf eine neuerdings erschienene Arbeit des Herrn P. MONTEL aufmerksam machen, welche neue fruchtbringende Gesichtspunkte beim Beweise der PICARD'schen Sätze darbietet.[3]

Bei der von uns benutzten Methode bereitet es keine prinzipielle Schwierigkeit, falls man Erweiterungen des PICARD'schen Theoremes, wie solche zuerst Herr BOREL für ganze Funktionen endlicher Ordnung gegeben hat, auch auf den Fall unendlicher Ordnung ausdehnen will. So z. B. lässt sich die Unmöglichkeit einer Identität

$$\Phi(z)\, e^{F(z)} = \Phi_1(z)\, e^{F_1(z)} + \Phi_2(z)$$

[1] Comptes rendus (1896).

[2] Berliner Sitzungsberichte, XLII (1904), XLVI (1907). Man vergleiche auch E. LINDELÖF, *Sur le théorème de* M. PICARD *dans la théorie des fonctions monogènes,* Congrès des mathématiques à Stockholm (1909).

[3] *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionelles dans un domaine,* Annales de l'École Normale (3) XXIX (1912). Man vergleiche auch C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Démonstration simplifiée du théorème fondamental de* M. MONTEL *sur les familles normales de fonctions,* Annals of Mathematics, (2) XVII (Sept. 1915).

nachweisen, wo $\Phi(z), \Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ ganze Funktionen endlicher Ordnung bedeuten, und mindestens eine von den ganzen Funktionen $F(z)$ und $F_1(z)$ transzendent ist.

Unser Beweisverfahren lässt sich aber auch auf *den allgemeinen* PICARD'schen *Satz* anwenden, dass es höchstens zwei Ausnahmewerte gibt, welche eine in der Umgebung eines isolierten wesentlichen singulären Punktes eindeutige analytische Funktion in beliebiger Nähe des Punktes nicht annimmt. Machen wir die Voraussetzung, für die Funktion $F(z)$ existiere in der Umgebung des wesentlichen Punktes $z = \infty$ die drei Ausnahmewerte ∞, 0, 1. Betrachten wir dann die Funktion $\log F(z)$, so muss es möglich sein, einen Kreis mit genügend grossem Radius zu konstruieren, dass diese Funktion sich in jedem Punkte ausserhalb dieses Kreises regulär verhält. Lässt man dann z in diesem Bereiche eine geschlossene Kurve um den Punkt ∞ durchlaufen, so kann offenbar $\log F(z)$ sich nur um ein Vielfaches der Grösse $2\pi i$ ändern. Es muss also eine gewisse ganze Zahl $k \gtreqless 0$ geben, so dass die Funktion $\log \frac{F(z)}{z^k}$ sich in der Umgebung des Punktes $z = \infty$ eindeutig verhält. Dann wird aber eine Entwickelung von der Gestalt

$$\log \frac{F(z)}{z^k} = G(z) + \varphi(z)$$

existieren, wo $G(z)$ eine ganze rationale oder transzendente Funktion bedeutet, und $z = \infty$ eine reguläre Stelle für die Funktion $\varphi(z)$ darstellt. Übrigens lässt sich $\varphi(z)$ in der Art fixieren, dass $\lim\limits_{z=\infty} \varphi(z) = 0$ ist. In ganz derselben Weise bekommt man die entsprechende Identität

$$\log \frac{F(z) - 1}{z^{k_1}} = G_1(z) + \varphi_1(z).$$

Mann erhält alsdann

$$z^k e^{G(z)} \Phi(z) = z^{k_1} e^{G_1(z)} \Phi_1(z) + 1, \tag{36$_1$}$$

wo $G(z)$ und $G_1(z)$ ganze Funktionen bedeuten und $z = \infty$ einen regulären Punkt für die Funktionen $\Phi(z)$ und $\Phi_1(z)$ bezeichnet, welche dortselbst den Wert 1 annehmen. Offenbar beeinträchtigt aber das Hinzutreten der Faktoren $z^k, \Phi(z), z^{k_1}, \Phi_1(z)$ in keiner Weise die Schlussätze, wodurch wir die Unmöglichkeit einer Identität (36) nachgewiesen haben.

SUR LA LIMITATION DU DEGRÉ DES COËFFICIENTS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES À POINTS CRITIQUES FIXES.

PAR

JEAN CHAZY

à Lille.

Dans le premier chapitre de ce Mémoire, j'étends au champ complexe et aux équations différentielles d'ordre quelconque les résultats obtenus[1] par M. Bendixson et M. Picard, relatifs à l'étude pour les petites valeurs réelles des variables x et y des intégrales de l'équation du premier ordre

$$(1) \qquad x^n \frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

où n désigne un nombre entier supérieur à 1, et $F(x, y)$ une fonction des deux variables x et y holomorphe et nulle pour le système de valeurs $x = y = 0$.

La méthode d'approximations successives employée par M. Bendixson est applicable encore à l'équation (1) quand le nombre n est égal à 1, et aux équations et systèmes différentiels d'ordre quelconque qui généralisent cette forme de l'équation (1); on peut retrouver ainsi les développements classiques en séries entières par rapport aux variables x, x^{n_1}, x^{n_2}, ..., les exposants n_1, n_2, ... dépendant des coëfficients des équations considérées. J'ai obtenu une application de ces développements que je me propose d'exposer dans un autre Mémoire: j'ai démontré que, dans le problème des n corps, au voisinage d'un instant où

[1] Bendixson, Acta Mathematica, t. 24, p. 81; Picard, Traité d'analyse, 2ème éd., t. III, p. 258.

plus de deux corps se choquent, ou quand les corps s'éloignent indéfiniment sur certaines trajectoires qui généralisent les trajectoires paraboliques du problème des deux corps, les coordonnées des n corps admettent des développements de la forme précédente suivant des puissances du temps; l'un des exposants est $\frac{1}{3}$, les autres dépendent des rapports des masses, et sont tantôt réels, tantôt imaginaires.

Dans le second chapitre,[1] je considère des équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur, telles que l'équation

$$y''' = y y'' - 2 y'^2,$$

qui ne sont pas linéaires, et dont néanmoins les intégrales n'ont ni points critiques algébriques, ni pôles; je démontre que ces intégrales ont des singularités transcendantes et ne sont pas uniformes. J'utilise pour cette démonstration les résultats obtenus dans le premier chapitre, et notamment la représentation asymptotique dans un secteur des intégrales de l'équation (1): je suis amené ainsi, dans la théorie des équations différentielles analytiques, à considérer une équation différentielle dont un coëfficient est une série divergente.

La combinaison de la méthode précédente et de la méthode constituée par M. Painlevé permet de démontrer que, si $P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x)$ désigne un polynôme par rapport aux n variables $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ à coëfficients analytiques en x, et si l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$y^{(n)} = P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x)$$

est uniforme ou a ses points critiques fixes, le degré du polynôme P par rapport à chacune des n variables est limité: si l'on considère chaque dérivée $y^{(i)}$ comme de poids égal à l'indice de dérivation augmenté d'une unité, et la fonction y comme de poids 1, le poids d'un terme quelconque du polynôme P ne peut surpasser le poids de $y^{(n)}$, $n+1$. Le résultat précédent généralise le résultat classique relatif à l'équation de Riccati. Une limitation analogue est valable dans le cas où P est, non plus un polynôme, mais une fonction rationnelle, ou algébrique, à moins que l'équation différentielle proposée ne se ramène à une équation fuchsienne ou kleinéenne.

[1] Ce second chapitre est une partie d'un Mémoire auquel l'Académie des Sciences de Paris a décerné un Grand Prix des Sciences Mathématiques en décembre 1912.

CHAPITRE I.

1. Nous supposerons que dans le développement en série entière de la fonction $F(x, y)$ au voisinage du système de valeurs $x = y = 0$, le coëfficient du terme du premier degré en y est différent de zéro; dans cette hypothèse, en multipliant la variable x par une constante convenable, nous pouvons mettre l'équation (1) sous la forme

$$x^n \frac{dy}{dx} - y = f(x, y), \tag{2}$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction des deux variables x, y holomorphe pour les valeurs $x = y = 0$, et dont le développement au voisinage de ce système de valeurs ne renferme ni terme constant ni terme du premier degré en y.

Enfin, pour simplifier les calculs, nous prendrons l'exposant n égal à 2:

$$x^2 \frac{dy}{dx} - y = f(x, y). \tag{3}$$

2. M. Bendixson a considéré les équations différentielles linéaires successives

$$\left\{\begin{aligned} & x^2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 = f(x, 0), \\ & x^2 \frac{dy_2}{dx} - y_2 = f(x, y_1), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & x^2 \frac{dy_n}{dx} - y_n = f(x, y_{n-1}), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right. \tag{4}$$

et les intégrales de ces équations différentielles définies par les conditions initiales

$$x = x_0, \; y_1 = y_2 = \cdots = y_n \cdots = y_0;$$

ces intégrales s'expriment par les quadratures successives:

$$
(5)\quad
\begin{cases}
y_1 = y_0\, e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}} + e^{-\frac{1}{x}} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, 0)}{x^2}\, dx, \\[2ex]
y_2 = y_0\, e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}} + e^{-\frac{1}{x}} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, y_1)}{x^2}\, dx, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n = y_0\, e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}} + e^{-\frac{1}{x}} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, y_{n-1})}{x^2}\, dx, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

M. Bendixson a démontré que, si les variables et les coëfficients sont réels, et si les valeurs initiales x_0, y_0 sont assez petites, x_0 étant positif, la suite de fonctions y_n est uniformément convergente et définit une intégrale de l'équation (3) continue quand la variable x tend vers l'origine sur la partie positive de l'axe réel.

Nous allons étendre le résultat précédent au cas où les variables et les coëfficients ont des valeurs complexes. Soit α un nombre quelconque compris entre o et $\frac{\pi}{2}$; dans le plan de la variable x, désignons par A l'angle ayant comme sommet l'origine, comme bissectrice intérieure la partie positive de l'axe réel et comme mesure 2α. Nous allons démontrer que, si les valeurs initiales complexes x_0, y_0 sont assez petites, le point x_0 étant situé dans l'angle A, la suite de fonctions y_n est encore uniformément convergente, et définit une intégrale de l'équation (3) holomorphe quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A.

Si les quantités positives R et R' sont assez petites, la fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans le domaine

$$|x| < R, \quad |y| < R',$$

et satisfait dans ce domaine à l'inégalité de Lipschitz

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < \frac{k \cos\alpha}{1+\beta}\, |y_2 - y_1|,$$

k désignant un nombre compris entre o et 1, et β un nombre positif arbitraire,

mais fixe: car la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est holomorphe et nulle pour $x = y = 0$. Soit encore $\frac{M \cos \alpha}{1 + \beta}$ le maximum du module de la fonction $f(x, 0)$ sur la circonférence $|x| = R$; si R est assez petit, la quantité r définie par l'égalité

$$\frac{r + M}{1 - k} = R'$$

est positive, et cette quantité est d'ailleurs inférieure à R'. Nous supposons le point x_0 intérieur au secteur déterminé dans l'angle A par la circonférence $|x| = R$, et nous supposons d'autre part $|y_0| \leq r$.

La fonction

$$y_1 = y_0 e^{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}} + e^{-\frac{1}{x}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, 0)}{x^2} dx$$

est holomorphe à l'intérieur du secteur déterminé dans l'angle A par la circonférence $|x| = R$. Si d'ailleurs le point x varie seulement à l'intérieur de la circonférence

$$\Re\left(\frac{1}{x}\right) = \Re\left(\frac{1}{x_0}\right),$$

passant par le point x_0 et tangente à l'origine à l'arc des quantités purement imaginaires, la foncton $e^{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}}$ est en module inférieure à 1, et le premier terme de la fonction y_1 est en module inférieur à r.

Cherchons une limite supérieure du module du second terme de la fonction y_1. ϱ et ϑ désignant le module et l'argument de la variable x, posons $x = \varrho e^{i\vartheta}$. Le second terme de la fonction y_1 est égal à

$$e^{-\frac{e^{i\vartheta}}{\varrho}} \int_{x_0}^{x} e^{\frac{e^{-i\vartheta}}{\varrho}} \frac{f(x, 0) e^{-i\vartheta}}{\varrho^2} (d\varrho + i\varrho d\vartheta),$$

et par suite, à l'intérieur du secteur déterminé dans l'angle A par la circonférence $|x| = R$, est en module inférieur à l'expression

$$\frac{M \cos \alpha}{1 + \beta} e^{-\frac{\cos \vartheta}{\varrho}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{\cos \vartheta}{\varrho}}}{\varrho^2} \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2},$$

dont la signification est évidente. Si l'on pose

$$\frac{\cos\vartheta}{\varrho} = \frac{1}{u}, \text{ d'où } du = \frac{d\varrho + \varrho \operatorname{tg}\vartheta\, d\vartheta}{\cos\vartheta},$$

on peut remplacer l'expression précédente par

$$\frac{M}{1+\beta} e^{-\frac{1}{u}} \int_{u_0}^{u} \frac{e^{\frac{1}{u}} \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2}}{u^2 (d\varrho + \varrho \operatorname{tg}\vartheta\, d\vartheta)} du.$$

Or désignons par γ la racine de l'équation

$$\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\gamma}}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma} = 1 + \beta$$

comprise entre o et $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Sur les deux spirales logarithmiques admettant l'origine comme point-asymptote, passant par le point x_0, et dans lesquelles l'angle de la tangente et du rayon vecteur est égal à γ en valeur absolue, considérons les deux arcs issus du point x_0, se rapprochant de l'origine et limités aux premiers points d'intersection avec les côtés de l'angle A; et désignons par domaine D le domaine ouvert du plan de la variable x limité par les deux arcs précédents et par les deux côtés de l'angle A. Le domaine D est évidemment intérieur d'une part à la circonférence $|x| = R$, et d'autre part à la circonférence $\Re\left(\frac{1}{x}\right) = \Re\left(\frac{1}{x_0}\right)$, qui coupe tous les rayons vecteurs issus de l'origine et situés dans l'angle A sous un angle supérieur à $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Nous supposerons que le point x varie seulement dans le domaine D. On peut joindre le point x_0 à un point quelconque x du domaine D par un arc, situé tout entier dans ce domaine, d'une spirale logarithmique admettant l'origine comme point-asymptote, et dans laquelle l'angle de la tangente et du rayon vecteur est en valeur absolue inférieur à γ: nous prendrons cet arc de spirale comme chemin d'intégration joignant le point x_0 au point x dans le calcul du second terme de la fonction y_1, et des seconds termes de toutes les fonctions $y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ Sur le chemin d'intégration ainsi choisi, ϱ et u décroissent constamment, et l'on a les inégalités

$$|\operatorname{tg}\vartheta| < \operatorname{tg}\alpha, \quad \left|\varrho \frac{d\vartheta}{d\varrho}\right| < \operatorname{tg}\gamma, \text{ d'où } \left|\frac{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2}}{d\varrho + \varrho \operatorname{tg}\vartheta\, d\vartheta}\right| < 1 + \beta.$$

Par suite, au point x considéré du domaine D, le second terme de la fonction y_1 est en module inférieur à

$$Me^{-\frac{1}{u}}\int_u^{u_0}\frac{e^{\frac{1}{u}}du}{u^2} = M\left[1 - e^{-\frac{1}{u}+\frac{1}{u_0}}\right] < M.$$

Donc, dans le domaine D, le module de la fonction y_1 est inférieur à $r+M$, et par conséquent à R'.

Il résulte immédiatement que la fonction y_2 est holomorphe dans le domaine D; cherchons une limite supérieure du module de cette fonction dans ce domaine. On déduit des équations (5)

$$y_2 - y_1 = e^{-\frac{1}{x}}\int_{x_1}^{x}\frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2}dx.$$

Or, dans le domaine D, $|x|$ et $|y_1|$ étant inférieurs respectivement à R et R', l'inégalité de Lipschitz est valable:

$$|f(x, y_1) - f(x, 0)| \leq \frac{k\cos\alpha}{1+\beta}|y_1|,$$

d'où

$$|f(x, y_1) - f(x, 0)| < \frac{k\cos\alpha(r+M)}{1+\beta}.$$

On déduit comme précédemment

$$|y_2 - y_1| < k(r+M),$$

et

$$|y_2| < |y_1| + |y_2 - y_1| < r + M + k(r+M) = (r+M)(1+k) < R'.$$

Il résulte que la fonction y_3 est holomorphe dans le domaine D, et l'on obtient de même

$$|y_3 - y_2| < k^2(r+M),$$

et

$$|y_3| < |y_2| + |y_3 - y_2| < (r+M)(1+k) + k^2(r+M) = (r+M)(1+k+k^2) < R'.$$

En continuant de proche en proche, on démontre que la fonction y_n est holomorphe dans le domaine D, et satisfait dans ce domaine à l'inégalité

$$|y_n - y_{n-1}| < k^{n-1}(r+M).$$

Donc, dans le domaine D, la suite de fonctions y_n est uniformément convergente, et définit une fonction holomorphe $y(x)$. Au point x_0, cette fonction-limite est encore holomorphe, et a, comme toutes les fonctions y_n, la valeur y_0. D'ailleurs, d'après l'équation

$$x^2 \frac{dy_n}{dx} - y_n = f(x, y_{n-1}),$$

et l'inégalité de Lipschitz, dans tout domaine que l'on obtient en retranchant du domaine D la partie intérieure au cercle de centre $x = 0$ et de rayon δ, la suite des dérivées $\frac{dy_n}{dx}$ est aussi uniformément convergente, et a comme limite la dérivée $y'(x)$, quelque petit que soit le rayon δ. Par suite, en tout point du domaine D, on peut remplacer dans l'équation précédente $\frac{dy_n}{dx}$, y_n et y_{n-1} par les limites $\frac{dy}{dx}$ et y, et la fonction $y(x)$ satisfait à l'équation différentielle (3). C'est l'intégrale de l'équation (3), unique d'après le théorème de Cauchy, définie par les conditions initiales $x = x_0$, $y = y_0$ et prolongée analytiquement dans le domaine D. Cette intégrale $y(x)$ dépend de la constante y_0, arbitraire pourvu qu'elle soit assez petite.

3. Dans le cas où les variables et les coëfficients sont réels, M. Bendixson a démontré que l'intégrale $y(x)$, définie et continue sur la partie positive de l'axe réel au voisinage de l'origine, tend vers zéro quand la variable x tend vers l'origine. M. Picard a obtenu un résultat plus complet: toutes les courbes intégrales obtenues, qui aboutissent ainsi à l'origine de leur plan, y sont tangentes à la courbe

$$-y = f(x, y),$$

et y ont entre elles un contact d'ordre infini. Ces résultats s'étendent aux valeurs complexes des variables et des coëfficients. Nous commencerons par démontrer que, quand la variable x tend vers l'origine dans le domaine D et par conséquent dans l'angle A, le quotient $\frac{y(x)}{x}$ tend vers $-b$, si l'on désigne par b le coëfficient de x dans le développement de la fonction $f(x, y)$: d'où il résultera que l'intégrale $y(x)$ tend vers zéro.

Considérons d'abord le quotient $\frac{y_1}{x}$. Par une intégration par parties, on

peut transformer le second terme de la fonction y_1, et mettre le quotient $\frac{y_1}{x}$ sous la forme

$$\frac{y_1}{x} = \frac{y_0 e^{\frac{1}{x_0}}}{x e^{\frac{1}{x}}} - \frac{f(x, 0)}{x} + \frac{e^{\frac{1}{x_0}} f(x_0, 0)}{x e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{x}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)\, dx.$$

Quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A, le premier et le troisième termes de la somme précédente tendent vers zéro; le second tend vers $-b$. Enfin le quatrième terme tend vers zéro. En effet la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$ est holomorphe dans le cercle $|x| = R$: soit $\frac{M' \cos \alpha}{1 + \beta}$ la limite supérieure de son module dans le domaine intérieur D. Dans ce domaine le quatrième terme de la somme précédente est en module inférieur à

$$\frac{M' \int_{u}^{u_0} e^{\frac{1}{u}} du}{u e^{\frac{1}{u}}},$$

où la variable u désigne comme précédemment l'inverse de la partie réelle de $\frac{1}{x}$, et tend vers zéro en décroissant constamment quand la variable x tend vers l'origine dans le domaine D sur les chemins d'intégration que nous avons définis. Or l'on a

$$-\frac{d}{du}\left(u^2 e^{\frac{1}{u}}\right) = e^{\frac{1}{u}}(1 - 2u),$$

et par suite, pourvu que u soit inférieur à $\frac{1}{2}$,

$$\int_{u}^{u_0} e^{\frac{1}{u}} du < \int_{u'}^{u_0} e^{\frac{1}{u}} du + \frac{u^2 e^{\frac{1}{u}} - u'^2 e^{\frac{1}{u'}}}{1 - 2u'},$$

u' désignant un nombre fixe compris entre u_0 et u et inférieur à $\frac{1}{2}$. On déduit de là

$$\frac{M' \int_{u}^{u_0} e^{\frac{1}{u}} du}{u e^{\frac{1}{u}}} < \frac{M' \int_{u'}^{u_0} e^{\frac{1}{u}} du}{u e^{\frac{1}{u}}} + \frac{M' \left(u - \frac{u'^2 e^{\frac{1}{u'}}}{u e^{\frac{1}{u}}}\right)}{1 - 2u'}.$$

Quand u tend vers zéro par valeurs positives, les deux termes du second membre tendent vers zéro.

Donc, quand la variable x tend vers l'origine dans le domaine D, le quotient $\frac{y_1}{x}$ tend vers $-b$; quel que soit le nombre positif ε, on peut déterminer un second nombre positif u_1 tel que, dans le triangle mixtiligne D_1 formé par les deux côtés de l'angle A et la circonférence $u = u_1$, l'on ait

$$\left|\frac{y_1}{x} + b\right| \leq \varepsilon.$$

Il nous sera utile, pour simplifier des calculs, de diminuer au besoin u_1, et de le supposer inférieur à $\frac{1}{5}$.

Nous allons comparer au quotient $\frac{y_1}{x}$ successivement les quotients $\frac{y_2}{x}, \frac{y_3}{x}, \ldots, \frac{y_n}{x}$. Supposons le point x situé dans le triangle D_1, et, dans la cas le plus compliqué où le point x_0 n'est lui-même dans le triangle D_1, soit $x_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}$ le point du chemin d'intégration $x_0 x$ situé sur la circonférence $u = u_1$. On a

$$\frac{y_2 - y_1}{x} = \frac{1}{x\, e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2}\, dx;$$

d'où, en décomposant le second membre,

$$\frac{y_2 - y_1}{x} = \frac{1}{x\, e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2}\, dx + \frac{1}{x\, e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_1}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2}\, dx.$$

On peut écrire

$$f(x, y) - f(x, 0) = y\varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ désignant une fonction holomorphe, comme la fonction $f(x, y)$, dans le domaine $|x| \leq R$, $|y| \leq R'$, et nulle pour $x = y = 0$: si en outre, en un point de ce domaine, $\frac{y}{x}$ est en module inférieur ou égal à un nombre fixe, soit $|b| + 3\varepsilon$, l'expression

$$\frac{f(x, y) - f(x, 0)}{x^2} = \frac{y}{x} \times \frac{\varphi(x, y)}{x}$$

est en module inférieure à un nombre fixe $\frac{N\cos\alpha}{1+\beta}$, qui ne dépend que des coëfficients de la fonction $f(x, y)$ et du nombre ε. Or l'on a dans le triangle D_1

$$\left|\frac{y_1}{x}+b\right| \leq \varepsilon, \quad \text{a fortiori} \quad \left|\frac{y_1}{x}\right| < |b| + 3\varepsilon;$$

d'où

$$\left|\frac{f(x, y_1) - f(x, 0)}{x^2}\right| < \frac{N\cos\alpha}{1+\beta},$$

et

$$\left|\frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}}\int_{x_1}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2}dx\right| < \frac{N\int_u^{u_1} e^{\frac{1}{u}}du}{u e^{\frac{1}{u}}} < \frac{N\left(u - \frac{u_1^2 e^{\frac{1}{u_1}}}{u e^{\frac{1}{u}}}\right)}{1 - 2u_1} < \frac{Nu}{1-2u_1} < \frac{Nu_1}{1-2u_1}.$$

Pour être assuré que l'expression considérée est en module inférieure à ε, il suffit d'admettre que u_1 ait été diminué au besoin, et rendu inférieur, en même temps qu'à $\frac{1}{5}$, à $\frac{\varepsilon}{N+2\varepsilon}$.

D'autre part, sur le segment $x_0 x_1$ du chemin d'intégration, qui est situé dans le domaine D, la fonction $\frac{f(x, y_1) - f(x, 0)}{x^2}$ est en module inférieure à $\frac{k\cos\alpha \times (r+M)}{(1+\beta)\varrho_1^2}$, et par suite à $\frac{k\cos\alpha \times (r+M)}{(1+\beta)u_1^2\cos^2\alpha}$, puisque $\varrho_1 = u_1\cos\vartheta_1$ est supérieur à $u_1\cos\alpha$. On a par conséquent

$$\left|\frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}}\int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2}dx\right| < \frac{k(r+M)}{u_1^2\cos^2\alpha} \times \frac{\int_{u_1}^{u_0} e^{\frac{1}{u}}du}{u e^{\frac{1}{u}}},$$

et a fortiori

$$\left|\frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}}\int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2}dx\right| < \frac{k(r+M)}{u_1^2\cos^2\alpha} \times \frac{e^{\frac{1}{u_1}}(u_0 - u_1)}{u e^{\frac{1}{u}}} < \frac{kR'u_0}{\cos^2\alpha} \times \frac{e^{\frac{1}{u_1}}}{u_1^2 u e^{\frac{1}{u}}}.$$

Donc la fonction $\frac{y_2 - y_1}{x}$ est en module inférieure à 2ε, et par suite la

fonction $\frac{y_2}{x} + b$ à 3ε, dans le triangle D_2 formé par les côtés de l'angle A et la circonférence $u = u_2$, si le nombre u_2 est inférieur à u_1 et satisfait à la condition

$$\frac{kR'u_0}{\cos^2\alpha} \times \frac{e^{\frac{1}{u_1}}}{u_1^2 u_2 e^{\frac{1}{u_2}}} \leq \varepsilon,$$

car, u_1 étant inférieur à $\frac{1}{5}$, la fonction $u e^{\frac{1}{u}}$, qui a comme dérivée $e^{\frac{1}{u}}\left(1 - \frac{1}{u}\right)$ croît quand u décroît de u_1 à zéro.

Supposons u_2 assez petit pour satisfaire aux deux conditions précédentes, et le point x intérieur au triangle D_2: soit $x_2 = \varrho_2 e^{i\vartheta_2}$ le point du chemin d'intégration $x_0 x$ situé sur la circonférence $u = u_2$. Limitons de même la fonction $\frac{y_3 - y_1}{x}$. On a

$$\frac{y_3 - y_1}{x} = \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_2) - f(x, 0)]}{x^2} dx,$$

et

$$\frac{y_3 - y_1}{x} = \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x_2} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_2) - f(x, 0)]}{x^2} dx + \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_2}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_2) - f(x, 0)]}{x^2} dx.$$

Quand le point x est situé dans le triangle D_2, $\left|\frac{y_2}{x}\right|$ est inférieur à $|b| + 3\varepsilon$; d'où

$$\left|\frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_2}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_2) - f(x, 0)]}{x^2} dx\right| < \frac{N \int_{u}^{u_2} e^{\frac{1}{u}} du}{u e^{\frac{1}{u}}} < \frac{N\left(u - u_2^2 e^{\frac{1}{u_2}}\right)}{\frac{u e^{\frac{1}{u}}}{1 - 2u_2}} < \frac{Nu}{1 - 2u_2} < \frac{N u_1}{1 - 2u_1} < \varepsilon.$$

D'autre part, sur le segment $x_0 x_2$, on a comme précédemment

$$\left|\frac{f(x, y_2) - f(x, 0)}{x^2}\right| < \frac{k \cos\alpha \times (r + M)(1 + k)}{(1 + \beta)\varrho_2^2} < \frac{k \cos\alpha \times (r + M)(1 + k)}{(1 + \beta) u_2^2 \cos^2\alpha},$$

d'où

$$\left| \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x_2} \frac{e^{\frac{1}{x}} [f(x, y_2) - f(x, 0)]}{x^2} dx \right| < \frac{k(r+M)(1+k)}{u_2^2 \cos^2 \alpha} \times \frac{\int_{u_2}^{u_0} e^{\frac{1}{u}} du}{u e^{\frac{1}{u}}} < \frac{k R' u_0}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{e^{\frac{1}{u_2}}}{u_2^2 u e^{\frac{1}{u}}}.$$

En continuant de proche en proche, on démontre que, dans le triangle D_n formé, par les côtés de l'angle A et la circonférence $u = u_n$, on a

$$\left| \frac{y_n - y_1}{x} \right| < 2\varepsilon, \quad \text{et par suite} \quad \left| \frac{y_n}{x} + b \right| < 3\varepsilon,$$

si l'on a déterminé une suite de nombres positifs $u_2, u_3, \ldots u_n$, inférieurs à u_1, décroissants et satisfaisant aux inégalités successives

$$\frac{k R' u_0}{\cos^2 \alpha} \times \frac{e^{\frac{1}{u_1}}}{u_1^2 u_2 e^{\frac{1}{u_2}}} \leq \varepsilon, \quad \frac{k R' u_0}{\cos^2 \alpha} \times \frac{e^{\frac{1}{u_2}}}{u_2^2 u_3 e^{\frac{1}{u_3}}} \leq \varepsilon, \ldots, \quad \frac{k R' u_0}{\cos^2 \alpha} \times \frac{e^{\frac{1}{u_{n-1}}}}{u_{n-1}^2 u_n e^{\frac{1}{u_n}}} \leq \varepsilon.$$

Il résulte que, quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A, le quotient $\frac{y_n}{x}$ tend vers $-b$, quel que soit n, et que la fonction y_n et par conséquent la fonction-limite $y(x)$ tendent vers zéro, puisque la suite de fonctions y_n est uniformément convergente dans le domaine D. Mais il ne résulte pas immédiatement que la fonction $\frac{y(x)}{x}$ tende vers $-b$, car la suite de fonctions $\frac{y_n}{x}$ n'est pas uniformément convergente dans le domaine D au voisinage de l'origine, et d'autre part il est visible que les nombres u_n tendent vers zéro quand n croît indéfiniment. Pour achever la démonstration, nous devons comparer la décroissance des nombres u_n et celle de la différence $\frac{y(x) - y_n}{x}$ quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A.

En un point x du domaine D, l'on a

$$|y_{n+1} - y_n| < k^n (r + M),$$

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| < k^{n+1} (r + M),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|y_{n+p} - y_{n+p-1}| < k^{n+p-1} (r + M),$$

et par conséquent

$$|y_{n+p} - y_n| < k^n (r + M)(1 + k^2 + \cdots + k^{p-1}) < \frac{k^n (r + M)}{1 - k} = k^n R';$$

d'où, en faisant croître p indéfiniment,

$$|y(x) - y_n| \leq k^n R',$$

et

$$\left|\frac{y(x)}{x} + b\right| \leq \left|\frac{y(x) - y_n}{x}\right| + \left|\frac{y_n}{x} + b\right| \leq \frac{k^n R'}{|x|} + \left|\frac{y_n}{x} + b\right|.$$

Si le point x est situé dans le triangle D_n, défini par les conditions énoncées, et où l'on a par suite

$$\left|\frac{y_n}{x} + b\right| < 3\varepsilon,$$

et si le point x satisfait d'autre part à la condition

$$\frac{k^n R'}{\varrho} \leq \varepsilon, \text{ ou } \varrho \geq \frac{k^n R'}{\varepsilon},$$

on aura en ce point

$$\left|\frac{y(x)}{x} + b\right| < 4\varepsilon:$$

pour qu'il existe des points x satisfaisant aux deux conditions précédentes, il faut et il suffit que l'on ait

$$u_n > \frac{k^n R'}{\varepsilon}.$$

Or posons $u_2 = \frac{u_1}{1 + v_1}$: v_1 est positif puisque u_1, u_2 sont positifs et u_2 inférieur à u_1; il vient

$$\frac{k R' u_0}{\cos^2 \alpha} \times \frac{e^{\frac{1}{u_1}}}{u_1^2 u_2 e^{\frac{1}{u_2}}} = \frac{k R' u_0}{\cos^2 \alpha} \times \frac{1 + v_1}{u_1^3 e^{\frac{v_1}{u_1}}}.$$

Pour que le quotient précédent soit inférieur à ε, il suffit que l'expression que l'on obtient en remplaçant au dénominateur l'exponentielle par la somme des

deux termes d'exposants 4 et 5 de son développement en série soit elle-même inférieure à ε:

$$\frac{kR'u_0}{\cos^2\alpha} \times \frac{24(1+v_1)u_1}{v_1^4\left(1+\frac{v_1}{5u_1}\right)} < \varepsilon;$$

ou, puisque u_1 est inférieur à $\frac{1}{5}$, il suffit que l'on ait

$$\frac{24kR'u_0}{\cos^2\alpha} \times \frac{u_1}{v_1^4} = \varepsilon, \text{ ou } v_1 = Cu_1^{\frac{1}{4}}, \text{ et } u_2 = \frac{u_1}{1+Cu_1^{\frac{1}{4}}},$$

en posant

$$C = \left(\frac{24kR'u_0}{\varepsilon\cos^2\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Il suffira de même que l'on ait

$$u_3 = \frac{u_2}{1+Cu_2^{\frac{1}{4}}}, \quad u_4 = \frac{u_3}{1+Cu_3^{\frac{1}{4}}}, \quad \ldots, \quad u_n = \frac{u_{n-1}}{1+Cu_{n-1}^{\frac{1}{4}}}.$$

Si l'on fait croître n indéfiniment, les termes de la suite infinie obtenue $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, sont positifs et décroissent; ils ont donc une limite positive ou nulle.

Cette limite ne peut être positive. En effet l'on déduit des équations précédentes

$$u_n = \frac{u_1}{\left(1+Cu_1^{\frac{1}{4}}\right)\left(1+Cu_2^{\frac{1}{4}}\right), \ldots, \left(1+Cu_{n-1}^{\frac{1}{4}}\right)},$$

et par suite

$$u_n < \frac{u_1}{1+C\left(u_1^{\frac{1}{4}}+u_2^{\frac{1}{4}}+\cdots+u_{n-1}^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Si la limite des nombres de la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, était positive, la somme qui figure en facteur de C au dénominateur de l'expression précédente, croîtrait indéfiniment avec n, et u_n devrait tendre vers zéro. Donc l'hypothèse considérée conduit à une contradiction. La limite des nombres u_n est zéro.

Il résulte que, quand n croît indéfiniment, le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ tend vers 1; par conséquent le nombre u_n finit par être supérieur au nombre $\frac{k^n R'}{\varepsilon}$, qui est

le terme de rang n d'une progression géométrique de raison inférieure à 1. Donc, si n est assez grand, il existe dans le triangle D_n des points où l'inégalité

$$\left|\frac{y(x)}{x} + b\right| < 4\varepsilon$$

est vérifiée.

En outre, si n est assez grand, le nombre u_{n+1} est supérieur aussi au nombre $\frac{k^n R'}{\varepsilon \cos \alpha}$; de sorte que l'inégalité précédente est vérifiée dans toute la partie du triangle D_n extérieure au triangle D_{n+1}. De même le nombre u_{n+2} est supérieur au nombre $\frac{k^{n+1} R'}{\varepsilon \cos \alpha}$, et la même inégalité est vérifiée encore dans la partie du triangle D_{n+1} extérieure au triangle D_{n+2}. Et ainsi de suite: l'inégalité considérée est vérifiée dans tout le triangle D_n.

En définitive, si petit que soit le nombre positif ε donné à l'avance, on peut déterminer une circonférence $u = u_n$, tangente à l'origine à l'axe des quantités purement imaginaires telle que dans le triangle formé par cette circonférence et par les côtés de l'angle A, l'on ait

$$\left|\frac{y(x)}{x} + b\right| < 4\varepsilon.$$

Donc la fonction $\frac{y(x)}{x}$ tend vers $-b$, quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A.

4. Si l'on substitue dans l'équation (3) une série entière en x sans terme constant

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{6}$$

et qu'on applique les règles ordinaires du calcul des séries convergentes, on trouve que l'équation (3) est vérifiée par une série unique de la forme (6): le coëfficient a_1 est égal au coëfficient que nous avons désigné précédemment par $-b$, et de proche en proche tous les coëfficients $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ se déterminent successivement. Toutes les intégrales $y(x)$ que nous avons obtenues, et qui dépendent de la constante y_0, arbitraire pourvu qu'elle soit assez petite, admettent comme développement asymptotique, quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A, cette série de la forme (6) unique qui vérifie formellement l'équation (3).

En effet faisons dans l'équation (3) la transformation

$$y = a_1 x + zx, \qquad (a_1 = -b);$$

l'équation transformée en z a la même forme que l'équation (3). A l'une des intégrales $y(x)$ de l'équation (3), correspond une intégrale de cette seconde équation, $z(x)$, qui, d'après les résultats précédents, est holomorphe et tend vers zéro quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A. Donc, dans cet angle, pour des valeurs de x suffisamment petites, l'intégrale $z(x)$ peut être représentée comme limite d'une suite de fonctions analogue à la suite de fonctions y_n; par suite, quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A, le quotient $\frac{z(x)}{x}$ tend vers une limite. Cette limite est égale au coëfficient de x dans la série entière en x sans terme constant qui vérifie formellement l'équation différentielle en z, et par conséquent est égale aussi au coëfficient de x^2 dans la série de la forme (6) qui vérifie formellement l'équation en y. On obtient ainsi

$$\frac{z}{x} = a_2 + z_2,$$

et

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + z_2 x^2,$$

la fonction z_2 tendant vers zéro avec x. En continuant de proche en proche, on voit que les intégrales $y(x)$ se mettent sous la forme

$$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + z_n x^n,$$

la fonction z_n tendant vers zéro avec x dans l'angle A.

D'après l'équation différentielle (3), les dérivées $y'(x)$ ont nécessairement un développement asymptotique dans l'angle A puisque les fonctions $y(x)$ en ont un: ce développement ne peut être que le développement des fonctions $y(x)$ dérivé terme à terme.

5. On démontre par des calculs analogues que la suite des fonctions

$$(7)\quad \begin{cases} y_1 = e^{-\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, 0)}{x^2} dx, \\ y_2 = e^{-\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, y_1)}{x^2} dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = e^{-\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, y_{n-1})}{x^2} dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

qui sont aussi des intégrales des équations linéaires (4), définit une intégrale $y(x)$ de l'équation (3) holomorphe et tendant vers zéro quand la variable x tend vers l'origine à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires.[1] Cette intégrale $y(x)$ admet aussi comme développement asymptotique à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires la série entière en x (6) qui vérifie formellement l'équation (3).

D'ailleurs l'équation (3) ne peut admettre plusieurs intégrales holomorphes et tendant vers zéro quand la variable x tend vers l'origine à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires. Soient en effet $y(x)$, $z(x)$ deux telles intégrales, et y_0, z_0 les valeurs de ces intégrales, supposées différentes, au point x_0. Faisons varier x à partir du point x_0 à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires, dans le domaine où $y(x)$ et $z(x)$ sont holomorphes; on a

$$x^2 y' = y + f(x, y),$$

$$x^2 z' = z + f(x, z),$$

d'où

$$x^2 (y' - z') = y - z + f(x, y) - f(x, z),$$

et

$$y - z = (y_0 - z_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \left[1 + \frac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z}\right] \frac{dx}{x^2}}.$$

La différence $y - z$ tend vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$: nous allons montrer qu'au contraire l'exponentielle du second membre croît indéfiniment.

Le quotient $\dfrac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z}$ peut être supposé aussi petit que l'on veut,

[1] L'intégrale $y(x)$ tend uniformément vers zéro, et dans le développement

$$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + z_n x^n,$$

la fonction z_n tend uniformément vers zéro, dans tout angle ayant son sommet à l'origine et dont les deux côtés sont à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires. L'intégrale $y(x)$ tend vers zéro et le développement asymptotique est valable, à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires, sur tout chemin aboutissant à l'origine ou admettant l'origine comme point-asymptote et non tangent à cet axe, ou même sur certains chemins tangents à cet axe, mais dont l'origine n'est pas un point ordinaire. Tel est le cas des fonctions $e^{\frac{1}{x}}$, $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$.

Certains des énoncés suivants peuvent être précisés d'une manière analogue.

puisque y et z tendent vers zéro avec x, et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est holomorphe et nulle pour $x = y = 0$. D'autre part, si l'on pose $x = \varrho e^{i\vartheta}$, d'où

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{\cos\vartheta\, d\varrho + \varrho \sin\vartheta\, d\vartheta + i(\varrho\cos\vartheta\, d\vartheta - \sin\vartheta\, d\varrho)}{\varrho^2},$$

on voit que la partie réelle de $\frac{dx}{x^2}$ a un signe constant, et que le quotient par cette partie réelle de la partie imaginaire

$$\frac{\varrho\frac{d\vartheta}{d\varrho} - \operatorname{tg}\vartheta}{1 + \varrho\frac{d\vartheta}{d\varrho}\operatorname{tg}\vartheta},$$

est borné, pourvu qu'on choisisse comme chemin d'intégration joignant le point x_0 au point x, un arc de spirale logarithmique admettant l'origine comme point-asymptote et symétrique par rapport à l'axe des quantités purement imaginaires de l'un des arcs définis précédemment.

Il résulte que sur un tel chemin d'intégration la partie réelle de l'exposant figurant dans l'expression de $y - z$ tend vers $+\infty$, comme la partie réelle de

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0},$$

quand la variable x tend vers l'origine à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires. Donc l'hypothèse considérée conduit à une contradiction.

6. D'une façon générale considérons l'équation

$$(2) \qquad x^n \frac{dy}{dx} - y = f(x, y),$$

où n désigne un nombre entier[1] supérieur à 1, et $f(x, y)$ une fonction des deux variables x, y holomorphe pour les valeurs $x = y = 0$, et dont le développement au voisinage de ce système de valeurs ne renferme ni terme constant ni terme du premier degré en y. Au voisinage du point $x = 0$, dans chacun des angles où $\Re(x^{n-1})$

[1] Si l'exposant n est non plus un nombre entier, mais un nombre réel supérieur à 1, ou même un nombre imaginaire dont la partie réelle est supérieure à 1, les résultats relatifs

est positif, les suites de fonctions analogues à la suite (5) définissent une infinité d'intégrales dépendant d'une constante arbitraire, holomorphes et tendant vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans l'angle considéré; dans chacun des angles où $\Re(x^{n-1})$ est négatif, les suites de fonctions analogues à la suite (7) définissent l'intégrale unique, holomorphe et tendant vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans l'angle considéré. Toutes les intégrales obtenues admettent comme développement asymptotique dans l'angle correspondant la série entière en x unique

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{6}$$

qui vérifie formellement l'équation (2).

La série de la forme (6) qui vérifie formellement l'équation (2) peut être convergente pour toute valeur de x ou pour les valeurs de x suffisamment petites, ou n'être convergente pour aucune autre valeur de x que $x = 0$, c'est-à-dire être une série divergente. On se trouve dans le premier cas quand la série (6) se réduit à $y = 0$: il faut et il suffit pour cela que dans l'équation (2) la fonction $f(x, 0)$ soit identiquement nulle; d'ailleurs, quand la série (6) est convergente, et a pour somme $S(x)$, on peut toujours par la transformation $[y, S(x) + y]$, être ramené au cas où cette série se réduit à $y = 0$. Il y a des exemples classiques du second cas: ainsi l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} - y = bx$$

est vérifiée formellement par la série divergente

$$y = -b[x + x^2 + 1 \cdot 2 x^3 + \cdots + 1 \cdot 2 \ldots (n-1) x^n + \cdots].$$

On a dit que le second des deux cas précédents est plus fréquent que le premier, et que la série entière en x sans terme constant qui vérifie formellement l'équation (2) est en général divergente. Comme il est arrivé dans des circonstances analogues, il faut préciser le procédé que l'on adopte pour dénombrer les cas considérés.

à l'existence des intégrales sont encore valables. Dans le cas où l'exposant n est de la forme $\frac{p}{q}$, p et q désignant deux entiers supérieurs à 1 ($p > q$), ces intégrales admettent comme développement asymptotique une série entière en $x^{\frac{1}{q}}$: ce cas se ramène au cas où l'exposant n est entier par le changement de variable $\left(x^{\frac{1}{q}}, x\right)$

Ainsi Briot et Bouquet ont considéré l'équation[1]

$$x^2 \frac{dy}{dx} - ay = x f(x), \tag{8}$$

où a désigne une constante différente de zéro, et $f(x)$ une fonction de x holomorphe pour $x = 0$. Et ils ont démontré que la série entière qui vérifie formellement cette équation est convergente ou divergente suivant que la quantité a est ou n'est pas l'affixe d'un zéro de la fonction entière que M. Borel a appelée depuis fonction entière associée[2] à la série entière $f(x)$. Donc le cas où l'équation (8) est vérifiée par une série entière convergente apparaît comme exceptionnel.

Mais à un autre point de vue les équations (2) vérifiées par une série de la forme (6) convergente sont au moins aussi nombreuses que celles qui sont vérifiées par une série de la forme (6) divergente: car à toute équation

$$x^n \frac{dy}{dx} - y = f(x, y)$$

appartenant à la seconde catégorie on peut faire correspondre l'équation

$$x^n \frac{dy}{dx} - y = y f(x, y),$$

[1] Journal de l'Ecole Polytechnique, t. XXI, cah. 36, p. 182.

[2] La fonction entière associée à la série entière

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \ldots$$

dont le rayon de convergence n'est pas nul, est la fonction entière définie par la série

$$b_0 + \frac{b_1 x}{1} + \frac{b_2 x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{b_n x^n}{n!} + \cdots$$

De même la série entière en x qui vérifie l'équation

$$x^3 \frac{dy}{dx} - ay = x(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots),$$

est convergente ou divergente suivant que la quantité a est ou n'est pas l'affixe d'un zéro de chacune des deux fonctions entières

$$b_0 + \frac{b_2 x}{1} + \frac{b_4 x^2}{1 \cdot 3} + \frac{b_6 x^3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots,$$

$$b_1 + \frac{b_3 x}{2} + \frac{b_5 x^2}{2 \cdot 4} + \frac{b_7 x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots$$

Et ainsi de suite.

qui est vérifiée par la série convergente $y = 0$, et qui appartient à la première catégorie.

Quand la série entière en x sans terme constant qui vérifie formellement l'équation (2) est convergente, la somme de cette série $y = S(x)$ représente une intégrale holomorphe et nulle au point $x = 0$. C'est nécessairement cette intégrale que définissent les suites de fonctions (7) dans les angles où $\Re(x^{n-1})$ est négatif: le résultat obtenu se réduit dans ce cas à une représentation dans les angles où $\Re(x^{n-1})$ est négatif de l'intégrale holomorphe et nulle à l'origine. Au contraire, parmi l'infinité d'intégrales obtenues dans chacun des angles où $\Re(x^{n-1})$ est positif, l'intégrale holomorphe et nulle à l'origine $y = S(x)$ correspond à la valeur particulière $S(x_0)$ de la constante arbitraire y_0: la différence $y(x) - S(x)$ de l'intégrale $S(x)$ et d'une autre intégrale $y(x)$ correspondant à une valeur différente de la constante y_0 tend vers zéro avec x, et a un développement asymptotique suivant les puissances entières de x identiquement nul; ce qui correspond au résultat énoncé par M. Boutroux: la croissance de la fonction $y(x) - S(x)$ est du type exponentiel.[1]

7. Relativement à l'allure des intégrales de l'équation

$$x^n \frac{dy}{dx} - y = f(x, y), \tag{2}$$

dans le plan de la variable complexe au voisinage du point $x = 0$, on peut ajouter les indications suivantes. Les intégrales de l'équation (2) qui tendent vers zéro dans les angles où $\Re(x^{n-1})$ est positif, tendent vers d'autres valeurs-limites dans les angles où $\Re(x^{n-1})$ est négatif, et sont indéterminées dans les directions où $\Re(x^{n-1})$ est nul: tel est le cas dans l'équation simple

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y(1 - y), \text{ d'où } \frac{y}{y - 1} = C e^{\frac{1}{x}}.$$

Dans le cas général où le second membre de l'équation (2) n'est pas un polynôme du second degré en y, M. Boutroux a montré que les points critiques des intégrales s'accumulent au voisinage du point $x = 0$ dans les directions où $\Re(x^{n-1})$ est nul. Dans un angle où $\Re(x^{n-1})$ est positif, soit $y(x)$ une intégrale holomorphe au voisinage du sommet $x = 0$ dans un certain domaine D, et qui tend vers une valeur-limite quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans

[1] Journal de Liouville, 6e série, t. VI, p. 185—186.

le domaine D. Suivons cette intégrale le long d'un chemin issu du domaine D, qui tourne autour d'un point critique situé au voisinage d'un côté de l'angle considéré et qui revient au voisinage du sommet. L'intégrale $y(x)$, ainsi prolongée analytiquement, est holomorphe dans le même angle au voisinage du sommet $x=0$, dans un nouveau domaine D', et elle tend, quand la variable x tend vers le point $x=0$ dans le domaine D', vers une nouvelle valeur-limite. Cette nouvelle valeur-limite est en général différente de la valeur-limite primitive. Soit par exemple l'équation

$$x^2\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2y}, \quad \text{d'où} \quad y^2-1=Ce^{-\frac{1}{x}};$$

à droite de l'axe des quantités purement imaginaires les intégrales $y(x)$ ont deux valeurs-limites $+1$ et -1, qui se permutent autour des points critiques définis par l'équation $e^{\frac{1}{x}}=-C$.

8. Enfin, comme l'a indiqué M. Bendixson, la méthode des approximations successives, dirigée de même, peut être appliquée à l'équation

$$(9) \qquad x\frac{dy}{dx}-ay=f(x,y),$$

où a désigne une constante différente de zéro, et $f(x,y)$ une fonction des deux variables x, y holomorphe pour le système de valeurs $x=y=0$, et dont le développement au voisinage de ce système de valeurs ne renferme ni terme constant ni terme du premier degré en y. On retrouve ainsi les résultats dont la démonstration classique est fondée sur l'emploi des fonctions majorantes. Il importe toutefois de développer en quelques mots l'application à l'équation (9) de la méthode des approximations successives:[1] il sera évident ensuite que la même méthode est applicable aux équations et aux systèmes différentiels d'ordre supérieur au premier qui généralisent à la fois l'équation (2) pour $n>1$ et l'équation (9).

Dans le plan de la variable x, au voisinage du point $x=0$, nous considérons des domaines A où x^a tend uniformément vers zéro, et des domaines A' où x^a

[1] M. Goursat a appliqué à l'équation (9) un procédé analogue (Cours d'analyse, 2ème éd., t. II, p. 504).

M. Boutroux a retrouvé les résultats classiques relatifs à l'équation (9) par une méthode voisine, en introduisant un paramètre dans cette équation, et en développant les intégrales suivant les puissances de ce paramètre; M. Boutroux a appliqué cette même méthode à l'équation (2) (Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, p. 114, 125; Journal de Liouville, 6e série, t. VI, p. 194).

tend uniformément vers l'infini. Mais nous devons ajouter ici une condition supplémentaire à la définition des domaines A et A': la condition analogue relative à l'équation (3) se trouvait remplie d'elle-même par le choix d'un angle à côtés rectilignes comme domaine A. Il faut que deux points quelconques d'un domaine A ou A' puissent être joints par un arc situé tout entier dans le domaine d'une spirale logarithmique admettant le point $x=0$ comme point-asymptote, et dans laquelle l'angle de la tangente avec le rayon vecteur soit compris en valeur algébrique entre deux angles γ_1 et γ_2, fixes et tels que sur les spirales logarithmiques correspondantes x^a tende vers zéro dans un domaine A, et vers l'infini dans un domaine A'.

Considérons au voisinage du point $x=0$ un domaine A et la suite de fonctions

$$y_1 = y_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^a + x^a\int_{x_0}^{x}\frac{f(x,0)}{x^{a+1}}\,dx,$$

. . . .

$$y_n = y_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^a + x^a\int_{x_0}^{x}\frac{f(x,y_{n-1})}{x^{a+1}}\,dx,$$

. . . .

Si le point x_0 est dans le domaine A assez voisin du point $x=0$, et si la valeur y_0 est assez petite, les fonctions $y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$ sont holomorphes et forment une suite uniformément convergente dans un domaine D limité d'une part au voisinage du point $x=0$ par la frontière du domaine A, et d'autre part par les deux arcs de spirale logarithmique admettant le point $x=0$ comme point-asymptote, issus du point x_0 et dans lesquels les angles des tangentes avec le rayon vecteur sont respectivement γ_1 et γ_2. Les calculs sont entièrement analogues aux calculs relatifs à l'équation (3), si l'on prend comme nouvelle variable $u=-\dfrac{1}{\log|x^a|}$. Il résulte que la suite de fonctions y_n définit une intégrale $y(x)$ de l'équation (9) holomorphe dans le domaine D; et l'on démontre encore que cette intégrale $y(x)$ tend vers zéro quand la variable x tend vers le point $x=0$ dans le domaine D et par conséquent dans le domaine A. On obtient ainsi une infinité d'intégrales $y(x)$ dépendant de la constante y_0, arbitraire pourvu qu'elle soit assez petite.

Si le coëfficient a n'est pas un nombre entier positif, l'équation (9) admet une intégrale holomorphe et nulle pour $x=0$, $y=S(x)$, et l'on est ramené par

la transformation $[y, S(x) + y]$ au cas où cette intégrale est $y = 0$. Dans ce cas $f(x, 0)$ est identiquement nul, et la fonction y_1 se réduit à $y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a$; il est visible que successivement les fonctions $y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ sont des séries entières par rapport aux quatre variables x, $y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a$, x_0, y_0 convergentes si ces quatre variables sont assez petites, et d'ailleurs identiquement nulles pour $y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a = 0$. Donc la fonction-limite $y(x)$ est une fonction holomorphe des deux variables x et $y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a$, considérées comme indépendantes, holomorphe pour $x = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a = 0$, et nulle pour $y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a = 0$. Si l'on revient de l'équation transformée à l'équation primitive (9), on obtient pour les intégrales $y(x)$ de cette équation les développements classiques en série double par rapport aux deux variables x et Cx^a, C désignant une constante arbitraire.

Remarquons d'ailleurs que, quel que soit a, toute série entière en x sans terme constant qui vérifie formellement l'équation (9) est convergente: les intégrales $y(x)$ de cette équation nulles et non holomorphes pour $x = 0$ ne peuvent sur aucun chemin tendant vers le point $x = 0$ admettre comme développement asymptotique une série entière en x divergente.

Si a est un entier positif, des logarithmes peuvent s'introduire dans les seconds termes des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$; ces fonctions, et l'intégrale $y(x)$, sont de même des fonctions des trois variables x, Cx^a, $x^a \log x$, considérées comme indépendantes, holomorphes et nulles pour $x = Cx^a = x^a \log x = 0$. Pour qu'une intégrale $y(x)$ de l'équation (9) soit une fonction holomorphe et nulle pour $x = 0$, il est nécessaire que les coëfficients de la fonction $f(x, y)$ vérifient une certaine égalité algébrique; et réciproquement, si cette égalité est vérifiée, l'équation (9) admet une infinité d'intégrales holomorphes et nulles pour $x = 0$. Pour $a = 1$, la condition nécessaire est que le coëfficient du terme du premier degré en x dans la fonction $f(x, y)$ soit nul: alors aucune des fonctions $y_1, y_2, \ldots$ $y_n, \ldots$, ne renferme de logarithme. Mais pour $a \geq 2$, il se peut que ces fonctions contiennent des logarithmes, et que néanmoins la fonction-limite soit holomorphe en x pour $x = 0$.

Considérons maintenant au voisinage du point $x = 0$ un domaine A' et la suite de fonctions

$$y_1 = x^a \int_0^x \frac{f(x, 0)}{x^{a+1}} dx,$$

. . . .

$$y_n = x^a \int_0^x \frac{f(x, y_{n-1})}{x^{a+1}} dx,$$

. . . .

Cette suite de fonctions définit une intégrale de l'équation (9) holomorphe et tendant vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans le domaine A'. Mais cette intégrale n'est autre que l'intégrale holomorphe et nulle pour $x = 0$, qui existe car le coëfficient a ne peut être positif. En effet, comme nous l'avons fait dans le cas de l'équation (3), on démontre que l'équation (9) ne peut admettre deux intégrales holomorphes et tendant vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans un domaine A'.

Briot et Bouquet ont obtenu une proposition[1] analogue: si la partie réelle du coëfficient a est négative ou nulle, l'équation (9) n'admet pas d'autre intégrale tendant vers zéro que l'intégrale holomorphe et nulle pour $x = 0$, sur un chemin dont la longueur et l'argument restent finis. Le résultat que nous venons d'énoncer est plus général. D'ailleurs la proposition de Briot et Bouquet n'est pas susceptible d'une extension indéfinie. M. Dulac a formé l'équation différentielle[2]

$$x \frac{dy}{dx} + y = -xy^2,$$

dont l'intégrale générale $y(x)$ est définie par l'équation

$$1 + xy \log x = Cxy:$$

quelle que soit la constante C, l'intégrale $y(x)$ tend vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans un domaine où $x \log x$ tend vers l'infini. Sur un chemin situé dans un tel domaine, il y a nécessairement des points où l'angle de la tangente et du rayon vecteur est arbitrairement voisin de $\frac{\pi}{2}$: en quoi le domaine considéré ne satisfait pas à la restriction imposée aux domaines A'.

[1] Journal de l'Ecole Polytechnique, t. XXI, 36e cahier, p. 175.
[2] Journal de l'Ecole Polytechnique, 2ème série, 9e cahier, p. 49.

9. Les divers résultats précédents s'étendent aux équations et aux systèmes différentiels d'ordre quelconque qui généralisent l'équation (1). Considérons par exemple l'équation du second ordre

$$x^{m+n}\frac{d^2y}{dx^2} - a\,x^m\frac{dy}{dx} + y = f\left(x,\, y,\, x^k\frac{dy}{dx}\right), \tag{10}$$

où m et n désignent deux entiers positifs, k le plus petit de ces deux entiers, a une constante, et $f\left(x, y, x^k\frac{dy}{dx}\right)$ une fonction des trois variables $x, y, x^k\frac{dy}{dx}$ holomorphe pour les valeurs $x = y = x^k\frac{dy}{dx} = 0$, et dont le développement au voisinage de ce système de valeurs ne renferme ni terme constant ni termes du premier degré en y et $x^k\frac{dy}{dx}$.

Si l'on a $n > m > 1$, on peut transformer l'équation (10) de façon que l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le premier membre de l'équation transformée ait deux intégrales particulières de la forme $e^{\frac{r}{x^{m-1}}}$, $e^{\frac{s}{x^{n-1}}}$, r et s désignant deux constantes, sans que le second membre cesse de satisfaire aux conditions énoncées. On peut alors appliquer à l'équation transformée la même méthode d'approximations successives que M. Bendixson a appliquée à l'équation (2); les équations différentielles successives s'intègrent de même par la méthode de la variation des constantes, et les expressions obtenues se limitent de même dans des hypothèses analogues. Au voisinage du point $x = 0$, dans chacun des angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{m-1}}\right)$ et $\Re\left(\frac{s}{x^{n-1}}\right)$ sont négatifs, on obtient des intégrales de l'équation (10) holomorphes, tendant vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$, et dépendant de deux constantes arbitraires. Dans chacun des angles où ces deux parties réelles sont de signes contraires, on obtient des intégrales dépendant d'une seule constante. Enfin, dans chacun des angles où ces deux parties réelles sont positives, on obtient une seule intégrale.

Si l'on a $m \geq n > 1$, ou $m > 1$, $n = 1$, ou encore $m > 2$, $n = 0$, on peut écrire l'équation (10) sous la forme

$$x^{2p}\frac{d^2y}{dx^2} - a\,x^p\frac{dy}{dx} + y = f\left(x,\, y,\, x^p\frac{dy}{dx}\right), \tag{11}$$

p désignant un nombre plus grand que 1, qu'on peut supposer entier: s'il ne

l'est pas, il le devient par le changement de variable[1] (x, x^2). On peut transformer l'équation (11) de façon que l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le premier membre de l'équation transformée ait deux intégrales particulières de la forme $e^{\frac{r}{x^{p-1}}}$, $e^{\frac{s}{x^{p-1}}}$, ou de la forme $e^{\frac{r}{x^{p-1}}}$, $\frac{e^{\frac{r}{x^{p-1}}}}{x^{p-1}}$, r et s désignant des constantes. Dans le premier cas, les conclusions sont les mêmes que précédemment. Dans le second cas, l'on obtient dans les angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{p-1}}\right)$ est négatif des intégrales dépendant de deux constantes, et dans les autres une seule intégrale.

D'ailleurs les équations (10) et (11) n'admettent dans chacun des angles considérés d'autre intégrale holomorphe et tendant vers zéro que celles qui sont ainsi obtenues. Et toutes ces intégrales admettent comme développement asymptotique dans l'angle correspondant la série entière en x sans terme constant

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

qui vérifie formellement l'équation (10) ou l'équation (11), et qui peut être convergente ou divergente.

Si l'on a dans l'équation (10) $m = 1$, $n > 1$, on peut transformer cette équation de façon que l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le premier membre de l'équation transformée ait deux intégrales particulières de la forme $e^{\frac{r}{x^{n-1}}}$, $x^{\frac{1}{a}}$, r désignant une constante. Au voisinage du point $x = 0$, dans les angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)$ est négatif, on obtient des intégrales dépendant de deux constantes si $\Re(a)$ est positif, et d'une constante si $\Re(a)$ est négatif. Dans les angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)$ est positif, on obtient des intégrales dépendant d'une constante si $\Re(a)$ est positif, et une seule intégrale si $\Re(a)$ est négatif. Dans chacun des angles considérés, l'équation (10) n'admet pas d'autre intégrale holomorphe et tendant vers zéro que celles qui sont ainsi obtenues. D'ailleurs, pourvu que le coëfficient a ne soit pas l'inverse d'un nombre entier positif, l'équation (10) est vérifiée par une série entière en x sans terme constant, unique et qui peut être convergente ou divergente. Cette série entière est le développement asymptotique, parmi les intégrales obtenues, d'intégrales dépendant d'une constante dans les

[1] Cf. supra, p. 47, note 1.

angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)$ est négatif, et d'une seule intégrale dans les angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)$ est positif.[1]

Soit enfin l'équation

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-ax\frac{dy}{dx}+by=f\left(x,\,y,\,x\frac{dy}{dx}\right), \tag{12}$$

[1] Une méthode d'approximations successives analogue à celle que nous indiquons a été appliquée par M. PICARD (Traité d'analyse, 2ème éd., t. III, p. 413) à l'équation linéaire du second ordre

$$y''+\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots\right)y'+\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots\right)y=0, \tag{a}$$

où les deux expressions entre parenthèses sont des fonctions de x holomorphes pour $x=\infty$, à coëfficients réels. Dans le cas où l'équation en λ $\lambda^2+a_0\lambda+b_0=0$ a ses racines réelles et distinctes, M. PICARD a obtenu, quand la variable x croît indéfiniment sur la partie positive de l'axe réel, une intégrale $y(x)$ de l'équation (a), dépendant d'une constante, c_0, et admettant un développement asymptotique de la forme

$$y=e^{\lambda x}x^{\mu}\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}+\cdots\right),$$

où λ désigne la plus petite racine de l'équation $\lambda^2+a_0\lambda+b_0=0$, et μ et les coëfficients c_i des constantes. Par les transformations $\left[y,\,e^{\lambda x}x^{\mu}\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{y}{x}\right)\right]$ et $\left(x,\,\frac{c}{x}\right)$, c désignant une constante positive, l'équation (a) devient

$$x^3y''+x[1+f(x)]y'+[1+\varphi(x)]y=\psi(x), \tag{β}$$

où $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ désignent des fonctions de x holomorphes et nulles pour $x=0$: l'équation (β) est de la forme considérée dans le texte avec $n=2$, $r=+1$, $a=-1$. L'intégrale de l'équation (a) et le développement asymptotique obtenus par M. PICARD correspondent à l'intégrale unique de l'équation (β) et au développement asymptotique que nous obtenons au voisinage du point $x=0$ sur la partie positive de l'axe réel $\left[\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)\right.$ étant positif et $\left.\Re(a)\text{ négatif}\right]$. D'ailleurs le procédé d'intégration par parties par lequel M. PICARD met en évidence le développement asymptotique de l'intégrale $y(x)$ pourrait être adapté à l'équation (9) et aux équations qui la généralisent, même dans des angles, pour les valeurs complexes des variables.

M. PICARD a considéré aussi le cas où l'équation $\lambda^2+a_0\lambda+b_0=0$ a ses racines imaginaires (loc. cit., p. 418). A l'axe réel correspond alors dans la transformation l'axe des quantités purement imaginaires: de sorte que le résultat obtenu par M. PICARD est relatif dans l'équation (β) à une direction sur laquelle $\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)$ est nul. Nous avons écarté ces directions de notre discussion.

Enfin M. COTTON a appliqué la même méthode d'approximations successives à l'étude sur l'axe réel des intégrales de systèmes différentiels d'ordre quelconque auxquels peuvent se ramener l'équation (9) et les équations que nous considérons pour généraliser l'équation (9) (Annales de l'Ecole Normale, 1911, p. 473).

où b désigne une constante différente de zéro. L'équation linéaire qu'on obtient en égalant à zéro le premier membre de l'équation (12) admet deux intégrales particulières de la forme x^r, x^s, ou x^r, $x^r \log x$, r et s désignant des constantes différentes de zéro. Nous devons imposer aux domaines que nous considérons dans le plan de la variable x au voisinage du point $x = 0$ une restriction semblable à celle que nous avons imposée dans le cas de d'équation (9) aux domaines A et A', et double s'il y a deux exposants r et s. Alors, dans les domaines où x^r et x^s, ou x^r, tendent vers zéro, on obtient des intégrales de l'équation (12) holomorphes et tendant vers zéro, et dépendant de deux constantes; dans le premier cas, et pourvu qu'aucun des exposants r et s ne soit un entier positif, les intégrales obtenues sont des fonctions des trois variables x, $C_1 x^r$, $C_2 x^s$, C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires, holomorphes et nulles pour $x = C_1 x^r = C_2 x^s = 0$: et les développements relatifs aux autres cas peuvent être obtenus par dégénérescence du développement précédent. Dans les domaines où x^r tend vers zéro et x^s vers l'infini, on obtient des intégrales dépendant d'une constante, et qui sont des fonctions des deux variables x et Cx^r holomorphes et nulles pour $x = Cx^r = 0$, pourvu que r ne soit pas un entier positif. Enfin, dans les domaines où x^r et x^s, ou x^r, tendent vers l'infini, on obtient une seule intégrale, l'intégrale de l'équation (12) holomorphe et nulle pour $x = 0$.

CHAPITRE II.

10. Nous démontrerons d'abord le théorème suivant.

Théorème. *Soit l'équation différentielle*

$$\frac{y''}{y'^2} = \frac{1 + \varepsilon(y)}{y^n}, \tag{13}$$

où n désigne un nombre supérieur à 1, et $\varepsilon(y)$ une fonction de y holomorphe et tendant vers zéro quand la variable y tend vers le point $y = 0$ de son plan dans un angle A ayant son sommet en ce point; l'intégrale générale $y(x)$ n'est pas uniforme.

M. Painlevé a démontré le théorème précédent dans le cas où la fonction $\varepsilon(y)$ est holomorphe et nulle au point $y = 0$. Mais nous aurons à appliquer ce théorème dans des cas plus généraux auxquels ne s'étend pas la démonstration[1] de M. Painlevé: par exemple quand la fonction $\varepsilon(y)$ n'est pas holomorphe

[1] Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXVIII, p. 214.

au point $y=0$, mais admet dans l'angle A une série entière en y comme développement asymptotique, ou quand la fonction $\varepsilon(y)$ est de la forme $y\log y$.

Nous supposerons pour simplifier les calculs l'exposant n égal à 2.

L'équation (13) ne change pas par la transformation $(x, \alpha x+\beta)$, quelles que soient les constantes α et β, et s'intègre par deux quadratures: on a successivement

$$\frac{dx}{dy}=Ce^{-\int_{y_0}^{y}\frac{1+\varepsilon(y)}{y^2}dy}, \quad x-x_0=C\int_{y_0}^{y}dy\, e^{-\int_{y_0}^{y}\frac{1+\varepsilon(y)}{y^2}dy},$$

y_0, C et x_0 désignant trois constantes. La fonction $\varepsilon(y)$ est holomorphe dans l'angle A au voisinage du point $y=0$, dans un domaine que nous désignerons par domaine D; soit y_0 un point du domaine D. Quand y varie à partir du point y_0 dans le domaine D, les fonctions $\frac{dx}{dy}$ et $x(y)$ définies par les expressions précédentes sont holomorphes, et la fonction $\frac{dx}{dy}$ est différente de zéro. Nous allons montrer qu'on peut déterminer dans le domaine D un chemin ouvert auquel correspond dans le plan de la variable x un chemin fermé.

En premier lieu posons

$$\frac{1}{y}=\xi+i\eta,$$

ξ et η désignant des quantités réelles, et faisons varier y à partir du point y_0 sur la circonférence $\xi=\xi_0$, tangente à l'origine à l'axe des quantités purement imaginaires (nous supposons que le point y_0 n'est pas situé sur cet axe). On a sur cette circonférence

$$-\frac{dy}{y^2}=id\eta,$$

d'où

$$\frac{dx}{dy}=Ce^{i\int_{\eta_0}^{\eta}(1+\varepsilon)d\eta}=Ce^{i(\eta-\eta_0)+i\int_{\eta_0}^{\eta}\varepsilon d\eta},$$

et

$$x-x_0=-Ci\int_{\eta_0}^{\eta}y^2e^{i(\eta-\eta_0)+i\int_{\eta_0}^{\eta}\varepsilon d\eta}d\eta.$$

Or, quand η varie à partir de η_0 d'une quantité finie, soit de η_0 à $\eta_0 + 2\pi + \frac{\pi}{2}$, le quotient

$$\frac{y}{y_0} = \frac{\xi_0 + i\eta_0}{\xi_0 + i\eta},$$

est arbitrairement voisin de 1, et le point y ne sort ni de l'angle A ni du domaine D, si le point y_0 est dans l'angle A assez voisin de l'origine; l'intégrale $\int_{\eta_0}^{\eta} \varepsilon \, d\eta$ est arbitrairement petite, et l'on a

$$x - x_0 = -C i y_0^2 \int_{\eta_0}^{\eta} e^{i(\eta - \eta_0)}(1 + \varepsilon')\, d\eta,$$

ε' désignant une fonction de η holomorphe et arbitrairement petite. Si la fonction ε' était identiquement nulle, l'expression précédente serait

$$x - x_0 = -C y_0^2 \left[e^{i(\eta - \eta_0)} - 1\right]:$$

quand la variable η croît de η_0 à $\eta_0 + 2\pi$, le point x décrirait la circonférence de centre $x_0 + C y_0^2$ et de rayon $|C y_0^2|$, partant du point x_0 et revenant en ce point. ε' étant arbitrairement petit, la courbe décrite par le point x, issue du point x_0, diffère aussi peu que l'on veut de la circonférence précédente; le point correspondant à la valeur $\eta_0 + 2\pi$ de la variable est aussi voisin que l'on veut du point x_0, et la courbe décrite par le point x continue à être voisine de la circonférence précédente quand la variable η croît au-delà de $\eta_0 + 2\pi$.

Posons en second lieu

$$\frac{1}{y} = \rho e^{i\theta},$$

ρ et θ désignant des quantités réelles, et faisons varier y à partir du point y_0 sur le rayon vecteur $\theta = \theta_0$. On a sur ce rayon vecteur

$$-\frac{dy}{y^2} = d\rho \, e^{i\theta_0},$$

d'où

$$\frac{dx}{dy} = C e^{e^{i\theta_0}\int_{\rho_0}^{\rho}(1+\varepsilon)\,d\rho} = C e^{e^{i\theta_0}(\rho - \rho_0) + e^{i\theta_0}\int_{\rho_0}^{\rho}\varepsilon\, d\rho},$$

et

$$x - x_0 = - C e^{i\vartheta_0} \int_{\varrho_0}^{\varrho} y^2 e^{e^{i\vartheta_0}(\varrho-\varrho_0)+e^{i\vartheta_0}\int_{\varrho_0}^{\varrho}\varepsilon\, d\varrho} d\varrho .$$

Or, si ϱ_0 est assez grand, quand ϱ varie à partir de ϱ_0 d'une quantité finie, le quotient $\frac{y}{y_0} = \frac{\varrho_0}{\varrho}$ est arbitrairement voisin de 1, le point y ne sort ni de l'angle A ni du domaine D, et l'intégrale $\int_{\varrho_0}^{\varrho} \varepsilon d\varrho$ est arbitrairement petite. On a donc

$$x - x_0 = - C e^{i\vartheta_0} y_0^2 \int_{\varrho_0}^{\varrho} e^{e^{i\vartheta_0}(\varrho-\varrho_0)} (1 + \varepsilon'')\, d\varrho,$$

ε'' désignant une fonction de ϱ holomorphe et arbitrairement petite. Si la fonction ε'' était identiquement nulle, l'expression précédente serait

$$x - x_0 = - C y_0^2 \left[e^{e^{i\vartheta_0}(\varrho-\varrho_0)} - 1 \right],$$

le point x décrirait dans son plan la spirale logarithmique admettant le point $x_0 + C y_0^2$ comme point-asymptote, passant au point x_0, et dans laquelle l'angle de la tangente et du rayon vecteur est égal à ϑ_0. ε'' étant arbitrairement petit, la courbe décrite par le point x, issue du point x_0, diffère aussi peu qu'on veut de la spirale logarithmique précédente. D'ailleurs le rapport des variations de ϱ et de x, $\frac{x - x_0}{\varrho - \varrho_0}$, est de l'ordre de grandeur de $C y_0^2$.

Il résulte que, si l'on fait varier ϱ de part et d'autre de ϱ_0 d'une quantité finie, l'arc de courbe décrit par le point x coupe nécessairement l'arc de courbe correspondant à la circonférence $\xi = \xi_0$ en un point x_1 correspondant à une valeur de η voisine de $\eta_0 + 2\pi$, et situé au voisinage du point x_0. On obtient ainsi dans le plan de la variable x un chemin fermé. Inversement, quand la variable x décrit de x_0 en x_1 l'un puis l'autre des deux arcs de ce chemin fermé, la fonction $y(x)$ est holomorphe, puisque $x(y)$ est holomorphe et $\frac{dx}{dy}$ différent de zéro; en outre la fonction $y(x)$ part de la même valeur initiale y_0, mais acquiert au point x_1 des valeurs finales différentes, puisque le second point d'intersection de la circonférence $\xi = \xi_0$ et du rayon vecteur $\vartheta = \vartheta_0$ est le point $y = 0$. Donc l'intégrale générale $y(x)$ de l'équation (13) n'est pas une fonction uniforme.

Le théorème est encore valable si dans l'hypothèse de l'énoncé l'angle A est remplacé par un domaine aboutissant au point $y=0$ et dans lequel on peut inscrire à la distance δ du point $y=0$ un cercle de rayon infiniment petit par rapport à δ d'ordre inférieur à n; ce domaine peut s'enrouler autour du point $y=0$, ou encore ne satisfaire à la condition précédente que pour des valeurs de δ discontinues, mais aussi petites que l'on veut.

11. On sait depuis longtemps que, si $R(y, x)$ désigne une fraction rationnelle en y dont les coëfficients sont des fonctions analytiques de x, et si les intégrales de l'équation différentielle

$$y' = R(y, x),$$

ont leurs points critiques fixes, c'est-à-dire indépendants des constantes d'intégration, la fraction rationnelle R est un polynôme du second degré en y: l'équation considérée est une équation de Riccati. De même, si $R[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x]$ désigne une fraction rationnelle en $y^{(n-1)}$ dont les coëfficients sont algébriques ou analytiques en $y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x$, et si les intégrales de l'équation différentielle d'ordre n

$$y^{(n)} = R[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x],$$

ont leurs points critiques fixes, la fraction rationnelle R est un polynôme du second degré en $y^{(n-1)}$. Proposons-nous de généraliser ces résultats.

Considérons d'abord une équation différentielle d'ordre n de la forme

$$y^{(n)} = P[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x], \tag{14}$$

où P désigne un polynôme en $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ à coëfficients analytiques en x. Nous allons montrer que si les intégrales de l'équation (14) ont leurs points critiques fixes, le degré du polynôme P par rapport à chacune des variables $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ est limité.

M. Painlevé a constitué une méthode qui fournit des conditions nécessaires pour que les intégrales d'une équation différentielle donnée aient leurs points critiques fixes, et par cette méthode a obtenu entre autres les résultats suivants: le polynôme P est du premier degré au plus, non du second, par rapport à $y^{(n-1)}$; dans l'équation du second ordre

$$y'' = P_1(y, x)\,y' + P_2(y, x), \tag{15}$$

les degrés en y des polynômes P_1 et P_2 sont au plus 1 et 3. Insistons sur cette

dernière circonstance qui ne se présente pas aussi simplement dans les équations d'ordre supérieur. Si x_0 désigne un point arbitraire, et si dans l'équation (15) on substitue une expression de la forme $y=\frac{h}{(x-x_0)^r}$, on voit que, pour des valeurs convenables des constantes r et h, rationnelles et positives de l'exposant r, on peut établir une compensation entre y'' et le ou les termes prépondérants du second membre, pourvu que l'équation (15) ne soit pas linéaire. r et h étant ainsi choisis, l'équation (15) est vérifiée formellement par un développement ordonné suivant des puissances croissantes et rationnelles de $x-x_0$, dont le premier terme est $\frac{h}{(x-x_0)^r}$, et qui converge si $|x-x_0|$ est assez petit. Or si le degré de y surpasse 1 dans le polynôme P_1 ou 3 dans le polynôme P_2, l'exposant r est inférieur à 1, et par suite l'intégrale obtenue de l'équation (15) a un point critique algébrique $x=x_0$.

12. Quand on passe aux équations d'ordre supérieur à 2, une difficulté d'analyse nouvelle se présente. Il existe des équations du troisième ordre non linéaires, telles que

(16) $$y'''=yy''-2y'^2,$$

ou généralement

(17) $$y'''=y^n y''-(n+1)y^{n-1}y'^2, \qquad n \text{ entier positif,}$$

dont les intégrales n'ont ni points critiques algébriques, ni pôles. Ces intégrales seraient des fonctions entières, si elles n'avaient pas de points singuliers transcendants à distance finie. Mais les résultats obtenus dans le premier chapitre relativement aux équations différentielles du premier ordre, et l'application du théorème démontré au début de ce second chapitre permettent de montrer que l'intégrale générale de l'équation (16) ou (17) n'est pas uniforme, et par conséquent possède des points critiques transcendants.

Soit l'équation (16), qui ne change pas par la transformation à deux paramètres α et β $\left(x, y;\ \alpha x+\beta, \frac{y}{\beta}\right)$; l'intégration de cette équation se ramène à l'intégration d'une équation du premier ordre suivie de deux quadratures. Posons

$$\frac{y'}{y^2}=u, \quad \frac{u'}{y}=t:$$

les variables u et t ne changent pas par la transformation précédente, et sont liées par l'équation du premier ordre

$$(18) \qquad t\frac{dt}{du} + 7ut + 6u^3 = t.$$

Le changement de variable $t = 6u^3(1 + v)$ transforme cette équation du premier ordre en l'équation

$$(19) \qquad 6u^3\frac{dv}{du} = \frac{v}{1+v} - 7u - 18u^2(1+v),$$

de la forme (1) considérée par M. Bendixson.

En définitive l'équation transformée en u de l'équation (16) est équivalente au système composé de l'équation (19) et de l'équation

$$(20) \qquad \frac{u''}{u'^2} = \frac{\frac{dt}{du}}{t} + \frac{u}{t} = \frac{\frac{dv}{du}}{1+v} + \frac{3}{u} + \frac{1}{6u^2(1+v)}.$$

Dans le plan de la variable u, au voisinage du point $u = 0$, nous avons mis en évidence au chapitre précédent une infinité d'intégrales de l'équation (19) dans les angles où $\Re(u^2)$ est positif, et dans les angles où $\Re(u^2)$ est négatif une seule intégrale; ces intégrales $v(u)$ sont holomorphes et tendent vers zéro quand la variable u tend vers le point $u = 0$ dans l'angle correspondant, et admettent comme développement asymptotique la série entière en u sans terme constant qui vérifie formellement l'équation (19):

$$(21) \qquad v = 7u + 67u^2 + \cdots$$

Substituons l'une de ces intégrales $v(u)$ dans le second membre de l'équation (20): ce second membre prend, au voisinage du point $u = 0$, dans l'angle correspondant la forme requise pour l'application du théorème démontré précédemment. Il résulte que la fonction $u(x)$ correspondante, et par suite aussi l'intégrale $y(x)$ de l'équation (16), ne sont pas uniformes.[1]

[1] On a remarqué souvent qu'une variation simple d'un coëfficient numérique peut changer profondément la nature d'une fonction analytique: voici un nouvel exemple de ce fait. Parmi toutes les équations différentielles du troisième ordre de la forme

$$y''' = ayy'' + by'^2,$$

où a et b désignent deux constantes numériques, et qui à notre point de vue ne dépendent que du paramètre $\frac{b}{a}$, les seules dont l'intégrale générale soit uniforme sont celles qui se ramènent aux trois suivantes:

Il importe d'établir que la série entière en u (21) qui vérifie formellement l'équation (19) est divergente; sans quoi le théorème démontré au début de ce chapitre serait superflu. Considérons la série entière

$$t = 6\,u^3 + 42\,u^4 + 402\,u^5 + \cdots + a_n u^n + \cdots$$

qui vérifie formellement l'équation (18). Pour $n > 5$ les coëfficients a_n de cette série sont déterminés par une relation récurrente de la forme

$$a_n = 6\,(n-2)\,a_{n-2} + \cdots + 18\,a_{n-2} + 7\,a_{n-1},$$

où les coëfficients du second membre sont tous positifs: donc les coëfficients a_n sont eux-mêmes positifs, et satisfont à l'inégalité récurrente

$$a_n > 6\,(n+1)\,a_{n-2}.$$

Par conséquent, quand n croît indéfiniment, les coëfficients a_{2n} et a_{2n+1} croissent plus rapidement que $n!$, et les deux séries entières $t(u)$ et $v(u)$ sont divergentes.

Parmi les équations d'ordre supérieur à 3, il existe de même des équations de la forme (14) analogues aux équations (16) et (17). Telle est l'équation du quatrième ordre

$$(22)\quad \begin{aligned} y^{IV} = \alpha\,[y^n y''' - (n+1)(2n+1)\,y^{n-2} y'^3] + \beta\,[y^{n-1} y' y'' - (n+1)\,y^{n-2} y'^3] + \\ + \gamma\,[y^{2n} y'' - (n+1)\,y^{2n-1} y'^2], \qquad (n \text{ entier} > 1), \end{aligned}$$

dont les intégrales n'ont ni points critiques algébriques, ni pôles, quelles que soient les constantes α, β, γ. La combinaison du théorème démontré au début de ce chapitre, et des résultats obtenus dans le chapitre précédent relativement aux équations d'ordre supérieur au premier qui généralisent l'équation (1) consi-

(α) $\quad y''' = -6\,y'^2,\quad$ d'où $\;y = \zeta(x + A;\, 0,\, B) + C$;

(β) $\quad y''' = -2\,yy'' - 2\,y'^2,\quad$ d'où $\;y' = -y^2 + Ax + B$;

(γ). $\quad y''' = \;\; 2\,yy'' - 3\,y'^2$;

ζ désignant la fonction de WEIERSTRASS, et A, B, C trois constantes d'intégration. L'intégrale générale de l'équation (α) est méromorphe et possède des pôles simples de résidu 1 qui forment un réseau de parallèlogrammes. L'intégrale générale de l'équation (β) est aussi méromorphe elle possède des pôles simples de résidu 1, qui, à mesure que l'on s'éloigne dans le plan de la variable x, s'approchent indéfiniment d'une droite de ce plan, et, l'un de l'autre, étant les zéros d'une fonction entière d'ordre $\frac{3}{2}$. Enfin l'intégrale générale de l'équation (γ) admet comme ligne singulière une circonférence ou une droite variable avec les constantes d'intégration, et n'est définie, suivant les valeurs de ces constantes, qu'à l'intérieur ou à l'extérieur de cette circonférence ou d'un côté de cette droite: elle est holomorphe dans la région où elle est définie. (Cf. Acta Mathematica, t. 34, p. 345—353.)

dérée par M. Bendixson permet, comme pour l'équation (16), d'établir que les intégrales générales de ces nouvelles équations ne sont pas uniformes. On est conduit par exemple à transformer l'équation (22) de la façon suivante. On pose

$$\frac{y'}{y^{n+1}}=u, \quad \frac{u'}{y^n}=t,$$

et l'équation transformée en u est équivalente au système

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &t^2\frac{d^2t}{du^2}+t\left(\frac{dt}{du}\right)^2+(7n+4)ut\frac{dt}{du}+(18n^2+22n+6)u^2t+(n+1)(2n+1)(3n+1)u^4=\\ &\qquad =\alpha\left[t\frac{dt}{du}+(4n+3)ut\right]+\beta ut+\gamma t,\end{aligned}\right.$$

$$(24)\quad \frac{u''}{u'^2}=\frac{\dfrac{dt}{du}}{t}+\frac{nu}{t}.$$

Il suffit de faire dans l'équation (23) les changements de variables

$$t=\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{\gamma}u^4(1+v) \quad \text{pour } \gamma\neq 0,$$

$$t=\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{(4n+3)\alpha+\beta}u^3(1+v) \quad \text{pour } \gamma=0,\ (4n+3)\alpha+\beta\neq 0,$$

ou (u, u^2), $t=\sqrt{\frac{2}{5\alpha}(n+1)(2n+1)(3n+1)u^5(1+v)}$ pour $\gamma=0,\ (4n+3)\alpha+\beta=0,\ \alpha\neq 0$

pour transformer cette équation en une équation appartenant respectivement à la deuxième, à la première ou à la troisième des formes considérées au n° 9. Dans les trois cas, l'équation obtenue possède au voisinage du point $u=0$ des intégrales $v(u)$ holomorphes dans des angles et admettant comme développement asymptotique dans ces angles la série entière en u sans terme constant qui vérifie l'équation. Il suffit de substituer le développement correspondant dans l'équation (24) pour achever la démonstration comme précédemment.

D'une façon générale, si les intégrales de l'équation différentielle d'ordre n

$$y^{(n)}=P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x)$$

où P désigne un polynôme en $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ à coëfficients analytiques en x, ont leurs points critiques fixes, le degré de ce polynôme P par rapport à chacune des variables $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ est limité par la règle suivante: con-

sidérons chaque dérivée $y^{(i)}$ comme de poids égal à l'indice de dérivation augmenté d'une unité, et la fonction y comme de poids 1; *le poids de chaque terme du polynôme P ne peut surpasser le poids de $y^{(n)}$, $n+1$.*

Il est à peine besoin de faire remarquer que pour $n>1$ la condition précédente est nécessaire, mais non suffisante pour que l'équation considérée ait ses points critiques fixes. Il existe toutefois des équations à points critiques fixes contenant des termes dont le poids atteint effectivement la limite indiquée: telle est l'équation d'ordre n

$$y^{(n)}=(y^2)^{(n-1)},$$

qui admet comme équation intégrale dépendant de $n-1$ constantes l'équation de Riccati

$$y'=y^2+P_{n-2}(x),$$

$P_{n-2}(x)$ désignant un polynôme de degré $n-2$ en x à coëfficients arbitraires.

13. Considérons maintenant les équations différentielles à points critiques fixes de la forme

$$y^{(n)}=R(y^{(n-1)},y^{(n-2)},\ldots,y',y;x), \tag{25}$$

où R désigne une fraction rationnelle en $y^{(n-1)}, y^{(n-2)},\ldots, y', y$ à coëfficients analytiques en x. Sauf dans un cas d'exception, le degré de la fraction rationnelle R par rapport à chacune des variables $y^{(n-1)}, y^{(n-2)},\ldots, y', y$ est susceptible d'une limitation analogue à celle que nous venons d'obtenir quand la fraction rationnelle R est un polynôme, et cette limitation peut être obtenue par les mêmes méthodes, sans qu'on ait à résoudre de difficulté d'analyse nouvelle.

La fraction R étant par rapport à la variable $y^{(n-1)}$ un polynôme du second degré au plus, l'équation (25) est de la forme

$$\begin{cases} y^{(n)}=R_1(y^{(n-2)},y^{(n-3)},\ldots,y',y,x)\,[y^{(n-1)}]^2+\\ \qquad +R_2(y^{(n-2)},y^{(n-3)},\ldots,y',y,x)\,y^{(n-1)}+R_3(y^{(n-2)},y^{(n-3)},\ldots,y',y,x),\end{cases} \tag{26}$$

R_1, R_2, R_3 désignant des fractions rationnelles en $y^{(n-2)}, y^{(n-3)},\ldots, y', y$ à coëfficients analytiques en x.

Dans le cas de l'équation du second ordre

$$y''=R_1(y,x)\,y'^2+R_2(y,x)\,y'+R_3(y,x),$$

M. Painlevé a démontré que les pôles $y = a(x)$ des fractions rationnelles R_1, R_2, R_3 sont simples, et que le nombre de ces pôles pour l'ensemble des trois fractions (le point $y = \infty$ compris) ne peut surpasser 4: par là les degrés en y des trois fractions R_1, R_2, R_3 sont limités. Et le résultat précédent entraîne comme conséquence la limitation du degré en $y^{(n-2)}$ des fractions R_1, R_2, R_3 de l'équation (26). Ainsi, dans l'équation du troisième ordre

$$y''' = R_1(y', y, x)\, y''^2 + R_2(y'', y', x)\, y' + R_3(y', y, x), \tag{27}$$

les pôles $y' = a(y, x)$ des fractions R_1, R_2, R_3 sont simples, le nombre de ces pôles pour l'ensemble des trois fractions ne peut surpasser 3; enfin les ordres d'infinitude des trois fractions R_1, R_2, R_3 pour $y' = \infty$ ne peuvent surpasser respectivement -1, 1 et 3.

La combinaison de la méthode introduite par M. Painlevé et de la méthode que nous avons appliquée aux équations (16) et (22) permet d'obtenir, en ce qui concerne les degrés en y des mêmes fractions R_1, R_2, R_3 de l'équation (27), les résultats suivants.[1] Chacune des équations différentielles du premier ordre que l'on obtient en annulant l'un des facteurs polaires irréductibles des fractions R_1, R_2, R_3 a ses points critiques fixes. La fraction R_1 n'a pas de pôles de la forme $y = a(x)$, les pôles $y = a(x)$ de la fraction R_2 sont simples, ceux de la fraction R_3 sont doubles au plus. Enfin le nombre des pôles $y = a(x)$ de l'ensemble des deux fractions R_2 et R_3 (le point $y = \infty$ compris) ne peut surpasser 6, sauf dans des équations (27) qui se ramènent aux équations fuchsiennes et kleinéennes.

On sait que les fonctions fuchsiennes et kleinéennes sont uniformes dans tout leur domaine d'existence, et vérifient toutes une équation différentielle du troisième ordre de la forme

$$y''' = \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} + f(y)\, y'^3, \tag{28}$$

où $f(y)$ désigne une fonction rationnelle ou algébrique de y. Or l'intégrale générale de l'équation (28) est, quelle que soit la fonction $f(y)$, de la forme

$$y = F\left(\frac{Ax + B}{Cx + D}\right),$$

A, B, C, D désignant quatre constantes arbitraires, et cette formule permet de déduire l'intégrale générale d'une intégrale particulière autre que $y =$ constante. Les équations (28) vérifiées par une fonction fuchsienne ou kleinéenne constituent

[1] Cf. Acta Mathematica, t. 34, p. 364.

donc une classe d'équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme dans tout son domaine d'existence. L'ordre de la fonction rationnelle ou algébrique $f(y)$ en l'un de ses pôles ou points critiques est -2, conformément à la condition que nous avons obtenue pour les pôles de la fraction rationnelle R_3 de l'équation (27); mais le nombre des pôles et points critiques de la fonction $f(y)$ n'est pas limité.

Ainsi, sauf dans des équations qui se ramènent à la classe précédente, les degrés des fractions R_1, R_2, R_3 en y se trouvent limités dans l'équation (27). Et le résultat obtenu entraîne comme conséquence la limitation des degrés en $y^{(n-3)}$ des fractions R_1, R_2, R_3 de l'équation (26), sauf pour des équations se ramenant aux équations fuchsiennes et kleinéennes. Sauf pour de telles équations encore, les mêmes méthodes permettent de limiter les degrés en y des coëfficients de l'équation (26) pour $n=4$, et ainsi de suite, sans qu'on rencontre de nouvelle difficulté d'analyse.

Considérons enfin les équations différentielles d'ordre n, algébriques en $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y$, analytiques en x, mais de degré supérieur à 1 en $y^{(n)}$, et, parmi ces équations, considérons celles dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, l'intégrale singulière ou les intégrales singulières pouvant avoir des points critiques mobiles. Les mêmes méthodes s'étendent à ces nouvelles équations, et, au moins jusqu'au troisième ordre et avec le même cas d'exception, donnent une limitation analogue, à des transformations birationnelles près, à celle qui est valable pour une équation du premier degré en $y^{(n)}$, sans qu'on ait à résoudre d'autres difficultés nouvelles que des difficultés arithmétiques.

Juillet 1914.

ÜBER LINEARE FUNKTIONALGLEICHUNGEN.

Von

FRIEDRICH RIESZ

in Kolozsvár.

Die vorliegende Arbeit behandelt das Umkehrproblem für eine gewisse Klasse von linearen Transformationen stetiger Funktionen, nebst Anwendung auf die Fredholm'sche Integralgleichung. Dabei kommt es uns weniger auf neue Resultate an, als auf die Erprobung einer äusserst elementaren Methode. Zu Grunde gelegt werden einige in § 1. entwickelte Sätze über lineare Funktionalmannigfaltigkeiten, die fast unmittelbar aus der Definition der gleichmässigen Konvergenz fliessen. Die wesentlichsten Beweise sind eine Art von Endlichkeitsbeweisen, indem nämlich gezeigt wird, dass gewisse Prozesse sich nicht ins Unendliche fortsetzen lassen, sondern notwendig abbrechen. Der wichtigste Begriff, der hiebei zur Verwendung kommt, ist der von Herrn Fréchet in die allgemeine Mengenlehre eingeführte Begriff der kompakten Menge (hier spezieller kompakte Folge), der sich in verschiedenen Zweigen der Analysis ganz besonders bewährt hat. Dieser Begriff gestattet eine besonders einfache und glückliche Formulierung der Definition der vollstetigen Transformation, die im wesentlichen einer ähnlichen Begriffsbildung von Herrn Hilbert für Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen nachgebildet ist.

Die in der Arbeit gemachte Einschränkung auf stetige Funktionen ist nicht von Belang. Der in den neueren Untersuchungen über diverse Funktionalräume bewanderte Leser wird die allgemeinere Verwendbarkeit der Methode sofort erkennen; er wird auch bemerken, dass gewisse unter diesen, so die Gesamtheit der quadratisch integrierbaren Funktionen und der Hilbert'sche Raum von unendlich vielen Dimensionen noch Vereinfachungen gestatten, während der hier behandelte scheinbar einfachere Fall als Prüfstein für die allgemeine Verwendbarkeit betrachtet werden darf.

§ 1. Definitionen und Hilfssätze.

Den folgenden Betrachtungen legen wir die Gesamtheit der auf der Strecke $a \leqq x \leqq b$ erklärten, daselbst überall stetigen Funktionen $f(x)$ zu Grunde. Die Veränderliche x wird also für reell vorausgesetzt, dagegen sind als Funktionswerte auch komplexe gestattet. Doch will ich sofort betonen, dass unsere Entwickelungen auch für die engere Gesamtheit der reellen Funktionen ohne Weiteres gelten.

Die zu Grunde gelegte Gesamtheit werden wir der Kürze halber als *Funktionalraum* bezeichnen. Ferner nennen wir *Norm* von $f(x)$ und bezeichnen mit $\|f\|$ den Maximalwert von $|f(x)|$; die Grösse $\|f\|$ ist danach im Allgemeinen positiv und verschwindet nur dann, wenn $f(x)$ identisch verschwindet. Ferner bestehen für sie die Beziehungen

$$\|cf(x)\| = |c|\,\|f(x)\|;\quad \|f_1 + f_2\| \leqq \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Unter *Distanz* der Funktionen f_1, f_2 verstehen wir die Norm $\|f_1 - f_2\| = \|f_2 - f_1\|$ ihrer Differenz. Danach ist die gleichmässige Konvergenz einer Funktionenfolge $\{f_n\}$ gegen die Grenzfunktion f gleichbedeutend damit, dass die Distanz $\|f - f_n\|$ gegen Null konvergiert. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmässige Konvergenz einer Folge $\{f_n\}$ besteht nach dem sogenannten allgemeinen Konvergenzprinzip in der Beziehung $\|f_m - f_n\| \to 0$ für $m \to \infty$, $n \to \infty$. Speziell wird also eine Folge $\{f_n\}$, für welche sämtliche Distanzen $\|f_m - f_n\|$ $(m \neq n)$ eine von Null verschiedene, also wesentlich positive untere Schranke besitzen, keinesfalls gleichmässig konvergieren.

Wir werden uns im folgenden mit dem Umkehrproblem für *lineare Transformationen* beschäftigen. Eine Transformation T, die jedem Elemente f unseres Funktionalraumes ein eindeutig bestimmtes Element $T[f]$ zuordnet, soll dann linear heissen, wenn sie *distributiv* und *beschränkt* ist. Die Transformation heisst distributiv, wenn identisch für alle f

$$T[cf] = cT[f],\ T[f_1 + f_2] = T[f_1] + T[f_2]$$

ist. Beschränkt heisst die Transformation dann, wenn es eine Konstante M gibt derart, dass für alle f

$$\|T[f]\| \leqq M\|f\|$$

ausfällt.

Es folgt unmittelbar aus der Definition, dass T jede beschränkte Funktionenfolge $\{f_n\}$, d. i. jede Folge, für welche sämtliche $\|f_n\|$ unter einer Schranke liegen, wieder in eine solche überführt. Ferner folgt aus

$$\|T[f]-T[f_n]\|=\|T[f-f_n]\|\leq M\|f-f_n\|,$$

dass jede gleichmässig konvergente Folge wieder in eine solche überführt wird, und dass auch die Grenzfunktionen gegenseitig einander entsprechen, kurz, dass T *stetig* ist.

Die Bezeichnungen cT, T_1+T_2, T_1T_2, T^n sind derart naheliegend, dass sie nicht besonders erklärt zu werden brauchen. Es leuchtet ferner unmittelbar ein, dass die aus linearen Transformationen auf diese Weise abgeleiteteten neuen Transformationen, also Summe, Produkt und Potenzen derselben ebenfalls linear ausfallen.

Mit E bezeichnen wir die *identische* Transformation, die jede Funktion sich selbst zuordnet. Wir werden uns nun mit der Umkehrung der Transformationen vom Typus $B=E-A$ beschäftigen, wo also E die identische Transformation bedeutet, A aber einem speziellen Typus angehört, nämlich *vollstetig* ist. Um den Begriff der Vollstetigkeit einführen und auch recht fassen zu können, müssen wir vorderhand noch einen andern Begriff, jenen der *kompakten* Folge, besprechen.

Eine Folge $\{f_n\}$ heisse nach FRÉCHET kompakt, wenn jede Teilfolge derselben eine gleichmässig konvergente weitere Teilfolge enthält. Speziell ist also auch jede gleichmässig konvergente Folge kompakt, aber nicht umgekehrt, da ja z. B. durch Ineinanderschieben von zwei gleichmässig konvergenten Folgen mit verschiedenen Grenzfunktionen auch eine kompakte Folge entsteht.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für kompakte Folgen ist schon vor langem von ARZELÀ[1] angegeben worden. Wir werden davon vorläufig keinen Gebrauch machen und begnügen uns hier damit, ein Merkmal anzugeben, an dessen Fehlen sich dann in gegebenem Falle erkennen lässt, dass eine vorgelegte Folge *nicht* kompakt ist. Dieses Merkmal besteht darin, dass *für jede kompakte Folge* $\{f_n\}$ *die untere Schranke der Distanzen* $\|f_m-f_n\|$ $(m\neq n)$ *gleich Null sein muss*, da ja die Folge gleichmässig konvergente Folgen enthält.

Eine weitere Eigenschaft kompakter Folgen, auf die es uns hier ankommt, besteht darin, dass *jede kompakte Folge zugleich beschränkt ist.* Denn im entgegengesetzten Falle müsste sie ja eine Teilfolge mit monoton ins Unendliche wachsenden Normen enthalten, deren sämtliche weitere Teilfolgen dann dieselbe Eigenschaft besässen, und somit keine derselben gleichmässig konvergent sein könnte. Jede kompakte Folge ist somit beschränkt. *Dagegen braucht nicht jede beschränkte Folge kompakt zu sein;* z. B. ist für $0\leq x\leq 1$ die Folge $f_n(x)=x^n$ beschränkt, aber nicht kompakt, da sie und also auch sämtliche Teilfolgen gegen eine für $x=1$ unstetige Funktion konvergieren.

[1] C. ARZELÀ, »*Sulle funzioni di linee*», Memorie d. R. Accad. d. Scienze di Bologna, serie 5, t. V (1895), S. 225—244.

Auf der soeben hervorgehobenen Tatsache, dass nämlich eine Folge beschränkt sein kann, ohne kompakt zu sein, beruht nun das Spezielle der *vollstetigen* linearen Transformation gegenüber der allgemeinen. Jede lineare Transformation überführt nämlich, wie wir schon gesagt haben, beschränkte Folgen in beschränkte, gleichmässig konvergente Folgen in gleichmässig konvergente und somit auch kompakte Folgen in kompakte. Wir erklären nun: eine lineare Transformation heisse vollstetig, wenn sie jede *beschränkte* Folge in eine *kompakte* überführt.

Einfachste Beispiele von vollstetigen Transformationen sind: $T[f] = f(a)$, die also jede Funktion $f(x)$ in eine überall konstante Funktion $= f(a)$ überführt; dann $T[f] = f(a) + f(b)\,x$ oder allgemeiner $T[f] = f(a_1)\,g_1(x) + \cdots + f(a_m)\,g_m(x)$, wo $a_1, \cdots, a_m, g_1, \cdots, g_m$ gegebene Stellen des Intervalls (a, b) resp. gegebene stetige Funktionen sind. Weitere Beispiele liefern das Integral

$$T[f] = \int_a^x f(x)\,dx$$

und allgemeiner das Integral

$$K[f] = \int_a^b K(x, y)\,f(y)\,dy,$$

mit dem wir uns bei der Anwendung der zu gewinnenden allgemeineren Resultate auf die FREDHOLM'sche Integralgleichung näher beschäftigen werden. Das einfachste Beispiel einer *nicht* vollstetigen Transformation bietet die identische Transformation E, die ja jede Folge, also auch jede beschränkte, aber nicht kompakte Folge in sich überführt.

Es folgt unmittelbar aus der Definition, dass *das Produkt $T_1 T_2$ sicher vollstetig wird, wenn wenigstens eine der beiden Faktoren vollstetig ist.* Da ferner aus gleichmässig konvergenten, also auch aus kompakten Folgen durch Multiplikation mit einer Konstanten oder durch gliedweise Addition wieder gleichmässig konvergente resp. kompakte Folgen entstehen, so folgt, dass zugleich mit T, T_1, T_2 auch $c\,T$ und $T_1 + T_2$ vollstetig sind.

Wir haben noch einen Begriff zu erläutern, der für die folgenden Untersuchungen grundlegend ist, nämlich den Begriff der *linearen Mannigfaltigkeit.* Darunter verstehen wir jede Mannigfaltigkeit von Elementen unseres Funktionalraumes, die folgenden Bedingungen genügt: 1) mit f, f_1, f_2 zugleich sind auch $cf, f_1 + f_2$ darin enthalten; 2) sind die Elemente einer gleichmässig konvergenten Folge $\{f_n\}$ darin enthalten, so ist es auch die Grenzfunktion f. Beispiele für lineare Mannigfaltigkeiten bietet der Funktionalraum selbst, dann, um gleich das andere

Extrem zu nennen, die aus der einzigen Funktion $f = 0$ bestehende Mannigfaltigkeit. Ferner werden, wie dies unmittelbar aus der Definition folgt, durch jede beliebige Funktionenmenge zwei lineare Mannigfaltigkeiten mitbestimmt, nämlich 1) die Gesamtheit der linearen Verbindungen und deren Grenzfunktionen (im Sinne gleichmässiger Konvergenz), 2) die Gesamtheit jener stetigen Funktionen, für welche das mit jeder beliebigen Funktion der Menge gebildete Produktintegral gleich Null ist.

Wir wollen nun einige fast unmittelbar aus den Definitionen fliessende Sätze über lineare Mannigfaltigkeiten aufstellen, die uns für die folgenden Untersuchungen als Hilfssätze dienen werden.

Hilfssatz 1. Ist L eine beliebige lineare Mannigfaltigkeit und g eine Funktion, die ihr nicht angehört, dann gibt es in L eine Funktion f_1 derart, dass für sämtliche Funktionen f in L die Ungleichung besteht:

$$\|g - f\| \geq \tfrac{1}{2}\|g - f_1\|.$$

Beweis. Da die Funktion g nicht der Mannigfaltigkeit L angehört, so ist die untere Grenze d der Distanzen $\|g - f\|$ von Null verschieden; denn im entgegengesetzten Falle würde L eine gegen g gleichmässig konvergierende Folge, also auch g enthalten. Wir wählen nun f_1 so, dass $\|g - f_1\| \leq 2d$ wird; da andererseits für alle f die Distanz $\|g - f\| \geq d$ ist, so folgt unsere Ungleichung.

Hilfssatz 2. Ist von den beiden linearen Mannigfaltigkeiten L_1, L_2 die eine, L_2, echter Teil von L_1, d. h. ist L_2 in L_1 enthalten, ohne damit identisch zu sein, so gibt es in L_1 eine Funktion g_1 derart, dass einerseits

$$\|g_1\| = 1,$$

andererseits für alle Elemente f von L_2

$$\|g_1 - f\| \geq \tfrac{1}{2}$$

ausfällt.

Beweis. Nach Voraussetzung enthält L_1 wenigstens ein Element g, welches nicht zu L_2 gehört. Nach Hilfssatz 1. gibt es nun in L_2 ein Element f_2, so dass für alle f in L_2 die Ungleichung besteht

$$\frac{\|g - f\|}{\|g - f_2\|} \geq \frac{1}{2}.$$

Wir setzen

$$g_1 = \frac{g - f_2}{\|g - f_2\|};$$

dann ist also $|g_1| = 1$, ferner ist g_1 als lineare Verbindung von g und f_2 in L_1 enthalten und endlich ist

$$g_1 - f = \frac{g - f_2}{|g - f_2|} - f = \frac{g - f_2 - |g - f_2| f}{|g - f_2|} = \frac{g - f_3}{|g - f_2|},$$

wo die Funktion $f_3 = f_2 + |g - f_2| f$ als lineare Verbindung von f_2 und f in L_2 enthalten ist; also ist auch

$$|g_1 - f| = \frac{|g - f_3|}{|g - f_2|} \geq \frac{1}{2}.$$

In beiden Hilfssätzen lässt sich die Zahl $\frac{1}{2}$ evidentermassen durch jede beliebige positive Zahl < 1 ersetzen. Dagegen kann man sie im allgemeinen nicht durch 1 selbst ersetzen. Nehmen wir z. B. als L_1 die Gesamtheit jener Funktionen, für welche $g(a) = 0$ ist, als L_2 aber jene, für welche ausserdem noch das über (a, b) erstreckte Integral verschwindet. Dann sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2. erfüllt. Würde es nun eine Funktion g_1 in L_1 geben derart, dass $|g_1| = 1$ und dass für alle f aus L_2 die Distanz $|g_1 - f| \geq 1$ wäre, alsdann müsste diese Funktion g_1 auch noch die weitere Extremaleigenschaft besitzen, unter allen g aus L_1, für welche $|g| \leq 1$ ist, das Integral von g dem absoluten Werte nach zu einem Maximum zu machen. Denn gäbe es eine Funktion g_2 in L_1, für welche $|g_2| \leq 1$ und das Integral grösser als für g_1 ausfiele, dann würde sich aus der Gleichung

$$\int_a^b g_1(x)\,dx - \xi \int_a^b g_2(x)\,dx = 0$$

eine Zahl ξ ergeben, für welche $|\xi| < 1$ wäre und andererseits die Funktion $f = g_1 - \xi g_2$ zu L_2 gehörte. Dann wäre aber $|g_1 - f| = |\xi g_2| \leq |\xi| < 1$, gegen unsere Annahme. Also erreicht der absolute Wert des Integrals bei g_1 sein Maximum. Nun ist aber wegen der Bedingung $|g| \leq 1$ dieses Maximum sicher $\leq b - a$, andererseits kommt man aber an diesen Wert $b - a$ beliebig nahe heran durch Funktionen g, die fast überall gleich 1 sind und nur nahe bei a stetig in 0 übergehen. Also ist das Integral von g_1 dem absoluten Werte nach gleich $b - a$, d. i. der Länge des Integrationsintervalls. Das wäre aber wegen der Stetigkeit von g_1 und wegen $|g_1| = 1$ nur so möglich, wenn überall $|g_1| = 1$ wäre, was jedoch der Annahme $g_1(a) = 0$ widerspricht.

Das soeben besprochene Beispiel zeigt also, dass in Hilfssatz 2. die Zahl $\frac{1}{2}$ nicht allgemein durch 1 ersetzt werden darf. Ein entsprechendes Beispiel für

Hilfssatz 1. erhält man, indem man für L die soeben benutzte Mannigfaltigkeit L_2 wählt, für g aber z. B. die Funktion $x-a$ oder jede beliebige Funktion aus L_1, die nicht zugleich L_2 angehört. In einem speziellen Falle lässt sich jedoch in beiden Sätzen sicher die Zahl 1 verwenden, nämlich dann, wenn L resp. L_2 von *endlicher Dimensionszahl* sind. Hierunter verstehen wir den Fall, wo sämtliche Elemente der Mannigfaltigkeit als lineare Verbindungen aus einer *endlichen* Anzahl unter ihnen dargestellt werden können. Es genügt, wenn wir nur den ersten Hilfssatz entsprechend umformen.

Hilfssatz 3. Ist L eine lineare Mannigfaltigkeit endlicher Dimensionszahl und g eine Funktion, die ihr nicht angehört, dann gibt es in L eine Funktion f^* derart, dass für sämtliche f in L die Ungleichung besteht

$$\|g-f\| \geq \|g-f^*\| .$$

Der Beweis dieser Behauptung stützt sich auf den

Hilfssatz 4. Wenn eine aus den Elementen einer linearen Mannigfaltigkeit endlicher Dimensionszahl gebildete Folge beschränkt ist, so ist sie auch kompakt.

Beweis der Hilfssätze 4. und 3. Nach Voraussetzung lassen sich alle Elemente der Mannigfaltigkeit in der Form

$$g = c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_k g_k$$

darstellen. Wir dürfen voraussetzen, dass die als Basis der Darstellung dienenden Funktionen $g_1, \cdots, g_k$ linear unabhängig sind; im entgegengesetzten Fall würden wir die überflüssigen weglassen. Um 4. zu beweisen, genügt es nun zu zeigen, dass aus der Annahme einer Schranke für

$$\|g\| = \|c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k\|$$

das Vorhandensein einer entsprechenden Schranke für alle $|c_i|$ folgt, dass also für eine beschränkte Folge von Elementen g auch die entsprechenden Punkte $(c_1, \cdots, c_k)$ des k-dimensionalen Raumes eine beschränkte Folge bilden, woraus dann Hilfssatz 4. auf Grund des Bolzano-Weierstrass'schen Satzes unmittelbar folgt.

Es bleibt somit nur zu zeigen, dass die Beschränktheit von $\|g\|$ auch eine Schranke für die $|c_i|$ bedingt. Die entgegengesetzte Annahme würde die Existenz einer beschränkten Folge von Funktionen g nach sich ziehen, für welche die entsprechenden Summen $|c_1| + \cdots + |c_k|$ über jede Grenze wachsen. Aus dieser Folge würde, indem man jede Funktion durch die entsprechende Summe $|c_1| + \cdots + |c_k|$ dividiert, eine neue, gleichmässig gegen Null konvergierende Folge entstehen,

für deren sämtliche Elemente $|c_1| + \cdots + |c_k| = 1$ wäre. Auf Grund des Bolzano-Weierstrass'schen Satzes würde es dann eine Teilfolge geben, für welche die Koeffizienten c_i gegen entsprechende Grenzwerte c_i^* konvergierten; und es wäre auch $|c_1^*| + \cdots + |c_k^*| = 1$. Da nun aus $c_1 \to c_1^*, \cdots, c_k \to c_k^*$ auch

$$c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k \to c_1^* g_1 + \cdots c_k^* g_k$$

folgt, während andererseits bereits die ganze Folge, also auch die Teilfolge gegen Null konvergiert, so müsste $c_1^* g_1 + \cdots + c_k^* g_k = 0$, also wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Funktionen $g_1, \cdots, g_k$ auch $c_1^* = 0, \cdots, c_k^* = 0$ ausfallen; dem widerspricht aber die Beziehung $|c_1^*| + \cdots + |c_k^*| = 1$.

Damit ist der Beweis für 4. erbracht. Nun folgt 3. aus 4. durch folgende Überlegung. Es handelt sich darum, zu zeigen, dass $\|g - f\|$ ihre untere Schranke wirklich erreicht. Es sei $\{f_n\}$ eine Folge, für welche $\|g - f_n\|$ gegen die untere Schranke d von $\|g - f\|$ konvergiert, dann ist die Folge $\{g - f_n\}$ sicher beschränkt und wegen $\|f_n\| \leq \|g\| + \|g - f_n\|$ ist es auch die Folge $\{f_n\}$. Nach Hilfssatz 4. ist dann die beschränkte Folge $\{f_n\}$ auch kompakt. Also gibt es eine gleichmässig konvergente Teilfolge und die Grenzfunktion f^* dieser Teilfolge besitzt wegen $\|g - f^*\| \leq \|g - f_n\| + \|f_n - f^*\| \to d$ die gewünschte Eigenschaft, ein Minimum für $\|g - f\|$ zu liefern.

Der Hilfssatz 5., den wir nun aufstellen, ist ein Gegenstück zu Hilfssatz 4.; er sagt nämlich aus, dass die Kompaktheit sämtlicher beschränkter Folgen für die linearen Mannigfaltigkeiten von *endlicher Dimensionszahl* charakteristisch ist.

Hilfssatz 5. Wenn jede beschränkte Folge von Elementen einer linearen Mannigfaltigkeit kompakt ist, so ist die Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionszahl.

Beweis. Im entgegengesetzten Falle würde die Mannigfaltigkeit eine Folge $\{g_n\}$ enthalten, deren sämtliche Elemente von den übrigen linear unabhängig sind, d. i. keines derselben lässt sich als lineare Verbindung der Vorangehenden darstellen. Bezeichnen wir mit L_k die Gesamtheit der linearen Verbindungen von $g_1, \cdots, g_k$; dann ist g_{k+1} sicher nicht in L_k enthalten. Andererseits ist L_k eine lineare Mannigfaltigkeit; denn einerseits enthält sie sämtliche lineare Verbindungen ihrer Elemente, andererseits aber folgt, wie wir dies bei dem Beweise von Hilfssatz 4. auseinandersetzten, aus $\|c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k\| \to 0$ auch $c_1 \to 0, \cdots, c_k \to 0$ und somit aus der gleichmässigen Konvergenz einer Folge $\{g^{(n)} = c_1^{(n)} g_1 + \cdots + c_k^{(n)} g_k\}$ gegen eine Grenzfunktion g^* auch die Konvergenz der Koeffizienten $c_i^{(n)}$ gegen entsprechende Grenzwerte c_i^*, so dass $g^* = c_1^* g_1 + \cdots + c_k^* g_k$ ausfällt, also der Mannigfaltigkeit L_k angehört. Da ferner L_k echter Teil von L_{k+1} ist, so gibt es in L_{k+1} nach Hilfssatz 2. sicher eine Funktion f_k derart, dass $\|f_k\| = 1$ ist, während

ihre Distanz von jeder Funktion aus L_k wenigstens $1/2$ ausmacht.[1] Die Funktionen f_k $(k = 1, 2, \ldots)$ bilden wegen $\|f_k\| = 1$ eine beschränkte Folge. Andererseits ist für $i \neq k$ die Distanz $\|f_i - f_k\| \geq \frac{1}{2}$, da entweder f_i der Mannigfaltigkeit L_k, oder aber f_k der Mannigfaltigkeit L_i angehört. Also ist die untere Schranke der Distanzen $\|f_i - f_k\|$ $(i \neq k)$ von Null verschieden und die *beschränkte* Folge $\{f_k\}$ ist somit *nicht kompakt.*

Hilfssatz 6. Haben die linearen Mannigfaltigkeiten L_1 und L_2 ausser $f = 0$ kein gemeinsames Element, und ist wenigstens eine der beiden Mannigfaltigkeiten von endlicher Dimensionszahl, dann gibt es eine Konstante C derart, dass für jedes Element f aus L_1 und jedes Element g aus L_2

$$\|f\| + \|g\| \leq C\,\|f + g\|.$$

Beweis. Im entgegengesetzten Falle würde es je eine Folge $\{f_n\}$ und $\{g_n\}$ geben derart, dass $\|f_n\| + \|g_n\| > n\,\|f_n + g_n\|$, und wir dürfen auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|f_n\| + \|g_n\| = 1$ voraussetzen, da dies durch Division von f_n und g_n durch $\|f_n\| + \|g_n\|$ stets erreicht werden kann. Nun sei z. B. L_1 von endlicher Dimensionszahl, dann ist die beschränkte Folge $\{f_n\}$ nach Hilfssatz 4. auch kompakt; es gibt daher eine gleichmässig konvergente Teilfolge $f^{(n)} \to f^*$. Da ferner $\|f^{(n)} + g^{(n)}\| < \frac{1}{n} \to 0$, also gleichmässig $f^{(n)} + g^{(n)} \to 0$, so wird auch gleichmässig $g^{(n)} \to -f^*$. Daraus folgt einerseits $\|f^{(n)}\| \to \|f^*\|$,[2] $\|g^{(n)}\| \to \|-f^*\| = \|f^*\|$ und somit wegen $\|f^{(n)}\| + \|g^{(n)}\| = 1$ auch $2\,\|f^*\| = 1$; andererseits müsste f^* als Grenzfunktion von $\{f^{(n)}\}$ resp. von $\{-g^{(n)}\}$ beiden Mannigfaltigkeiten L_1, L_2 angehören und somit überall verschwinden, was jedoch der soeben bewiesenen Beziehung $2\,\|f^*\| = 1$ widerspricht.

§ 2. Die Umkehrung der linearen Transformation.

Wir betrachten die Transformation $B = E - A$, wo E die *identische*, A aber eine *vollstetige* lineare Transformation unseres Funktionenraumes bedeuten. Die homogene Funktionalgleichung $B[\varphi] = 0$ hat sicher eine Lösung, nämlich die

[1] Da L_k von endlicher Dimensionszahl ist, liesse sich $1/2$ durch 1 ersetzen; doch kommt es uns hier auf diese tiefer liegende Tatsache nicht an; der entsprechende Hilfssatz 3. gelangt erst später zur Verwendung.

[2] Die Grenzgleichung $\|f^{(n)}\| \to \|f^*\|$ für jede gleichmässig konvergente Folge $f^{(n)} \to f^*$ erhält man am einfachsten aus den beiden Ungleichungen $\|f^*\| \leq \|f^* - f^{(n)}\| + \|f^{(n)}\|$, $\|f^{(n)}\| \leq \|f^* - f^{(n)}\| + \|f^*\|$ und aus der Grenzgleichung $\|f^* - f^{(n)}\| \to 0$.

Funktion, die überall gleich Null ist. Ausser dieser »identisch verschwindenden» Lösung können noch weitere auftreten. Die Gesamtheit der Lösungen bildet eine *lineare Mannigfaltigkeit,* da ja wegen Distributivität und Stetigkeit der linearen Transformationen jede lineare Verbindung von Lösungen und auch jede Grenzfunktion im Sinne gleichmässiger Konvergenz ebenfalls Lösungen sind. Die spezielle Voraussetzung, dass A *vollstetig* ist, gestattet nun, die Mannigfaltigkeit der Lösungen näher zu charakterisieren.

Satz 1. Die Lösungen der homogenen Gleichung

$$B[\varphi] = 0$$

bilden eine lineare Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionszahl.

Beweis. Wegen $E = A + B$ ist für die Lösungen $\varphi = A[\varphi]$, d. i. sämtliche Elemente unserer linearen Mannigfaltigkeit werden durch A in sich selbst überführt. Da A vollstetig ist, so übergeht jede beschränkte Teilfolge in eine kompakte, und da sie andererseits in sich selbst übergeht, so ist jede beschränkte Teilfolge kompakt. Also ist die Mannigfaltigkeit nach Hilfssatz 5. von endlicher Dimensionszahl.

Satz 1'. Die Lösungen der homogenen Gleichung

$$B^n[\varphi] = 0$$

bilden eine lineare Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionszahl.

Beweis. Die Transformation

$$B^n = (E - A)^n = E - A(nE - \cdots) = E - C$$

ist vom selben Typus wie B selbst; die Transformation

$$C = A(nE - \cdots)$$

ist nämlich als Produkt zweier Transformationen, von denen die eine, A, vollstetig ist, ebenfalls vollstetig. Also ist 1'. ein Korollar von 1.

Bevor wir den Satz 2. aussprechen, bemerken wir zunächst, dass jede Lösung der Gleichung $B^n[\varphi] = 0$ wegen $B^{n+1} = BB^n$ auch die Gleichung $B^{n+1}[\varphi] = 0$ befriedigt. Also definieren die Gleichungen $B^n[\varphi] = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$ eine Folge von linearen Mannigfaltigkeiten, deren jede in allen Folgenden enthalten ist. Es frägt sich nun, ob die einzelnen Mannigfaltigkeiten *echte* Teile der folgenden sind? Vor allem ist klar, dass wenn z. B. die m-te Mannigfaltigkeit kein echter Teil der $m + 1$-ten und also mit dieser identisch ist, dies dann auch für alle folgenden der Fall ist. Gäbe es nämlich eine erste Mannigfaltigkeit, für welche dies nicht

mehr zutrifft, und bezeichnen wir den entsprechenden Exponent mit $n+1$, so würde es also eine Funktion φ geben, für welche $B^{n+1}[\varphi]=0$, $B^n[\varphi]\neq 0$ wäre. Wir setzen $\psi=B^{n-m}[\varphi]$; dann wird $B^{m+1}[\psi]=B^{n+1}[\varphi]=0$ und $B^m[\psi]=B^n[\varphi]\neq 0$, d. i. es wäre schon die $m+1$-te Mannigfaltigkeit nicht mehr mit der m-ten identisch, entgegen der Voraussetzung.

Es sind also nur zwei Fälle möglich: entweder treten bei jedem Schritte neue Lösungen auf, oder es bricht dies bei einem Exponenten n ab, von wo an sämtliche Mannigfaltigkeiten identisch sind. Der nun zu beweisende Satz 2. wird den ersten Fall ausschliessen.

Satz 2. Es gibt eine Zahl ν derart, dass für $n>\nu$ jede Lösung der Gleichung

$$B^n[\varphi]=0$$

auch schon die Gleichung

$$B^\nu[\varphi]=0$$

befriedigt, während für $n<\nu$ die Gleichung

$$B^{n+1}[\varphi]=0$$

auch neue, d. i. solche Lösungen besitzt, welche die Gleichung

$$B^n[\varphi]=0$$

nicht befriedigen.

Beweis. Im entgegengesetzten Falle müsste es für jedes n auf Grund des Hilfssatzes 2. eine Funktion φ_n geben, für welche $B^{n+1}[\varphi_n]=0$, $\|\varphi_n\|=1$ ist, während für jede Funktion φ, die schon die Gleichung $B^n[\varphi]=0$ befriedigt, $\|\varphi_n-\varphi\|\geqq\frac{1}{2}$ ausfällt. Die Funktionen φ_n bilden für $n=1, 2, \ldots$ eine beschränkte Folge; also bilden, da A vollstetig ist, die Funktionen $g_n=A[\varphi_n]$ eine *kompakte* Folge. Betrachten wir die Differenz

$$g_n-g_m=A[\varphi_n-\varphi_m],$$

wo $m<n$. Da $A=E-B$ ist, so wird

$$g_n-g_m=\varphi_n-(\varphi_m+B[\varphi_n]-B[\varphi_m])=\varphi_n-\varphi,$$

wo wegen $m<n$

$$B^n[\varphi]=B^n[\varphi_m]+B^{n+1}[\varphi_n]-B^{n+1}[\varphi_m]=0$$

ist. Also ist

$$\|g_n - g_m\| = \|\varphi_n - \varphi\| \leqq \frac{1}{2}$$ [1]

und somit ist die Folge $\{g_n\}$ sicher *nicht kompakt.* Unsere Annahme führt also zu einem Widerspruch. Definieren wir noch $B^0 = E$, so ist auch der Fall $\nu = 0$, d. i. der Fall, wo die homogene Gleichung ausser der identisch verschwindenden keine Lösung zulässt, in dem Satze mit inbegriffen.

Aus Satz 2. folgt sofort der

Satz 3. Hat die Gleichung

$$B[\varphi] = g$$

für jede beliebig gegebene stetige Funktion g eine Lösung, so ist diese Lösung eindeutig bestimmt.

Beweis. Mit anderen Worten sagt der Satz aus, dass *wenn die inhomogene Gleichung ohne Ausnahme lösbar ist, die entsprechende homogene Gleichung ausser der identisch verschwindenden keine weitere Lösung besitzt.* Dies zeigen wir wie folgt. Hätte die Gleichung $B[\varphi] = 0$ auch eine nicht identisch verschwindende Lösung φ_1, so sei φ_2 eine Lösung der Gleichung $B[\varphi] = \varphi_1$, φ_3 eine Lösung der Gleichung $B[\varphi] = \varphi_2$ u. s. f., allgemein φ_{n+1} eine Lösung der Gleichung $B[\varphi] = \varphi_n$. Dann wäre für jedes $n > 1$ die Funktion $B^n[\varphi_n] = 0$ und $B^{n-1}[\varphi_n] \neq 0$. Dies aber widerspricht dem Satze 2.

Wir lassen nun die Voraussetzung des Satzes 3. fallen und fragen ganz allgemein, wie die Mannigfaltigkeit der Funktionen g, für welche die Gleichung lösbar ist, ausschaut? Die Antwort erteilt der Satz 5.; der Satz 4. bereitet den Beweis des Satzes 5. vor.

Satz 4. Es gibt eine nur von der Transformation B abhängende Konstante G derart, dass immer, wenn die Gleichung

$$B[\varphi] = g$$

lösbar ist, für wenigstens eine der Lösungen

$$\|\varphi\| \leq G\|g\|$$

ausfällt.

Beweis. Ist φ eine Lösung, so ist die allgemeine Lösung $\varphi - f$, wo f eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung $B[f] = 0$ bedeutet. Da die Funktionen f nach Satz 1. eine lineare Mannigfaltigkeit *endlicher Dimensionszahl* bilden, so

---

[1] Auch hier lässt sich die Zahl $1/2$ durch 1 ersetzen, da ja alle in Betracht kommenden Mannigfaltigkeiten von endlicher Dimensionszahl sind.

gibt es unter ihnen auf Grund von Hilfssatz 3. eine Funktion f^* derart, dass für alle f

$$\|\varphi - f^*\| \leq \|\varphi - f\|$$

ist. Dann ist aber die Funktion $\varphi^* = \varphi - f^*$ eine Minimallösung der Gleichung $B[\varphi] = g$, so dass also für alle der homogenen Gleichung $B[f] = 0$ genügenden f die Ungleichung $\|\varphi^*\| \leq \|\varphi^* - f\|$ besteht. Der Satz 4. wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass die Quotienten $\frac{\|\varphi^*\|}{\|g\|}$ für alle g, für welche die Gleichung überhaupt lösbar ist, unterhalb einer gemeinsamen Schranke G liegen. Die entgegengesetzte Annahme würde die Existenz einer Folge $\{g_n\}$ mit entsprechenden Minimallösungen φ_n^* nach sich ziehen, für welche

$$\frac{\|\varphi_n^*\|}{\|g_n\|} \to \infty.$$

Da nun $c\varphi_n^*$ eine zu cg_n gehörige Minimallösung ist, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|\varphi_n^*\| = 1$ und somit $\|g_n\| \to 0$ annehmen. Nun ist also die Folge $\{\varphi_n^*\}$ beschränkt, also die Folge der Funktionen $A[\varphi_n^*]$ kompakt, sie enthält daher sicher eine gleichmässig konvergente Teilfolge

$$A[\varphi_{n_k}^*] \to \varphi^{**}.$$

Da ferner $E = A + B$ und also

$$\varphi_{n_k}^* = A[\varphi_{n_k}^*] + B[\varphi_{n_k}^*] = A[\varphi_{n_k}^*] + g_{n_k}$$

ist, und g_{n_k} gleichmässig gegen 0 konvergiert, so ist ebenfalls gleichmässig

$$\varphi_{n_k}^* \to \varphi^{**}.$$

Daraus folgt $B[\varphi_{n_k}^*] \to B[\varphi^{**}]$, und da andererseits $B[\varphi_{n_k}^*] = g_{n_k} \to 0$, so erhalten wir

$$B[\varphi^{**}] = 0.$$

Also wäre φ^{**} auch eine Lösung f der homogenen Gleichung und daher $\|\varphi_{n_k}^* - \varphi^{**}\| \geq \|\varphi_{n_k}^*\| = 1$ für alle k, was aber der gleichmässigen Konvergenz $\varphi_{n_k}^* \to \varphi^{**}$ widerspricht.

Satz 5. Die Transformation B überführt den Funktionalraum in eine lineare Mannigfaltigkeit.

Beweis. Aus der Distributivität der Transformation B folgt unmittelbar, dass die Transformierte mit g, g_1, g_2 zugleich auch cg und $g_1 + g_2$ enthält. Es

bleibt zu zeigen, dass für jede gleichmässig konvergente Folge $g_n \to g^*$, für welche alle g_n zu der transformierten Mannigfaltigkeit gehören, dies auch für die Grenzfunktion g^* der Fall ist; mit andern Worten, dass *zugleich mit den Gleichungen* $B[\varphi] = g_n$ *auch die Gleichung* $B[\varphi] = g^*$ *wenigstens eine Lösung besitzt.* Zu diesem Zwecke wählen wir aus der Folge $\{g_n\}$ eine Teilfolge $\{g^{(n)}\}$ derart, dass

$$\| g^* - g^{(n)} \| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

werde; dann wird auch

$$\| g^{(n+1)} - g^{(n)} \| \leq \| g^* - g^{(n+1)} \| + \| g^* - g^{(n)} \| < \frac{1}{2^n}.$$

Ferner sei φ_0 eine Lösung der Gleichung $B[\varphi] = g^{(1)}$, φ_n aber für $n = 1, 2, \ldots$ je eine solche Lösung der Gleichungen

$$B[\varphi] = g^{(n+1)} - g^{(n)},$$

für welche laut Satz 4.

$$\| \varphi_n \| \leq G \| g^{(n+1)} - g^{(n)} \| < \frac{G}{2^n}$$

ist. Alsdann konvergiert die unendliche Reihe $\varphi_0 + \varphi_1 + \cdots$ absolut und gleichmässig; ferner wird

$$B[\varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_n] = g^{(n+1)} \to g^*,$$

und somit ist für die Summe φ^* der Reihe $B[\varphi^*] = g^*$. Also hat auch die Gleichung $B[\varphi] = g^*$ wenigstens eine Lösung.

Dem Satze 6. schicken wir folgende Bemerkungen voran: Da die Transformationen B^n, wie wir schon gelegentlich des Satzes 1'. bemerkten, von demselben Typus sind wie B selbst, so darf man den Satz 5. auch auf diese Transformationen anwenden; danach überführt jede der Transformationen B^n den Funktionalraum in je eine lineare Mannigfaltigkeit L_n. Da der Funktionalraum, den wir hier mit L_0 bezeichnen wollen, die Mannigfaltigkeit L_1 enthält und da L_n und L_{n+1} aus L_0 und L_1 durch Anwendung ein und derselben Transformation, nämlich von B^n, entstehen, so ist auch L_{n+1} in L_n enthalten. Wir fragen nun, ob L_{n+1} *echter* Teil von L_n ist oder aber die beiden identisch sind. Es leuchtet unmittelbar ein, dass in dem in Satz 3. behandelten Falle, wo $L_0 = L_1$ ist, d. i. L_1 sämtliche Funktionen enthält, dies auch für alle L_n zutrifft. Allgemeiner folgt aus $L_{m+1} = L_m$ die Beziehung $L_n = L_m$ für alle $n > m$. Es sind also hienach nur zwei Fälle möglich: entweder es fallen bei jedem Schritte Elemente weg, oder aber ist

dies nur bis zu einem gewissen n der Fall, von wo an dann sämtliche Mannigfaltigkeiten identisch sind. Wir wollen zeigen, dass immer das Letztere stattfindet.

Satz 6. Es gibt eine Zahl ν derart, dass für $n > \nu$ immer $L_n = L_\nu$ wird, während für $n < \nu$ die Mannigfaltigkeit L_{n+1} echter Teil von L_n ist. Diese und die in Satz 2. definierte Zahl ν sind identisch.

Beweis. Um die Existenz einer Schwelle ν von der geforderten Eigenschaft zu beweisen, haben wir nur noch zu zeigen, dass L_{n+1} *nicht für alle n echter Teil von L_n sein kann.*

Ist L_{n+1} echter Teil von L_n, so gibt es nach Hilfssatz 2. eine Funktion g_n in L_n derart, dass $\|g_n\| = 1$ ist und dass für alle Funktionen g aus L_{n+1} die Ungleichung $\|g_n - g\| \geqq \frac{1}{2}$ besteht. Wäre dies nun für alle n der Fall, so gäbe es eine entsprechende unendliche Folge $\{g_n\}$. Da $A = E - B$ ist, so wäre also für $m < n$

$$A[g_m] - A[g_n] = g_m - (g_n + B[g_m] - B[g_n]) = g_m - g,$$

wo alle 3 Glieder des unter g zusammengefassten Ausdruckes, somit auch g selbst in L_{m+1} enhalten sind. Daraus aber folgt

$$\|A[g_m] - A[g_n]\| = \|g_m - g\| \geqq \frac{1}{2}.$$

Diese Ungleichung widerspricht aber dem Umstande, dass die Folge $\{A[g_n]\}$, die aus der beschränkten Folge $\{g_n\}$ durch Anwendung einer vollstetigen Transformation entsteht, kompakt sein muss. Damit ist die Existenz einer Schwelle ν bewiesen.

Um nun auch die zweite Behauptung des Satzes zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass die Gleichung $B[\varphi] = g$, wo g eine Funktion aus L_ν ist, wenigstens eine Lösung φ in L_ν besitzen muss, da ja L_ν durch B in sich übergeht. Wir behaupten nun, dass es in L_ν eine und nur eine Lösung gibt, mit anderen Worten, dass *die homogene Gleichung $B[\varphi] = 0$ ausser der identisch verschwindenden aus L_ν keine Lösung zulässt.* Der Beweis lautet ähnlich wie für den spezielleren Satz 3., der dem Fall $\nu = 0$ entspricht. Gäbe es in L_ν eine nicht identisch verschwindende Lösung φ_1, so sei φ_2 eine Lösung aus L_ν der Gleichung $B[\varphi] = \varphi_1$, φ_3 eine Lösung aus L_ν der Gleichung $B[\varphi] = \varphi_2$, u. s. f. Dann wäre für jedes $n > 1$ $B^n[\varphi_n] = 0$, $B^{n-1}[\varphi_n] \neq 0$, was jedoch dem Satze 2. widerspricht.

Aus der soeben bewiesenen Behauptung folgt nun, dass jede Lösung der Gleichung $B^{\nu+1}[\varphi] = 0$ auch die Gleichung $B^\nu[\varphi] = 0$ befriedigt, da ja sonst die Funk-

tion $\varphi_1 = B^\nu[\varphi]$ eine nicht identisch verschwindende Lösung aus L_ν der Gleichung $B[\psi] = 0$ wäre. Andererseits lässt sich für jedes $n < \nu$ eine Lösung von $B^{n+1}[\varphi] = 0$ finden, für velche $B^n[\varphi] \neq 0$ ist. Zu diesem Zwecke wähle man irgend eine Funktion f aus $L_{\nu-n-1}$, die aber der nächstfolgenden Mannigfaltigkeit $L_{\nu-n}$ nicht mehr angehört und für welche $B^n[f] \neq 0$ ist. Solche Funktionen gibt es sicher in der Menge $L_{\nu-n-1} - L_{\nu-n}$, denn sonst müsste die Menge $L_{\nu-1} - L_\nu$ leer ausfallen, d. h. es wäre $L_\nu = L_{\nu-1}$. Die Funktion $g = B^{n+1}[f]$ liegt in L_ν und es gibt somit auch eine Funktion f_1 in L_ν, für welche $B^{n+1}[f_1] = g$ ist. Dann befriedigt wegen $B^{n+1}[f] = B^{n+1}[f_1]$ die Funktion $\varphi = f - f_1$ die Gleichung $B^{n+1}[\varphi] = 0$; dagegen ist $B^n[\varphi] = B^n[f] - B^n[f_1] \neq 0$, da $B^n[f_1]$ der Mannigfaltigkeit L_ν angehört, während $B^n[f]$ nur in $L_{\nu-1}$, aber nicht in L_ν enthalten ist.

Somit besitzt unsere Zahl ν auch die durch Satz 2. geforderten Eigenschaften.

Der folgende Satz 7., der aus den Sätzen 2., 3., 4. und 6. fast unmittelbar folgt, enthält als Spezialfall die FREDHOLM'*sche Alternative* bez. Lösbarkeit der homogenen und der inhomogenen Integralgleichung.

Satz 7. Entweder lässt sich die Transformation B umkehren, d. h. es gibt eine inverse lineare Transformation B^{-1}, für welche $BB^{-1} = B^{-1}B = E$ ist; oder aber besitzt die homogene Gleichung $B[\varphi] = 0$ ausser der identisch verschwindenden auch weitere Lösungen.

Beweis. Der erste Fall tritt dann ein, wenn die Gleichung $B[\varphi] = g$ für jedes g lösbar, also $\nu = 0$ ist. Dann ist nämlich nach Satz 3. die Lösung eindeutig bestimmt, es wird also jedem Elemente g des Funktionalraumes ein Element φ eindeutig zugeordnet. Wir wollen zeigen, dass diese Zuordnung distributiv und beschränkt ist, also eine lineare Transformation T darstellt. Die Distributivität folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit, da zu $cg, g_1 + g_2$ die entsprechenden Elemente $c\varphi, \varphi_1 + \varphi_2$ als Lösungen gehören. Die Beschränktheit der Transformation ist aber in Satz 4. als Spezialfall enthalten. Endlich sind die Gleichungen $BT = TB = E$ eine unmittelbare Folge der Gleichung $B[\varphi] = g$.

Der zweite Fall tritt dann ein, wenn die Gleichung $B[\varphi] = g$ nicht für alle g lösbar ist. Dann ist nämlich L_1 echter Teil von L_0, somit $\nu \geqq 1$. Es gibt also nach den Sätzen 2. und 6. sicher eine Funktion φ, für welche $B[\varphi] = 0$, $\varphi = E[\varphi] = B^0[\varphi] \neq 0$ ist. Um wegen der Wichtigkeit der Behauptung das hiefür wesentliche aus dem Beweise des Satzes 6. zu wiederholen, ensteht eine solche Funktion φ aus jedem beliebigen Elemente f der Menge $L_{\nu-1} - L_\nu$ als Differenz von f und jener Funktion f_1 aus L_ν, für welche $B[f_1] = B[f]$ wird.

Damit ist Satz 7. bewiesen. Den Fall $\nu = 0$ wollen wir nun als durch den Satz erledigt betrachten und wenden uns der näheren Untersuchung des Falles $\nu \geq 1$ zu. Vor allem führen wir folgende Benennungen ein. L_ν heisse die *Kern-*

mannigfaltigkeit, ihre Elemente die *Kernelemente*. Die Lösungen der Gleichung $B^\nu[\varphi] = 0$ nennen wir *Nullelemente;* die lineare Mannigfaltigkeit *endlicher Dimensionszahl*, die sie nach Satz 1'. bilden, heisse *Nullmannigfaltigkeit*. Unabhängig von der Zahl ν kann man die Kernelemente g auch durch die Eigenschaft charakterisieren, dass die Gleichung $B^n[\varphi] = g$ für jedes n lösbar ist, die Nullelemente wieder dadurch, dass sie für genügend grosse n die Gleichung $B^n[\varphi] = 0$ befriedigen.

Es gilt der folgende *Zerlegungssatz:*

Satz 8. Jede Funktion lässt sich auf eine und nur eine Weise als Summe eines Kernelementes und eines Nullelementes darstellen.

Beweis. Um die Zerlegung der Funktion f zu bewirken, setzen wir $B^\nu[f] = g$, dann ist g ein Kernelement und die Gleichung $B^n[\varphi] = g$ ist für jedes n, also auch für $n = 2\nu$ lösbar. Sei φ_1 eine Lösung; wir setzen $f_1 = B^\nu[\varphi_1]$. Dann ist auch f_1 ein Kernelement; ferner ist $B^\nu[f_1] = B^{2\nu}[\varphi_1] = g = B^\nu[f]$, also $B^\nu[f - f_1] = 0$, d. h. $f - f_1$ ist ein Nullelement. Also liefert $f = f_1 + (f - f_1)$ die gewünschte Zerlegung.

Um nun die Eindeutigkeit der Zerlegung zu zeigen, sei $f = f_2 + (f - f_2)$ ebenfalls eine Zerlegung der gewünschten Art, d. i. f_2 sei ein Kernelement, $f - f_2$ ein Nullelement. Dann ist $f_3 = f_1 - f_2 = (f - f_2) - (f - f_1)$ gleichzeitig ein Kernelement und auch ein Nullelement. Als Kernelement lässt f_3 jedenfalls eine Lösung der Gleichung $B^\nu[\varphi] = f_3$ zu, als Nullelement befriedigt es die Gleichung $B^\nu[f_3] = 0$. Also ist $B^{2\nu}[\varphi] = 0$, und somit nach Satz 2. auch $f_3 = B^\nu[\varphi] = 0$, d. i. also $f_2 = f_1$.

Satz 9. Es gibt eine und nur eine lineare Transformation $B^{(0)}$, welche jedes Kernelement in sich selbst und jedes Nullelement in 0 überführt.[1] *Jede Funktion wird durch $B^{(0)}$ in ein Kernelement, durch $E - B^{(0)}$ in ein Nullelement verwandelt und es ist $B^{(0)2} = B^{(0)}$, $AB^{(0)} = B^{(0)}A$.*

Beweis. Nach Satz 8. entspricht jeder Funktion f ein Kernelement f_1 derart, dass $f - f_1$ ein Nullelement ist. Wir definieren die Transformation $B^{(0)}$, indem wir jeder Funktion f das entsprechende Kernelement f_1 zuordnen. Das hiedurch jedes Kernelement sich selbst enspricht und jedes Nullelement in 0 übergeht, folgt unmittelbar aus der in Satz 8. ausgeprochenen Eindeutigkeit der Zerlegung. Ferner wird laut Definition jede Funktion durch $B^{(0)}$ resp. $E - B^{(0)}$ in ein Kernelement resp. in ein Nullelement, nämlich in die nach Satz 8. entsprechenden beiden Teile verwandelt. Die Distributivität der Transformation $B^{(0)}$ folgt ebenfalls unmittelbar aus der Eindeutigkeit der Zerlegung und aus dem Umstande,

[1] Die Bezeichnung $B^{(0)}$ soll daran erinnern, dass für $\nu = 0$ die Transformation $B^{(0)}$ mit der identischen $E = B^0$ zusammenfällt.

dass die Kernelemente für sich und ebenso die Nullelemente für sich je eine lineare Mannigfaltigkeit bilden. Wir haben noch zu zeigen, dass die Transformation $B^{(0)}$ auch beschränkt und somit eine lineare Transformation ist. Dies folgt nun durch Anwendung von Hilfssatz 6. auf die Nullmannigfaltigkeit und die Kernmannigfaltigkeit, deren erstere ja von endlicher Dimensionszahl ist. Nach Hilfssatz 6. gibt es daher eine Konstante C derart, dass $\|f_1\| + \|f - f_1\| \leq C\|f\|$ und und somit a fortiori

$$\|f_1\| \leq C\|f\|$$

wird.

Um $AB^{(0)} = B^{(0)}A$ zu beweisen, genügt es nach Satz 8., das Übereinstimmen für Kern- und für Nullelemente zu zeigen. Da $A = E - B$ jedes Nullelement in ein Nullelement, $B^{(0)}$ aber in o verwandelt, so ist für ein Nullelement $AB^{(0)}[f] = B^{(0)}A[f] = o$. Für Kernelemente aber stimmen beide Transformationen mit A überein, da $B^{(0)}$ mit E übereinstimmt und A jedes Kernelement in ein ebensolches verwandelt. Endlich folgt die Gleichung $B^{(0)^2} = B^{(0)}$ daraus, dass $B^{(0)}$ laut Definition jede Funktion in ein Kernelement und dieses, wie wir gezeigt haben, in sich selbst überführt.

Wir haben noch zu zeigen, dass es nur eine Transformation von der im Satze geforderten Eigentümlichkeit gibt. Die Differenz zweier solcher Transformationen müsste sowohl jedes Kernelement, wie auch jedes Nullelement und somit auf Grund von Satz 8. überhaupt jede Funktion in o überführen; also wären die beiden Transformationen mit einander identisch.

Satz 10. Die Transformation A gestattet eine und nur eine Zerlegung in lineare Transformationen $A = A_1 + A_2$ derart, dass A_1 alle Nullelemente, A_2 aber alle Kernelemente in 0 überführt.

Die Transformation A_1 stimmt für alle Kernelemente, die Transformation A_2 für alle Nullelemente mit A überein.

Jede Funktion wird durch A_1 in ein Kernelement, durch A_2 in ein Nullelement verwandelt.

Die Transformationen A_1, A_2 sind zueinander orthogonal, d. h. es ist $A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0$.

Die Transformationen A_1 und A_2 sind vollstetig.

Beweis. Wir setzen $A_1 = B^{(0)}A = AB^{(0)}$, $A_2 = (E - B^{(0)})A = A(E - B^{(0)})$. Dann ist $A_1 + A_2 = A$. Da $B^{(0)}$ jedes Nullelement in o überführt, so ist dies auch für $A_1 = AB^{(0)}$ der Fall. Andererseits wird jedes Kernelement sowohl durch E wie durch $B^{(0)}$ in sich und somit durch $E - B^{(0)}$, also auch durch $A_2 = A(E - B^{(0)})$ in o überführt.

Die Aussage, dass A_1 für alle Kernelemente, A_2 für alle Nullelemente mit A

übereinstimmen, ist nur eine Umformulierung der definierenden Eigenschaft. Die nächste Aussage des Satzes folgt aus der entsprechenden Aussage des Satzes 9. über $B^{(0)}$ und $E - B^{(0)}$ und daraus, dass B und also auch $A = E - B$ jedes Kern- resp. Nullelement wieder in ein solches überführen.

Die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt unmittelbar aus der definierenden Eigenschaft und aus Satz 8., da A_1 und A_2 durch die definierende Eigenschaft sowohl für jedes Kernelement, wie auch für jedes Nullelement, also nach Satz 8. zufolge der Distributivität für jede Funktion eindeutig bestimmt sind.

Dass $A_1 A_2 = 0$ ist, schliessen wir wie folgt. Wenden wir $A_1 A_2$ auf eine Funktion an, so wird dies zunächst durch A_2 in ein Nullelement und dieses dann durch A_1 in 0 verwandelt. Ähnlich folgt auch $A_2 A_1 = 0$.

Endlich folgt die Vollstetigkeit der Transformationen A_1, A_2 aus ihrer Produktdarstellung zufolge des vollstetigen Faktors A.

Der nächstfolgende Satz 11. gibt solche charakteristische Eigenschaften der Transformationen A_1, A_2 an, welche unabhängig von der Zahl ν sind.

Satz 11. Die Transformation $B_1 = E - A_1$ lässt eine inverse Transformation B_1^{-1} zu, für welche also $B_1 B_1^{-1} = B_1^{-1} B_1 = E$ ist. Die Transformation $B_2 = E - A_2$ hat die Eigenschaft, dass die beiden homogenen Gleichungen $B^n[\varphi] = 0$ und $B_2^n[\varphi] = 0$ für jedes n genau dieselben Lösungen zulassen und die Gleichungen $B^n[\varphi] = g$ und $B_2^n[\varphi] = g$ für ein und dieselbe Funktion g entweder keine oder beide lösbar sind.

Beweis. Die Umkehrbarkeit der Transformation B_1 folgt aus Satz 7., sobald wir nur zeigen, dass $B_1[\varphi] = 0$ keine Lösung ausser $\varphi = 0$ zulässt. Würde es eine Lösung $\varphi = f$ geben, so zerlegen wir f nach Satz 8. in ein Kernelement f_1 und ein Nullelement $f - f_1$. Dann wäre $B_1[f_1] + B_1[f - f_1] = 0$. Ferner ist für das Nullelement $f - f_1$ nach Satz 10. $A_1[f - f_1] = 0$, somit $B_1[f - f_1] = f - f_1$, also $B_1[f_1] = = f_1 - f$. Andererseits aber stimmt für ein Kernelement A_1 mit A, also auch B_1 mit B überein, somit wäre auch $B[f_1] = f_1 - f$, also $B^{\nu+1}[f_1] = B^{\nu}[f_1 - f] = 0$, d. i. das Kernelement f_1 wäre zugleich ein Nullelement. Also müsste die Lösung $f = f_1 + (f - f_1)$ als Summe von zwei Nullelementen ebenfalls ein Nullelement sein, dann wäre aber $A_1[f] = 0$ und somit $B_1[f] = f$; daraus folgt wegen $B_1[f] = 0$ auch $f = 0$.

Die Aussagen des Satzes über B_2 liest man unmittelbar aus den beiden Identitäten $B^n = B_1^n B_2^n = B_2^n B_1^n$ und $B_2^n = (B_1^{-1})^n B^n = B^n (B_1^{-1})^n$ ab, deren erstere sich aus $B = E - A = E - A_1 - A_2 + A_1 A_2 = (E - A_1)(E - A_2) = B_1 B_2$ durch Potenzieren nebst Beachtung der Vertauschbarkeit von A_1, A_2, also auch von B_1, B_2 ergibt, während die zweite aus der ersten durch Multiplizieren mit $(B_1^{-1})^n$ entsteht.

Je nach der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von $B[\varphi] = 0$ lässt

die Transformation A_2 eine weitere Spaltung in orthogonale Teile zu, die der kanonischen Umformung einer linearen Substitution von n Veränderlichen entspricht und durch eine Parameterdarstellung der Nullmannigfaltigkeit, die ja von endlicher Dimensionszahl ist, leicht auf jene Umformung zurückgeführt werden kann, indem man nämlich A_2 als eine Transformation der Nullmannigfaltigkeit in sich selbst auffasst.

Wir gehen hier auf dieses Problem nicht weiter ein. Der nächste Satz 12. soll einem Gesichtspunkte Rechnung tragen, der für die meisten verwandten Untersuchungen von Anfang an grundlegend ist. Anstatt der einzelnen Transformation $E - A$ wollen wir nämlich hier die ganze *Schar* $E - \lambda A$ betrachten, wo λ einen beliebig veränderlichen komplexen *Parameter* bedeutet. Da mit A auch λA vollstetig ist, so gelten die bisher entwickelten Sätze entsprechend für sämtliche Transformationen $E - \lambda A$. Zu jedem Werte von λ gehört dann eine ganze Zahl $\nu = \nu(\lambda)$, die entweder 0 oder > 0 ist. Im ersten Falle sagt man, λ sei in bezug auf A ein *regulärer* Parameterwert; im zweiten, wo nach den Sätzen 2. und 6. die Gleichung $\varphi = \lambda A[\varphi]$ wenigstens eine nicht identisch verschwindende Lösung zulässt, heisst λ ein *singulärer* Parameterwert oder auch *Eigenwert* von A. Der Satz 12. wird diese Benennungen rechtfertigen, indem nämlich nach diesem Satze $\nu = 0$ *die Regel*, $\nu > 0$ *die Ausnahme ist.*

Satz 12. Die Eigenwerte λ besitzen im Endlichen keine Häufungsstelle.

Beweis. Der Satz wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass es keine *beschränkte* unendliche Folge aus sämtlich verschiedenen Eigenwerten gibt, d. h. dass die Annahme der Existenz einer beschränkten Folge aus sämtlich verschiedenen Zahlen λ_n, für welche die Gleichungen $\varphi = \lambda_n A[\varphi]$ wenigstens je eine nicht identisch verschwindende Lösung φ_n zulassen, auf einen Widerspruch führt. Zunächst ist klar, dass $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ für jedes n linear unabhängig sein müssten, da ja aus $\varphi_n = c_1\varphi_1 + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}$ durch Anwendung der Transformation $\lambda_n A$ wegen $A[\varphi_k] = \frac{\varphi_k}{\lambda_k}$ ($\lambda = 0$ ist sicher kein Eigenwert) auch $\varphi_n = \lambda_n \left(\frac{c_1}{\lambda_1}\varphi_1 + \cdots + \frac{c_{n-1}}{\lambda_{n-1}}\varphi_{n-1}\right)$ und nach Einsetzung von $\varphi_n = c_1\varphi_1 + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}$ eine linear homogene Beziehung mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten schon zwischen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ folgt, woraus sich durch Rekurrenz die behauptete Unabhängigkeit für jedes n ergibt. Es sei nun $L^{(n)}$ die aus den linearen Verbindungen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ gebildete Mannigfaltigkeit. Dann ist erstens für jedes Element $g = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$ aus $L^{(n)}$ die Differenz $g - \lambda_n A[g] = c_1\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\varphi_1 + \cdots + c_{n-1}\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)\varphi_{n-1}$ eine lineare Verbindung von $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, also ein Element aus $L^{(n-1)}$. Ferner ist $L^{(n-1)}$ ein echter Teil von $L^{(n)}$, da ja φ_n nicht in $L^{(n-1)}$ enthalten ist; also gibt

es nach Hiffssatz 2. für jedes n ein Element g_n aus $L^{(n)}$, derart dass $\|g_n\| = 1$ und für jedes Element g aus $L^{(n-1)}$ die Distanz $\|g_n - g\| \geqq \frac{1}{2}$ ist. Wäre nun die Folge $\{\lambda_n\}$ beschränkt, so wäre es auch die Funktionenfolge $\{\lambda_n g_n\}$ und da A vollstetig ist, wäre dann die Folge $\{\lambda_n A[g_n]\}$ *kompakt*. Andererseits aber ist für $m < n$, da sowohl $\lambda_m A[g_m]$, wie $g_n - \lambda_n A[g_n]$ der Mannigfaltigkeit $L^{(n-1)}$ angehören,

$$\|\lambda_n A[g_n] - \lambda_m A[g_m]\| = \|g_n - (g_n - \lambda_n A[g_n] + \lambda_m A[g_m])\| \geqq \frac{1}{2};$$

also kann die Folge $\{\lambda_n A[g_n]\}$ *nicht kompakt* sein. Die Annahme einer beschränkten Folge $\{\lambda_n\}$ stösst damit auf einen Widerspruch.

Bevor wir den Satz 13. aussprechen, müssen wir noch festlegen, wann wir die Stelle $\lambda = \infty$ als regulär resp. singulär betrachten. Um die für endliche λ geltende Definition entsprechend übertragen zu können, geben wir derselben folgende Fassung: λ ist in Bezug auf A regulär, wenn aus $f - \lambda A[f] = 0$ auch $f = 0$ folgt. Entsprechend definieren wir: $\lambda = \infty$ heisse in Bezug auf A regulär, wenn für jede ins Unendiche wachsende Folge $\lambda_n \to \infty$ aus $\|f_n - \lambda_n A[f_n]\| \to 0$ auch $\|f_n\| \to 0$ folgt.

Satz 13. In Bezug auf die in Satz 10. definierte Transformation A_2 sind alle von 1 verschiedene Werte λ, auch $\lambda = \infty$, regulär.

Beweis. Ist λ endlich, so haben wir zu zeigen, dass aus $f - \lambda A_2[f] = 0$ auch $f = 0$ folgt. Nach Satz 10. ist $A_2[f]$ ein Nullelement in Bezug auf B, also nach Satz 11. auch in Bezug auf B_2. Somit ist auch $f = \lambda A_2[f]$ selbst ein Nullelement für B_2. Andererseits folgt aus $f - \lambda A_2[f] = 0$ wegen $E - \lambda A_2 = (1 - \lambda) E + \lambda E - \lambda A_2 = (1 - \lambda) E + \lambda B_2$, dass $f = \frac{\lambda}{\lambda - 1} B_2[f]$ ist. Also ist auch $f = \frac{\lambda^n}{(\lambda - 1)^n} B_2^n[f]$. Da nun f ein Nullelement ist, so ist für genügend grosse n, nämlich $n \geqq r$, sicher $B_2^n[f] = 0$. Also ist auch $f = 0$.

Was nun die Stelle $\lambda = \infty$ betrifft, nehmen wir an, sie sei in Bezug auf A_2 singulär; dann gibt es also eine Folge $\lambda_n \to \infty$ und eine Folge $\{f_n\}$, für welche $\|f_n - \lambda_n A_2[f_n]\| \to 0$, $\|f_n\|$ aber nicht gegen Null konvergiert. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|f_n\| = 1$ annehmen, denn es gibt jedenfalls eine unendliche Teilfolge von $\{f_n\}$, für welche die Normen $\|f_n\|$ oberhalb einer von 0 verschiedenen positiven Schranke liegen; für die der Teilfolge entsprechenden Funktionen $\varphi_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}$ wird dann $\|\varphi_n - \lambda_n A_2[\varphi_n]\| \to 0$ und $\|\varphi_n\| = 1$ ausfallen. Nehmen wir also sofort $\|f_n\| = 1$ an. Da alle Funktionen $A_2[f]$ Nullelemente sind, so sind es auch die Funktionen $\lambda_n A_2[f_n]$, ferner bilden diese wegen

$$\|\lambda_n A_2[f_n]\| \leq \|f_n\| + \|f_n - \lambda_n A_2[f_n]\| \to 1$$

eine beschränkte Folge. Da diese beschränkte Folge in einer Mannigfaltigkeit endlicher Dimensionszahl, nämlich der Nullmannigfaltigkeit enthalten ist, so ist sie auch kompakt. Also gibt es eine gleichmässig konvergente Teilfolge

$$\lambda^{(n)} A_2[f^{(n)}] \to f^*,$$

wo auch f^* ein Nullelement ist. Nun folgt einerseits aus der soeben erhaltenen Grenzgleichung und aus $\|f^{(n)} - \lambda^{(n)} A_2[f^{(n)}]\| \to 0$, dass auch gleichmässig $f^{(n)} \to f^*$ und damit auch $\|f^*\| = 1$. Andererseits folgt nach Division durch $\lambda^{(n)}$, dass gleichmässig $A_2[f^{(n)}] \to 0$ und somit auch $A_2[f^*] = 0$; also wird $B_2[f^*] = f^* - A_2[f^*] = f^*$ und somit auch $B_2^n[f^*] = f^* \neq 0$ für jedes n. Dies wiederspricht aber dem oben gefundenen Ergebnisse, wonach f^* ein Nullelement sein muss. Also ist auch $\lambda = \infty$ regulär.

§ 3. Anwendung auf Integralgleichungen.

Um Anschluss an die Theorie der Integralgleichungen zu gewinnen, betrachten wir die Transformation vom »*Integraltypus*»

$$K[f] = \int_a^b K(x, y) f(y) dy,$$

wo wir, um zunächst nur den wichtigsten Fall vor Augen zu halten, die Funktion $K(x, y)$ für $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ stetig voraussetzen. Um unsere allgemeine Resultate auf die sogenannte Fredholm'sche *Integralgleichung* oder — nach Hilbert — *Integralgleichung zweiter Art*: $\varphi - K[\varphi] = g$ anwenden zu können, müssen wir vorerst zeigen, dass die Transformation vom Integraltypus $K[f]$ *linear* und *vollstetig* ist. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen, dass K distributiv ist und dass sie jede beschränkte Folge in eine nicht nur beschränkte, sondern auch kompakte Folge überführt. Die Distributivität von K folgt unmittelbar aus der Distributivität der Integration, die Beschränktheit aus der Abschätzung

$$|K[f]| \leq \|f\| \int_a^b |K(x, y)| dy.$$

Wir haben noch zu zeigen, dass für jede beschränkte Folge $\{f_n\}$ die entsprechende Folge $\{K[f_n]\}$ auch kompakt ist. Damit eine beschränkte Folge $\{g_n\}$ kompakt

sei, ist nach ARZELÀ notwendig und hinreichend, dass die g_n in ihrer Gesamtheit *in gleichem Masse* stetig seien. Darunter versteht man, dass es zu jedem positiven ε ein δ gibt derart, dass für $|x-x'|\leq\delta$ und für alle g_n zugleich $|g_n(x)-g_n(x')|\leq\varepsilon$ ausfällt. Es kommt uns hier nur darauf an, dass die Bedingung *hinreicht*. Wir wollen den Beweis hiefür kurz wiederholen. Nehmen wir irgend eine Teilfolge von $\{g_n\}$; diese Teilfolge ist, wie $\{g_n\}$ selbst, beschränkt, und man kann also daraus durch das bekannte Diagonalverfahren eine weitere Teilfolge $\{g^{(n)}\}$ aussondern, die an allen rationalen Stellen des Intervalls (a, b) konvergiert. Wir zeigen, dass $\{g^{(n)}\}$ auf der Strecke (a, b) überall und gleichmässig konvergiert. Wir wählen ε beliebig klein, dann gibt es dazu nach Voraussetzung ein entsprechendes δ. Nun zerlegen wir die Strecke (a, b) durch rationale Punkte $r_1, \ldots, r_k$ in eine endliche Anzahl von Teilstrecken $<\delta$. Dann gibt es unter diesen k Punkten zu jedem x wenigstens einen, so dass $|x-r|<\delta$ und also für alle n auch $|g^{(n)}(x)-g^{(n)}(r)|\leq\varepsilon$ wird. Andererseits ist, wenn m und n genügend gross sind, für jeden der k Punkte $|g^{(m)}(r)-g^{(n)}(r)|<\varepsilon$. Also ist auch

$$|g^{(m)}(x)-g^{(n)}(x)|\leq|g^{(m)}(x)-g^{(m)}(r)|+|g^{(m)}(r)-g^{(n)}(r)|+|g^{(n)}(r)-g^{(n)}(x)|<3\varepsilon;$$

und zwar gilt diese Abschätzung für jeden Punkt x, indem man für r den nächstliegenden der Punkte $r_1, \ldots, r_k$ einsetzt. Also ist für genügend grosse m, n die Distanz $\|g^{(m)}-g^{(n)}\|<3\varepsilon$, d. i. beliebig klein, die Folge $\{g^{(n)}\}$ ist somit gleichmässig konvergent.

Betrachten wir nun die Folge $\{g_n=K[f_n]\}$, wo die f_n eine beschränkte Folge bilden, also $\|f_n\|\leq G$ ist. Dann ist

$$|g_n(x)-g_n(x')|=\left|\int_a^b[K(x,y)-K(x',y')]f_n(y)dy\right|\leq G\int_a^b|K(x,y)-K(x',y)|dy.$$

Da $K(x, y)$ stetig ist, so kann im letzten Integral der Integrand und somit also auch das Integral beliebig klein gemacht werden, indem man x und x' genügend nahe wählt. D. h. zu jedem positiven ε gibt es ein δ derart, dass für $|x-x'|\leq\delta$ das Integral $\leq\frac{\varepsilon}{G}$ und somit $|g_n(x)-g_n(x')|\leq\varepsilon$ wird. Also ist die ARZELÀ'sche Bedingung befriedigt und die Folge $\{g_n=K[f_n]\}$ ist kompakt. Die Transformation K ist somit vollstetig.

Betrachten wir nun die Transformation $B=E-K$; nehmen wir zuerst den regulären Fall $\nu=0$, also die Existenz einer inversen Transformation B^{-1} an. Wegen $B^{-1}-B^{-1}K=B^{-1}(E-K)=B^{-1}B=E$ ist $B^{-1}=E+B^{-1}K=E-H$, wo auch $H=-B^{-1}K$ eine vollstetige Transformation ist, und es liegt die Vermutung

nahe, dass auch diese vom *Integraltypus* ist, so dass also *die Umkehrung der Integralgleichung*

$$f(x) - \int_a^b K(x, y) f(y) dy = g(x)$$

durch eine Gleichung vom selben Typus

$$f(x) = g(x) - \int_a^b H(x, y) g(y) dy$$

geschieht. Es gilt in der Tat allgemein der Satz: *Ist T eine beliebige lineare Transformation, K aber eine solche vom Integraltypus, dann ist auch die Transformation $H = TK$ vom Integraltypus.* Um diese Behauptung zu beweisen, definieren wir zuerst die entsprechende Funktion $H(x, y)$, indem wir in $K(x, y)$ die Veränderliche y für einen Augenblick als konstant ansehen und also auf $K(x, y)$, als Funktion von x allein betrachtet, die Transformation T anwenden. Damit ist $H(x, y)$ für jeden Wert y als stetige Funktion von x definiert. Dass $H(x, y)$ auch als Funktion von x, y stetig ist, schliesst man aus der Erhaltung gleichmässiger Konvergenz bei jeder linearen Transformation; danach folgt nämlich aus $y_n \to y^*$ und damit gleichmässig $K(x, y_n) \to K(x, y^*)$ die ebenfalls gleichmässige Konvergenz von $H(x, y_n)$ gegen $H(x, y^*)$. Es muss noch gezeigt werden, dass die der so definierten Funktion $H(x, y)$ entsprechende Transformation $H = TK$ ist. Dies folgt aber auf Grund der Definition des bestimmten Integrals durch Grenzübergang aus der Identität

$$\sum_{k=1}^{n} H(x, y_k) f(y_k)(y_{k+1} - y_k) = \sum_{k=1}^{n} T[K(x, y_k)] f(y_k)(y_{k+1} - y_k) =$$

$$= T\left[\sum_{k=1}^{n} K(x, y_k) f(y_k)(y_{k+1} - y_k)\right],$$

die ihrerseits aus der definierenden Formel von $H(x, y)$, nämlich $H(x, y_k) = T[K(x, y_k)]$ und aus der Distributivität von T folgt.

Zwischen $K(x, y)$ und der Funktion $H(x, y)$, die der Transformation $H = -B^{-1}K$ entspricht, bestehen die Beziehungen

$$K(x, y) + H(x, y) = \int_a^b K(x, u) H(u, y) du = \int_a^b H(x, u) K(u, y) du,$$

die unmittelbar aus den Identitäten $(E-K)(E-H)=(E-H)(E-K)=E$, d. i. $K+H=KH=HK$ fliessen. Durch diese Identitäten, ja sogar *schon durch* $K+H=KH$, ist die Transformation H und somit auch die Funktion $H(x,y)$ vollständig festgelegt, da sie ja aussagt, dass die Funktion $f=g-H[g]$ die Gleichung $f-K[f]=g$ befriedigt, dass somit diese Gleichung für alle g lösbar ist, und da in diesem Falle nach Satz 3. die Lösung f, also auch $H[g]=g-f$ durch Angabe von g eindeutig bestimmt wird. Besteht also zwischen H und K die Beziehung $K+H=KH$, so ist die Transformation $E-K$ umkehrbar, ihre inverse Transformation ist $E-H$, und es besteht daher auch die zweite Beziehung $K+H=HK$.

Nun sind wir in der Lage, sofort auch die sogenannte *transponierte* Integralgleichung zu erledigen. Setzen wir $\mathfrak{K}(x,\ y)=K(y,\ x)$ und sei $\mathfrak{K}$ die entsprechende Transformation; dann sagt man, die Gleichung $\mathfrak{f}-\mathfrak{K}[\mathfrak{f}]=\mathfrak{g}$ sei in Bezug auf die vorhin behandelte vom transponierten Typus. Umgekehrt ist $f-K[f]=g$ der zu $\mathfrak{f}-\mathfrak{K}[\mathfrak{f}]=\mathfrak{g}$ transponierte Typus. Tritt nun für den einen Typus die allgemeine Umkehrbarkeit ein, so *ist es auch für den andern der Fall,* da nämlich aus den obigen Beziehungen zwischen $K(x,\ y)$ und $H(x,\ y)$ die ähnlichen Beziehungen zwischen $\mathfrak{K}(x,\ y)$ und $\mathfrak{H}(x,\ y)=H(y,\ x)$ durch Vertauschung der Variabeln unmittelbar folgen. *Die Lösung der transponierten Integralgleichung wird hienach durch die Formel*

$$\mathfrak{f}(y)=\mathfrak{g}(y)-\int_a^b H(x,\ y)\mathfrak{g}(x)dx$$

geleistet.

Wir wenden uns jetzt dem Falle $\nu>0$ zu; wir verzichten jedoch darauf, sämtliche Resultate in die Sprache der Theorie der Integralgleichungen zu übersetzen und beschränken uns auf das Wesentlichste. Zunächst ist klar, dass der Fall $\nu>0$ für beide Transformationen $B=E-K$ und $\mathfrak{B}=E-\mathfrak{K}$ zugleich eintritt; denn wir haben soeben gesehen, dass aus der Umkehrbarkeit der einen Transformation, d. i. aus $\nu=0$ für diese Transformation, auch die Umkehrbarkeit der anderen, also auch für diese $\nu=0$ folgt. Ziehen wir nun den Satz 7. heran, so ergibt sich somit die Fredholm'*sche Alternative:*

Entweder besitzen die Gleichungen

$$f(x)-\int_a^b K(x,\ y)f(y)\,dy=g(x),\quad \mathfrak{f}(y)-\int_a^b K(x,\ y)\mathfrak{f}(x)\,dx=\mathfrak{g}(y)$$

für alle g und $\mathfrak{g}$ je eine eindeutig bestimmte Lösung, oder, wenn dies nicht der Fall ist, dann haben die entsprechenden homogenen Gleichungen ausser der identisch verschwindenden noch weitere Lösungen.

Die weiteren Fredholm'schen Sätze, nämlich das Übereinstimmen der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der beiden homogenen Gleichungen und die durch diese »Nullösungen» ausgedrückte Bedingung für die Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung bei vorgegebenem g resp. $\mathfrak{g}$, erhält man aus obigem Satze, wie Herr W. A. Hurwitz vor Kurzem gezeigt hat, durch einen sehr einfachen Kunstgriff.[1] Die Sätze 10., 11. und 13. gestatten es uns, einen andern Weg einzuschlagen, der weiter führt und tieferen Einblick in das Verhalten sämtlicher Nullelemente gewährt. Wir wollen diesen Weg hier kurz andeuten. Wir zerlegen die Transformation K nach Satz 10. in orthogonale Teile: $K = K_1 + K_2$, $K_1 K_2 = K_2 K_1 = 0$, $K_1 = B^{(0)} K$, $K_2 = (E - B^{(0)}) K$. *Dann sind auch die Transformationen K_1, K_2 vom Integraltypus,* da im definierenden Produkt der zweite Faktor vom Integraltypus ist. Wir haben somit eine Zerlegung $K(x, y) = K_1(x, y) + K_2(x, y)$ vor uns. Ich behaupte, dass *die entsprechende Zerlegung der transponierten Funktion $\mathfrak{K}(x, y) = K(y, x)$ durch die Transponierten von K_1 und K_2, also durch $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ geleistet wird.* Zunächst überführt nämlich K_2 alle Kernelemente von $B = E - K$ in 0; diese Tatsache drückt sich durch die Identität $K_2 B^{\nu} = 0$ aus, die ihr gleichwertig ist, da ja $B^{\nu}[f]$ die allgemeine Form der Kernelemente ist. Da nun K_2 und B vertauschbar sind, so ist auch $B^{\nu} K_2 = 0$. Diese Identität lässt sich auch als eine Integralbeziehung zwischen $K(x, y)$ und $K_2(x, y)$ hinschreiben, die wieder nach Vertauschen der Variablen die Identität $\mathfrak{K}_2 \mathfrak{B}^{\nu} = 0$ ergibt. Da alle Kernelemente der Transformation $\mathfrak{B}$ für jedes n, also auch für $n = \nu$, auf die Form $\mathfrak{B}^n[\mathfrak{f}]$ gebracht werden können, so besagt die soeben gewonnene Identität, dass $\mathfrak{K}_2$ *jedes Kernelement von $\mathfrak{B}$ in 0 überführt.* Andererseits ist $K_1 = K_1 - K_2 K_1 = (E - K_2) K_1 = B_2 K_1$ und somit auch allgemein $K_1 = B_2^n K_1$, woraus wegen der Umkehrbarkeit von B_1 weiter $K_1 = B_2^n B_1^n (B_1^{-1})^n K_1 = B^n (B_1^{-1})^n K_1$ folgt. Durch Übergang zur entsprechenden Integralformel und Transposition ergibt sich hieraus die Identität $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_1 (\mathfrak{B}_1^{-1})^n \mathfrak{B}^n$, so dass also für jedes Element $\mathfrak{f}$, für welches $\mathfrak{B}^n[\mathfrak{f}]$ bei irgendeinem n identisch verschwindet, dies auch für $\mathfrak{K}_1[\mathfrak{f}]$ der Fall ist. D. h. *die Transformation $\mathfrak{K}_1$ überführt alle Nullelemente von $\mathfrak{B}$ in 0.* Somit besitzen tatsächlich $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ jene Eigenschaften, die nach Satz 10. die Zerlegung eindeutig charakterisieren.

Was nun die besondere Bedeutung der Zerlegung $K = K_1 + K_2$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$ für die Untersuchung der Transformationen B und $\mathfrak{B}$ anbelangt, so besagt erstens

[1] W. A. Hurwitz, *On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation,* Transactions of the American Math. Soc., Vol. 13 (1912), S. 405—418.

Satz 11., dass die Transformationen B und B_2, resp. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_2$ dieselben Kern- und Nullelemente besitzen, und dass auch bezüglich der letzteren der kleinste Exponent n, für welche $B^n[f]$, $B_2^n[f]$, resp. $\mathfrak{B}^n[\mathfrak{f}]$, $\mathfrak{B}_2^n[\mathfrak{f}]$ identisch verschwinden, für dieselbe Funktion f resp. $\mathfrak{f}$ bei beiden Transformationen derselbe ist. Der Grund für die letztere Erscheinung ist schon in Satz 10. angegeben; danach stimmen B und B_2 resp. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_2$ für die entsprechenden Nullmannigfaltigkeiten überein. Demgemäss darf man $K(x, y)$ bei allen diesbezüglichen Fragen, wie z. B. Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung, Anzahl der unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung oder allgemeiner kanonische Gruppierung der Nullelemente, *durch die Funktion* $K_2(x, y)$ *ersetzen.* Diese Funktion ist aber von einer sehr *speziellen* Form; es ist nämlich

$$K_2(x, y) = f_1(x)\mathfrak{f}_1(y) + \cdots + f_m(x)\mathfrak{f}_m(y),$$

wo $f_1, \ldots, f_m$ Nullelemente von B, $\mathfrak{f}_1, \ldots \mathfrak{f}_m$ Nullelemente von $\mathfrak{B}$ sind. Denn zunächst geht die Funktion $K_2(x, y)$ aus der Funktion $K(x, y)$ dadurch hervor, dass man auf diese, als Funktion von x allein betrachtet, die Transformation $E - B^{(0)}$ wirken lässt, also jene Transformation, die jeder Funktion das bei der in Satz 8. angegebener Zerlegung entsprechende Nullelement zuordnet. Danach ist also $K_2(x, y)$, als Funktion von x betrachtet, ein Nullelement und kann daher als lineare Verbindung einer endlichen Anzahl von Nullelementen $f_1, \ldots, f_m$ dargestellt werden, die wir als linear unabhängig voraussetzen. Die Koeffizienten, die ja noch von y abhängen, sind zufolge der soeben gemachten Voraussetzung eindeutig bestimmte Funktionen $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_m$ von y. Wir wollen zeigen, dass diese Funktionen ihrerseits Nullelemente von $\mathfrak{B}$ sind. Zu diesem Zwecke erinnern wir zunächst daran, dass die Transformation $\mathfrak{K}_2$ jede Funktion in ein Nullelement von $\mathfrak{B}$ überführt; nun aber entsteht z. B. die Funktion $\mathfrak{f}_1$, wie die Integraldarstellung von $\mathfrak{K}_2$ unmittelbar zeigt, dadurch dass wir die Transformation $\mathfrak{K}_2$ auf eine Funktion $\mathfrak{f}$ anwenden, deren Produktintegral mit f_1 gleich 1, mit den übrigen f_i, d. i. mit $f_2, \ldots, f_m$ aber gleich Null wird. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ lässt sich bekanntlich eine solche Funktion $\mathfrak{f}$ als lineare Verbindung der konjugierten Funktionen $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_m}$ bestimmen. Somit ist $\mathfrak{f}_1$ tatsächlich ein Nullelement von $\mathfrak{B}$ und dasselbe gilt aus ähnlichem Grunde für $\mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_m$.

Zufolge der speziellen Struktur von $K_2(x, y)$ kann man nun die erwähnten Probleme, wie wir dies schon in Anlehnung an den Satz 11. andeuteten, auf die entsprechende Untersuchung einer quadratischen Matrix mit den m^2 Elementen $a_{ij} = \int_a^b f_i(x)\mathfrak{f}_j(x)dx$ zurückführen; dabei wird man auch mit Nutzen die aus Satz

13. fliessende Eigenschaft dieser Matrix verwenden, dass ihre charakteristische Determinante $|\varepsilon_{ij} - \lambda a_{ij}|$ (wo $\varepsilon_{ij} = 1$ für $i = j$ und 0 für $i \neq j$ ist), *den Wert* $\lambda = 1$ *als einzige, d. i. als m-fache Wurzel aufweist.* Wir begnügen uns damit, bezüglich der ausführlichen Untersuchung und der Literaturangaben auf das Buch von T. LALESCO: Introduction à la théorie des équations intégrales, Paris 1912, u. zw. speziell auf die Seiten 49—59 zu verweisen.

Zum Schlusse bemerke ich, dass die Entwickelungen dieses Paragraphs leicht auf allgemeinere, nicht ausnahmslos stetige Funktionen $K(x, y)$ ausgedehnt werden können, so z. B. auf jenen besonders wichtigen Fall, wo die Funktion für $x = y$ unendlich wird und zwar unendlich von der Ordnung $\alpha < 1$, d. i. $|K(x, y)| \leq G|x - y|^{-\alpha}$ ist. In der Tat gelten ja auch für diesen Fall alle Integralabschätzungen, die wir aus der Annahme der Stetigkeit von $K(x, y)$ folgerten. Ich erwähne noch beiläufig, dass in gewissem allgemeineren Sinne alle lineare Transformationen von Integraltypus sind, indem nämlich, wie dies aus meinen vor einigen Jahren angestellten Untersuchungen über lineare Funktionaloperationen[1] unmittelbar hervorgeht, jede lineare Transformation durch ein STIELTJES'*sches Integral* dargestellt werden kann. Die charakteristischen Eigenschaften der dabei zur Verwendung gelangenden Funktion von zwei Veränderlichen sind sowohl im allgemeinen, wie auch im vollstetigen Falle unschwer zu ermitteln.

Györ, den 19 Januar 1916.

---

[1] F. RIESZ, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes rendus de l'Acad. d. Sc., Paris, 29 novembre 1909.

Der von Herrn Hofrat Dr. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig errichtete »Alfred Ackermann-Teubner Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften« ist in diesem Jahre durch das Preisgericht Herrn Professor Dr. Ernst Zermelo in Zürich für die Arbeiten über Mengenlehre in den Mathematischen Annalen Bd. 59 und 65, insbesondere für die Arbeit in Bd. 65: »Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung« aus dem Jahre 1907 zuerkannt worden.

Inhaltsverzeichnis. Table des matières.

Uppsala 1916. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

ÜBER DIE POTENZREIHEN, DEREN KONVERGENZKREIS NATÜRLICHE GRENZE IST.

Von

GEORG PÓLYA

in Zürich.

Öfters[1] und in verschiedenen Wendungen hat man schon den Satz ausgesprochen: »Eine Potenzreihe ist *im allgemeinen* über ihren Konvergenzkreis hinaus nicht fortsetzbar«. Die verschiedenen Beweise dieses Satzes, die sich zur Aufgabe machten, den Sinn der Aussage zu präzisieren, öffneten interessante Einblicke in die Natur der Potenzreihen, jedoch das Hauptziel hat, nach meinem Dafürhalten, keiner der Beweise erreicht: der Sinn des Satzes ist und bleibt von einem ganz strengen Standpunkte aus unbestimmt. Wie es doch so oft wiederholt wurde, handelt es sich hier nicht um den Unterschied der Mächtigkeiten; die Menge der fortsetzbaren Potenzreihen, und die Menge der nichtfortsetzbaren Potenzreihen, beide haben die Mächtigkeit des Kontinuums. Es handelt sich um eine Art Massbestimmung im unendlichvieldimensionalen Raume, dessen Punkte die verschiedenen Potenzreihen sind. Der Begriff des Masses ist jedoch in diesem Raume noch nie erklärt worden.

Angesichts dieser Sachlage scheint es mir nun zweckmässig die Frage etwas anders zu wenden. Es ist uns doch nur an einer Einsicht in die Art und Weise gelegen, wie sich die Gesamtheit der Potenzreihen in fortsetzbare und nichtfortsetzbare Potenzreihen verteilt. Ich betrachte den Raum von unendlichvielen Dimensionen, dessen Punkte die im Einheitskreise konvergierenden Potenzreihen sind. Ich lege in diesem Raume den Begriff der Umgebung, und andere, daraus

[1] Vgl. für weitere Literatur Hadamard, La série de Taylor (Sammlung Scientia) S. 33—36.

fliessende mengentheoretische Begriffe fest, auf eine Art, die mir einfach und naturgemäss zu sein scheint. Dann beweise ich den Satz:

Die Menge der nichtfortsetzbaren Potenzreihen hat nur innere Punkte und ist überall dicht. Die Menge der fortsetzbaren Potenzreihen ist nirgendswo dicht und perfekt.

Dieser Satz *kann* bewiesen werden, denn die vorkommenden Begriffe des inneren Punktes, der überalldichten, der nirgendswodichten und der perfekten Menge sind mit völliger Bestimmtheit definiert worden.

Im Folgenden teile ich die geschilderte Untersuchung ausführlich mit. Es sind funktionentheoretische Sätze über Potenzreihen, deren Richtigkeit von der angewandten Ausdrucksweise völlig unabhängig ist, aber deren Interesse und Zusammenhang durch diese Ausdrucksweise sich steigert, vielleicht auch in den Augen anderer Mathematiker.

Die punktmengentheoretischen Begriffe.[1]

Unter Potenzreihen werde ich im Folgenden stets nur solche Potenzreihen verstehen, deren Konvergenzkreis der Einheitskreis ist. Die Gesamtheit dieser Potenzreihen fasse ich als einen Raum von unendlich vielen Dimensionen auf. Ein Element unseres Raumes bezeichne ich manchmal als »Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$«, manchmal als »Punkt $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$«, ohne Unterschied, wie es eben besser klingt. Abzählbar unendlich viele komplexe Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots,$$

die mit Indices versehen, d. h. auf eine bestimmte Weise auf die Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots n, \ldots$$

abgebildet sind, stellen dann und nur dann die Koordinaten eines Punktes in unserem Raume dar, wenn sie der Bedingung

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$$

genügen.

[1] Vielleicht bietet dieser Abschnitt auch vom Standpunkte der abstrakten Mengenlehre einiges Interesse, wenigstens das eines nicht ganz trivialen Beispiels. Vgl. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rendiconti d. Circ. Mat. di Palermo, Bd 22 (1906, I), S. 1—74.

Sei $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ ein Punkt mit nichtnegativen Koordinaten, d. h. es sei

$$\varepsilon_n \geq 0$$

und

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Die Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots)$ *des Punktes* $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ *ist die Gesamtheit aller derjenigen und nur derjenigen Punkte* $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots,$ *die den Ungleichungen*

$$|u_0 - a_0| \leq \varepsilon_0, \quad |u_1 - a_1| \leq \varepsilon_1, \ldots \quad |u_n - a_n| \leq \varepsilon_n, \ldots$$

genügen.

Erfüllen die Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ nicht nur die Bedingung (1), sondern auch die schärfere

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n^{\frac{1}{n}} = 1,$$

so heisst die Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots)$ eine *volle Umgebung.* Ist hingegen (1) erfüllt, und (2) nicht erfüllt, so heisst die Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots)$ eine *einseitige Umgebung.*

Wenn die Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$ so beschaffen ist, dass $\Sigma (u_n - a_n) x^n$ in einem grösseren Kreise konvergiert, als der Einheitskreis, dann gehört sie der *nächsten Umgebung* der Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ an. Anders ausgedrückt, die nächste Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ besteht aus der Gesamtheit der Punkte $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots,$ die der Bedingung

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |u_n - a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$$

genügen.

Der Punkt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ hat verschiedene volle und verschiedene einseitige Umgebungen, er hat hingegen *nur eine nächste Umgebung.* Der Begriff der Umgebung ist so festgelegt, dass *jede Umgebung eines Punktes Punkte enthält, die seiner nächsten Umgebung nicht angehören.* Daher der etwas unbequeme Satz: *die nächste Umgebung ist keine Umgebung.*

Zur weiteren Klärung der eingeführten Begriffe betrachte ich noch einige Beispiele.

Ich behaupte, dass die volle Umgebung $\left(0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots \frac{1}{n^2}, \ldots\right)$ der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$ aus lauter nichtfortsetzbaren Potenzreihen besteht. Denn jede Potenzreihe dieser Umgebung lässt sich in die Form setzen

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \tag{3}$$

wo

$$|d_n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Also ist das zweite Glied der Summe (3) im Einheitskreise beschränkt, während das erste Glied unendlich wird, wenn x entlang eines Radius des Einheitskreises irgend einer Einheitswurzel zustrebt.

Man setze

$$\varepsilon_{m!} = 1,$$

$\varepsilon_n = 0$, wenn n keine Fakultät ist.

Man wird es leicht einsehen, dass eine Potenzreihe, die der einseitigen Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots)$ des Punktes $1, 1, 1, 1, \ldots$ (der geometrischen Reihe) angehört und der nächsten Umgebung desselben Punktes nicht angehört, sich über den Einheitskreis hinaus nirgendswo fortsetzen lässt.

Die Rolle, die im gewöhnlichen Raume von der Umgebung gespielt wird, kommt im Raume der Potenzreihen der *vollen Umgebung zu.*[1] Dies ist durch den Umstand geboten, dass *der gemeinsame Teil zweier vollen Umgebungen eines Punktes eine volle Umgebung desselben Punktes ist.* Hingegen besteht

[1] Man treffe auf ein Moment im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume die folgenden Vereinbarungen: Die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ seien den Bedingungen

$$\varepsilon_1 \geq 0, \quad \varepsilon_2 \geq 0, \quad \varepsilon_3 \geq 0, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 > 0 \tag{1'}$$

unterworfen. Die *Umgebung* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ des Punktes a_1, a_2, a_3 ist die Gesamtheit der den Ungleichungen

$$|u_1 - a_1| \leq \varepsilon_1, \quad |u_2 - a_2| \leq \varepsilon_2, \quad |u_3 - a_3| \leq \varepsilon_3$$

genügenden Punkten u_1, u_2, u_3. Die Umgebung $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ heisst eine *volle Umgebung*, wenn nicht nur (1'), sondern sogar die schärfere Bedingung

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_3 > 0 \tag{2'}$$

erfüllt ist. Ist nur (1') erfüllt, (2') hingegen nicht, so heisst die Umgebung $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ eine *einseitige Umgebung.* Die *nächste Umgebung* des Punktes a_1, a_2, a_3 besteht aus dem einzigen Punkte a_1, a_2, a_3.

Diese Bezeichnungen sollen den Text durch Analogie erläutern. Gewöhnlich wird als *Umgebung* nur eine solche Punktmenge bezeichnet, die wir *volle Umgebung* genannt haben.

der gemeinsame Teil der beiden *einseitigen* Umgebungen (1, 0, 1, 0, 1, 0, ...) und (0, 1, 0, 1, 0, 1, ...) des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bloss aus dem Punkte $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Aus dem Begriffe der Umgebung ergeben sich die Analoga anderer punktmengentheoretischer Begriffe ohne Schwierigkeit. Den Definitionen muss vorausgeschickt werden, dass wir uns auf die Betrachtung gewisser *speziellen* Mengen von Potenzreihen beschränken.

Wenn nämlich die beiden Mengen M und M_1 komplementär sind (d. h. gliedfremd sind, und zusammengenommen die Totalität der Potenzreihen erschöpfen) und die Reihe $\Sigma(a_n - b_n)x^n$ einen grösseren Konvergenzradius hat als die Einheit, so sollen die Potenzreihen $\Sigma a_n x^n$ und $\Sigma b_n x^n$ entweder beide der Menge M oder beide der Menge M_1 angehören. Anders ausgedrückt, wir lassen nur solche Einteilungen aller Potenzreihen zu, die keine Potenzreihe von ihrer nächsten Umgebung trennen.[1]

Dies alles überlegt, wird die folgende Definition wohl verständlich sein:

Der Punkt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heisst Häufungspunkt der Menge M, oder, was dasselbe ist, er heisst zur derivierten Menge M' der Menge M gehörig, dann und nur dann, wenn in einer beliebigen vollen Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ein Punkt gefunden werden kann, der der Menge M angehört, und der nächsten Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nicht angehört.

Die beiden Hauptsätze über derivierte Mengen lauten:

I. *Seien M und M_1 komplementäre Mengen, M' bzw. M'_1 ihre derivierten Mengen. Ein beliebiger Punkt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gehört wenigstens einer der beiden Mengen M' und M'_1 an.*

II. *Sei M' die derivierte Menge von M, M'' die derivierte Menge von M'. Jeder Punkt der Menge M'' gehört der Menge M' an.*

Die Beweise der beiden Sätze I und II, die sich ohne Kunstgriffe, bloss durch genaue Auslegung der Definitionen ergeben, darf ich hier wohl unterdrücken.

Ich will nur kurz und schematisch die einfachsten Begriffe entwickeln, die sich auch in der Theorie der Punktmengen bloss auf dem Begriffe der abgeleiteten Menge und auf den Sätzen I und II fussend definieren lassen.

Seien M und M_1 wieder komplementäre Mengen. Ein beliebiger Punkt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wird einigen der vier Mengen M, M_1, M', M'_1 angehören, anderen nicht. Infolge des Satzes I sind nur 6 verschiedene Fälle möglich, die in der folgenden Tabelle zusammengefasst sind.

---

[1] Z. B. wird die Menge aller Potenzreihen, deren Koeffizienten reell und rational sind, in der folgenden Betrachtung nicht zugelassen, d. h. auf diese Menge von Potenzreihen ist die nun folgende Definition des Häufungspunktes nicht passend anwendbar.

Tabelle I.[1]

	M	M_1	M'	M'_1	$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ heisst
I	+	—	+	—	innerer Punkt von M
II	+	—	—	+	isolierter » » M
III	+	—	+	+	
IV	—	+	—	+	innerer » » M_1
V	—	+	+	—	isolierter » » M_1
VI	—	+	+	+	

Z. B. liest sich die erste Zeile dieser Tabelle so: *ist* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *in* M *und* M' *enthalten, in* M'_1 *nicht enthalten, so heisst* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *ein innerer Punkt von* M. Nach dem Begriffe des Häufungspunktes besteht die Tatsache: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ist dann und nur dann ein innerer Punkt der Menge M, wenn eine volle Umgebung von $a_0, a_1, a_2, \ldots$ aus lauter Punkten der Menge M be-besteht. So ist z. B. die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$ ein innerer Punkt der Menge aller nichtfortsetzbarer Potenzreihen.

Wenn einige der in Tabelle I verzeichneten 6 Fälle nicht vorkommen, so hat die Menge M eine gewisse spezielle Eigenschaft, die durch einen Namen belegt werden kann. Die wichtigsten Eigenschaften sind zusammengefasst in

Tabelle II.[2]

I	II	III	IV	V	VI	Die Menge M heisst
				o	o	abgeschlossen
	o			o	o	perfekt
	o	o				nur aus innern Punkten bestehend
	o		o			überall dicht
o				o	o	nirgendswo dicht und abgeschlossen
o	o			o	o	» » » perfekt

u. s. w.

[1] + heisst: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ist enthalten, — heisst: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ist nicht enthalten in der Menge, deren Name am Kopfe der Spalte steht.

[2] o bedeutet, dass der Fall der Tabelle I, deren Nummer im Spaltenkopf steht, bei der Menge M nicht vorkommt. Die unbezeichneten Fälle können vorkommen, brauchen aber nicht.

Um die erste Zeile der Tabelle II zu verstehen, beachte man, dass alle Punkte, die zugleich M' und M_1 angehören, entweder in die Kategorie V oder in die Kategorie VI der Tabelle I fallen. Abgeschlossen heisst also die Menge M, wenn keine dieser beiden Kategorieen vorhanden ist, d. h. wenn kein Punkt von M' der Menge M_1 angehört u. s. w.

Was eine nirgendswodichte Menge heisst, lässt sich im Rahmen der Tabelle II nicht definieren, wohl aber so: die Menge M ist nirgendswodicht, wenn die inneren Punkte der komplementären Menge M_1 überall dicht sind.

Die in Tabelle II gegebene Definition einer überalldichten Menge besagt: die Menge M heisst überall dicht, wenn jeder Punkt des Raumes zur Menge M' gehört. Diese Definition lässt sich so umformen: die Menge M ist überall dicht, wenn in jeder vollen Umgebung jedes Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Punkte gibt, die der Menge M angehören und der nächsten Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nicht angehören. Ich will noch, zur späteren Verwendung, den engeren Begriff der *überall allseitig dichten Menge* durch folgende Definition festsetzen: Die Menge M heisst *überall allseitig dicht*, wenn in jeder *einseitigen* Umgebung jedes Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Punkte gibt, die der Menge M angehören und der nächsten Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nicht angehören.[1]

Die in diesem Abschnitt getroffenen Definitionen liegen den Sätzen des folgenden Abschnittes zugrunde. Alle beruhen auf dem Begriffe des Häufungspunktes, also auf dem Begriffe der Umgebung; ich bemühte mich die Beweggründe klarzulegen, die zu der gewählten Festsetzung dieser Begriffe führten.

Die Verteilung der fortsetzbaren und der nichtfortsetzbaren Potenzreihen.

Satz I. *Die Menge der nichtfortsetzbaren Potenzreihen ist überall allseitig dicht.*

Da ich aus der Theorie der TAYLOR'schen Reihe verschiedene und ziemlich heterogene Teile zum Beweise der Sätze dieses Abschnittes heranziehen muss, will ich das Nötige immer in Form von Hilfssätzen ausdrücklich formulieren. So erfordert Satz I den

Hilfssatz I. Es sei die Folge $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ den Bedingungen

[1] Man erinnere sich der Definitionen der Anmerkung S. 102, und man bilde im gewöhnlichen Raume die Menge R, deren Punkte drei rationale Koordinaten haben, und R_1, die komplementäre Menge von R. Sowohl R, wie R_1, sind überall dicht, R_1 ist aber überdies noch *überall allseitig dicht,* während R es nicht ist.

$$\varepsilon_n \geqq 0$$

(1) $$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \varepsilon_n^{\frac{1}{n}} = 1$$

unterworfen. So gibt es eine Potenzreihe

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

die den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, und den Ungleichungen

$$|b_n| \leqq \varepsilon_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügt.

Man finde in der Folge $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Teilfolge $\varepsilon_{\nu_1}, \varepsilon_{\nu_2}, \ldots \varepsilon_{\nu_n}, \ldots$, die der doppelten Bedingung

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \varepsilon_{\nu_n}^{\frac{1}{\nu_n}} = 1, \quad \nu_{n+1} > 2\nu_n$$

genügt, man setze

(3′) $$b_{\nu_1} = \varepsilon_{\nu_1}, \quad b_{\nu_2} = \varepsilon_{\nu_2}, \ldots; \quad b_{\nu_n} = \varepsilon_{\nu_n}, \ldots$$

und man setze

$$b_n = 0$$

wenn über b_n in (3′) noch nicht verfügt worden ist. Die mit den so definierten Koeffizienten aufgebaute Reihe $\Sigma b_n x^n$ hat nach einem Satze des Herrn Hadamard[1] den Einheitskreis zur natürlichen Grenze.

Es sei nun $\Sigma a_n x^n$ eine beliebige Potenzreihe, $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$ eine beliebige, einseitige oder volle, Umgebung des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Sei $\Sigma b_n x^n$ die im Hilfssatz I erwähnte Potenzreihe, und man betrachte die Gesamtheit der Potenzreihen

(4) $$\Sigma a_n x^n + \alpha \Sigma b_n x^n$$

wo

$$0 < \alpha \leqq 1.$$

Die Menge der Potenzreihen (4) hat die Mächtigkeit des Kontinuums, gehört der Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ an, und hat kein Element, das der nächsten Umgebung von $a_0, a_1, a_2, \ldots$ angehört.

Ich behaupte, es gibt welche zwischen den Potenzreihen (4), für die der Einheitskreis natürliche Grenze ist. Wären sie nämlich alle fortsetzbar, so hätte jede unter ihnen wenigstens einen *Regularitätsbogen* am Einheitskreis. Am Ein-

[1] A. a. O. S. 37.

heitskreis haben aber nur höchstens *abzählbar* unendlich viele auseinanderliegende Bögen Platz, und so gäbe es gewiss zwei verschiedene Potenzreihen in der nicht abzählbaren Menge (4)

$$(5) \qquad \Sigma a_n x^n + \alpha_1 \Sigma b_n x^n, \quad \Sigma a_n x^n + \alpha_2 \Sigma b_n x^n,$$

$$(\alpha_1 \lesseqgtr \alpha_2)$$

deren Regularitätsbögen aufeinander hinübergreifen. Also hätten beide Reihen (5) gemeinsame reguläre Punkte am Einheitskreis, und so wäre auch ihre Differenz

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \Sigma b_n x^n$$

über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar, was nicht der Fall ist. Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn die Richtigkeit des Satzes I zugegeben wird.

Diese merkwürdige Schlussweise rührt von Herrn Professor HURWITZ her, und stimmt im Grunde genommen mit einer berühmten arithmetischen Schlussweise überein.[1]

Satz II. *Die Menge der nichtfortsetzbaren Potenzreihen hat nur innere Punkte.*

Hilfssatz II. Es sei die Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$ im Einheitskreise konvergent, und man setze

$$(6) \qquad \psi_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\frac{n}{3}}^{\frac{2n}{3}}{}_{\nu} \binom{n}{\nu} u_\nu x^\nu .$$

Dass der Punkt z, wo $|z| = 1$, ein singulärer Punkt der Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$ wird, dafür ist notwendig und hinreichend die Bedingung

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \, |\psi_n(z)|^{\frac{1}{n}} = 1 .$$

Für den Beweis dieses Hilfsatzes verweise ich auf eine Arbeit des Herrn PRINGSHEIM.[2]

---

[1] Mit dem »Schachtelprinzip«. — A. HURWITZ und G. PÓLYA. Zwei Beweise eines von Herrn FATOU vermuteten Satzes. Acta Mathematica, Bd. 40 S. 179.

[2] Über einige funktionentheoretische Anwendungen der EULER'schen Reihentransformation. — Sitzungsberichte der Kgl. Bayerischen Akademie (1912) S. 11—92. Vgl. S. 78—82. Der zitierte Satz ersetzt wegen seiner grösseren Einfachheit mit Vorteil einen im Wesentlichen übereinstimmenden älteren HADAMARD-FABRY'schen Satz. Vgl. HADAMARD, a. a. O. S. 21—22.

Ich schreite zum Beweise des Satzes II. Sei

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots z_n,\ \ldots \tag{7}$$

$$|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = \cdots = 1$$

eine abzählbare, am Einheitskreise überall dichte Punktmenge. Man bilde aus den Zahlen (7) eine unendliche Folge

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots x_n,\ \ldots$$

die alle Glieder der Menge (7) u. zw. jedes unendlich oft enthält. Man setze z. B.

$$\begin{array}{llll} x_1 = z_1, & & & \\ x_2 = z_1, & x_3 = z_2, & & \\ x_4 = z_1, & x_5 = z_2, & x_6 = z_3, & \\ x_7 = z_1, & x_8 = z_2, & x_9 = z_3, & x_{10} = z_4, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Seien endlich

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots \alpha_n,\ \ldots$$

positive Zahlen, die monoton wachsend gegen 1 konvergieren, d. h.

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_n < \cdots$$

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = 1.$$

Ich nehme nun an, dass die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, und ich setze

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=\frac{n}{3}}^{\frac{2n}{3}} \binom{n}{\nu} a_\nu x^\nu.$$

Kraft des Hilfsatzes II lässt sich eine unendliche Folge von wachsenden positiven ganzen Zahlen

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \ldots \nu_n,\ \ldots$$

bestimmen, die der doppelten Bedingung genügt:

1) $$\left|\Phi_{\nu_n}(x_n)\right|^{\frac{1}{\nu_n}} > \alpha_n$$

2) $$\nu_{n+1} > 2\,\nu_n.$$

Ich konstruiere nun eine gewisse Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ des Punktes $a_0, a_1, a_2, \ldots$, u. zw. auf die folgende Art: es sei

$$\varepsilon_\mu = \frac{\alpha_n^{\nu_n}}{\nu_n}$$

wenn der Index μ den Ungleichungen

(8) $$\frac{\nu_n}{3} \leqq \mu \leqq \frac{2\,\nu_n}{3}$$

genügt. Diese Vorschrift widerspricht sich selber nicht, da

$$\frac{2\,\nu_n}{3} < \frac{\nu_{n+1}}{3}.$$

Wurde über ε_μ im Vorangehenden nicht verfügt, so setze man etwa $\varepsilon_\mu = 1$.

Die Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ *ist eine volle Umgebung.* Denn wenn μ der Ungleichung (8) genügt, so ist

$$1 > \varepsilon_\mu^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{\alpha_n^{\nu_n}}{\nu_n}\right)^{\frac{1}{\mu}} \geqq \frac{\alpha_n^3}{\nu_n^{\frac{3}{\nu_n}}}$$

und es ist

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n^3 = \lim_{n=\infty} \nu_n^{\frac{3}{\nu_n}} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n^3}{\nu_n^{\frac{3}{\nu_n}}} = 1.$$

Jede Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$, die der vollen Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu, \ldots)$ der Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ angehört, hat den Einheitskreis zur natürlichen Grenze.

Es ist nämlich, die Bezeichnungen des Hilfsatzes II beibehalten

$$|\psi_{r_n}(x_n)| = \left| \Phi_{r_n}(x_n) + \frac{1}{2^{r_n}} \sum_{\frac{r_n}{3}}^{\frac{2 r_n}{3}} {}_{\mu} \binom{r_n}{\mu} (u_\mu - a_\mu) x_n^\mu \right|$$

$$\geq |\Phi_{r_n}(x_n)| - \frac{1}{2^{r_n}} \sum_{\frac{r_n}{3}}^{\frac{2 r_n}{3}} {}_{\mu} \binom{r_n}{\mu} |u_\mu - a_\mu| \, |x_n|^\mu$$

$$\geq |\Phi_{r_n}(x_n)| - \frac{1}{2^{r_n}} \sum_{\frac{r_n}{3}}^{\frac{2 r_n}{3}} {}_{\mu} 2^{r_n} |u_\mu - a_\mu|$$

$$\geq |\Phi_{r_n}(x_n)| - \sum_{\frac{r_n}{3}}^{\frac{2 r_n}{3}} {}_{\mu} \frac{\alpha_n^{r_n}}{r_n}$$

$$= |\Phi_{r_n}(x_n)| - \frac{1}{3} \alpha_n^{r_n} \; {}^{1}$$

$$> \frac{2}{3} \alpha_n^{r_n}.$$

Rekurriert man auf die Bedeutung der Zahlen x_n, α_n, r_n, so folgt aus der letzten Ungleichung, dass

$$\lim_{n=\infty} |\psi_n(z_r)|^{\frac{1}{n}} = 1$$

für $r = 1, 2, 3, \ldots$ Das besagt aber, laut Hilfsatz II, dass für die Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$ die am Einheitskreise überall dicht liegenden Punkte $z_1, z_2, z_3, \ldots$ singulär sind, also dass die Potenzreihe $\Sigma u_n x^n$ den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, w. z. b. w.

Satz III. *Die Menge der fortsetzbaren Potenzreihen hat keinen isolierten Punkt.*

Hilfsatz III. Die ganze Funktion vom Geschlecht Null

$$g(x) = \left(1 + \frac{x}{\varrho_1}\right)\left(1 + \frac{x}{\varrho_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{\varrho_n}\right) \cdots$$

soll lauter reelle negative Wurzeln haben. Dann sind für die drei Potenzreihen

[1] Die Zahl $\frac{1}{3}$ ist mit einer unwesentlichen Impräzision behaftet.

$$(9) \quad \Sigma a_n x^n, \qquad (10) \quad \Sigma a_n g(n) x^n, \qquad (11) \quad \sum \frac{a_n}{g(n)} x^n$$

bei geradliniger Fortsetzung die nämlichen Punkte singulär, d. h. diese drei Potenzreihen haben den nämlichen geradlinigen MITTAG-LEFFLER'*schen Stern.*

1) Nach einem Satze des Herrn FABER[1] hat die durch die Reihe

$$\Sigma g(n) x^n$$

definierte Funktion den einzigen singulären Punkt $x = 1$. Daraus folgt, nach dem HADAMARD'schen Kompositionssatz,[2] dass die Reihe (10) *höchstens* die singulären Punkte der Reihe (9) als singuläre Punkte zulässt.

2) Man könnte aus den in Anmerkung [1] zitierten allgemeinen Sätzen ähnlich schliessen, dass die *Reihe* (11) *höchstens die singulären Punkte der Reihe* (9) *als singuläre Punkte* zulässt. Elementarer zeigt man das so:

Sei G ein beliebiges, ganz im endlichen liegendes abgeschlossenes Bereich der x-Ebene, das die beiden Eigenschaften hat:

jeder seiner Punkte kann durch eine ganz in G gelegene gerade Strecke mit dem Punkte $x = 0$ verbunden werden, und

die aus der Fortsetzung der Potenzreihe (9) hervorgehende Funktion $f(x)$ ist im Innern und am Rande von G ausnahmslos regulär.

Es genügt zu zeigen, dass die Reihe (11) im Innern von G ebenfalls regulär ist. Sei $0 < r < 1$, so kann man voraussetzen, dass die Kreisfläche $|x| \leq r$ zu G gehört.

Ich setze

$$f_1(x) = \frac{\varrho_1}{x^{\varrho_1}} \int_0^x x^{\varrho_1 - 1} f(x)\, dx, \ldots f_p(x) = \frac{\varrho_p}{x^{\varrho_p}} \int_0^x x^{\varrho_p - 1} f_{p-1}(x)\, dx, \ldots$$

wo alle Integrationswege geradlinig sind.

Für $|x| < 1$ hat man die Darstellung

$$f_p(x) = \sum \frac{a_n x^n}{\left(1 + \frac{n}{\varrho_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{\varrho_p}\right)},$$

[1] Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen. Math. Annalen 57. S. 369—388. — Vgl. die allgemeineren Entwicklungen bei LINDELÖF, Calcul des résidus (Collection Borel). 108—141.

[2] HADAMARD, a. a. O. S. 69—72.

und daraus folgt, gleichmässig für $|x| \leq r$

$$\lim_{p=\infty} f_p(x) = \sum \frac{a_n}{g(n)} x^n.$$

Im ganzen Bereiche G sind die Funktionen

(12) $$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots f_p(x), \ldots$$

regulär. Es gibt eine positive Zahl M, so dass im ganzen Bereich G

$$|f(x)| \leq M.$$

Ich behaupte, dass in demselben Bereich G auch

(13) $$|f_p(x)| \leq M$$

für jedes p. In der Tat, die Richtigkeit der Ungleichung (13) für ein bestimmtes p vorausgesetzt, erhält man im Bereiche G

$$\begin{aligned} |f_{p+1}(x)| &= \left| \frac{\varrho_{p+1}}{x^{\varrho_{p+1}}} \int_0^x x^{\varrho_{p+1}-1} f(x)\, dx \right| \\ &\leq M \frac{\varrho_{p+1}}{|x|^{\varrho_{p+1}}} \int_0^{|x|} y^{\varrho_{p+1}-1}\, dy \\ &= M, \end{aligned}$$

wo das Integral in der mittleren Zeile reellen Integrationsweg hat. So ist (13) durch vollständige Induktion für beliebiges p bewiesen.

Aus allen dargelegten Tatsachen folgt nun, gemäss einem grundlegenden STIELTJES'schen Satze,[1] dass die Folge (12) im Innern des Gebietes G gegen eine Funktion konvergiert, die für $|x| < 1$ durch die Potenzreihe (11) dargestellt wird, und im Innern von G ausnahmslos regulär ist, w. z. b. w.

3) Man wende das Resultat in 2) auf die Reihe (10), und das Resultat in 1) auf die Reihe (11) an, um den vollen Hilfsatz III zu erhalten.

Ich werde übrigens im folgenden nur den in 2) ausführlich bewiesenen Teil des Hilfssatzes III wesentlich gebrauchen.

Hilfsatz IV. Seien $r_1, r_2, r_3, \ldots$ vorgegebene nichtnegative Zahlen, die der Bedingung

[1] Correspondance d'HERMITE et de STIELTJES, Bd II. S. 369—370.

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, r_n^{\frac{1}{n}} = 1$$

genügen. So existiert immer eine ganze Funktion vom Geschlecht Null mit lauter reellen negativen Wurzeln

$$g(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\varrho_n}\right)$$

die den Ungleichungen

$$g(n) \geqq r_n$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügt.[1]

Ich konstruiere die Funktion $g(x)$, indem ich die Folge

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_n, \ldots$$

durch immer regelmässigere majorante Folgen ersetze.

1) Ich definiere zuerst die Folge der reellen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \ldots$$

u. zw. so

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 &, \text{ wenn } r_n \leqq 1 \\ \frac{1}{n} \log r_n, & \text{»} \quad r_n > 1. \end{cases}$$

Es ist

$$\alpha_n \geqq 0$$
$$r_n \leqq e^{n\alpha_n}$$
$$\lim \alpha_n = 0.$$

2) Es sei β_n das Maximum der unendlichen Zahlenmenge

$$\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots$$

[1] Zur Erläuterung sei hinzugefügt, dass $\lim_{n=\infty} g(n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

Die Folge

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n, \ldots$$

hat die Eigenschaften

$$\alpha_n \leqq \beta_n$$

$$\lim_{n=\infty} \beta_n = 0$$

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \beta_3 \geqq \cdots \geqq \beta_n \geqq \beta_{n+1} \geqq \cdots$$

3) Man kann auf mehrere Arten eine Folge

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_n, \ldots$$

bilden, die die Eigenschaften hat

$$\beta_n \leqq \gamma_n$$

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n = 0$$

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \cdots > \gamma_n > \gamma_{n+1} >$$

z. B. durch folgende Vorschrift:

$$\gamma_n = \beta_n,$$

wenn $\beta_n > \beta_{n+1}$,

$$\gamma_n = \frac{k\beta_{n-i} + i\beta_{n+k}}{i+k}$$

wenn

$$\beta_{n-i} > \beta_{n-i+1} = \cdots = \beta_{n-1} = \beta_n = \beta_{n+1} = \cdots = \beta_{n+k} > \beta_{n+k+1}.$$

(D. h. durch lineare Interpolation. Dabei ist nur der triviale Fall bei Seite gelassen, dass $\beta_n = 0$ für alle n von einem gewissen an.)

4) Sei endlich

$$\delta_1 = \gamma_1$$

und δ_{n+1} die grössere der beiden Zahlen γ_{n+1} und $\delta_n - \frac{1}{2n}$

$$\delta_{n+1} = \mathrm{Max}\left(\gamma_{n+1}, \delta_n - \frac{1}{2n}\right).$$

Mit Berücksichtigung der Divergenz der harmonischen Reihe stellt man leicht die folgenden Eigenschaften der so definierten Folge

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n, \ldots$$

fest:

$$\gamma_n \leq \delta_n$$

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = 0$$

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \cdots > \delta_n > \delta_{n+1} > \cdots$$

$$\delta_n - \delta_{n+1} \leq \frac{1}{2n}.$$

Es ist

$$r_n < e^{n\alpha_n} \leq e^{n\beta_n} \leq e^{n\gamma_n} \leq e^{n\delta_n}$$

und die Folge

$$e^{1\delta_1},\ e^{2\delta_2},\ e^{3\delta_3}, \ldots e^{n\delta_n}, \ldots$$

ist schon genug regulär für unsere Zwecke. Wir gehen von dieser Folge zur Funktion $g(x)$ über, indem wir

$$\frac{1}{\varrho_n} = 2\delta_n - 2\delta_{n+1}, \quad \varrho_n = \frac{1}{2(\delta_n - \delta_{n+1})}$$

$$g(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\varrho_n}\right)$$

setzen. Dieser Ausdruck ist nicht illusorisch, da die Reihe

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \cdots + \frac{1}{\varrho_n} + \cdots =$$

$$= (2\delta_1 - 2\delta_2) + (2\delta_2 - 2\delta_3) + \cdots + (2\delta_n - 2\delta_{n+1}) + \cdots$$

konvergiert. Ich behaupte, dass

$$e^{n\delta_n} \leq g(n).$$

Zum Beweise brauche ich die elementare Tatsache,[1] dass für $0 < x \leq 1$

(14) $$1 + x > e^{\frac{x}{2}}.$$

[1] Beweist sich etwa so: die Potenzreihenentwicklung der Funktion

Es ist gewiss

(15) $$g(n) \geq \left(1 + \frac{n}{\varrho_n}\right)\left(1 + \frac{n}{\varrho_{n+1}}\right) \cdots$$

Nun ist nach der vierten Eigenschaft der Folge $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$

$$\varrho_n \geq n; \quad \varrho_{n+1} \geq n + 1, \quad \varrho_{n+2} \geq n + 2, \ldots$$

Daher ist die Ungleichung (14) auf jeden Faktor an der rechten Seite von (15) anwendbar, und so wird

$$g(n) \geq e^{\frac{1}{2}\frac{n}{\varrho_n}} e^{\frac{1}{2}\frac{n}{\varrho_{n+1}}} \cdots$$

$$= e^{\frac{n}{2}(2\delta_n - 2\delta_{n+1} + 2\delta_{n+1} - 2\delta_{n+2} + \cdots)}$$

$$= e^{n\delta_n}.$$

Umsomehr ist

$$g(n) \geq r_n$$

w. z. b. w.

Hilfssatz V. Es sei $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *eine Folge nichtnegativer Zahlen, die der Bedingung*

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n^{\frac{1}{n}} = 1$$

genügt, und

(16) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

eine beliebige (im Einheitskreise konvergente) Potenzreihe. So gibt es eine Potenzreihe

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

$$f(x) = \frac{1 + x - e^{\frac{x}{2}}}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4 \cdot 2!} - \frac{x^2}{8 \cdot 3!} - \cdots$$

hat nur einen Zeichenwechsel. Zufolge der DESCARTES'schen Regel, hat $f(x)$ höchstens eine positive Wurzel. Nun ist

$$f(0) > 0, \quad f(1) > 0$$

und so ist für $0 \leq x \leq 1$

$$f(x) > 0.$$

die bei geradliniger Fortsetzung die nämlichen singulären Stellen aufweist, wie die Potenzreihe (16), *und deren Koeffizienten den Ungleichungen*

$$|b_n| \leq \varepsilon_n$$

genügen.

In der Tat, es sei $\varepsilon_n > 0$ für $n \geq N$. Man setze

$$r_n = \frac{|a_n|}{\varepsilon_n} \qquad (n = N, N+1, N+2, \ldots)$$

so hat man

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, r_n^{\frac{1}{n}} = 1 .$$

Man bestimme gemäss Hilfssatz IV eine ganze Funktion $g(x)$ vom Geschlecht Null mit nur negativen Wurzeln die den Ungleichungen

$$r_n < g(n) \qquad (n = N, N+1, \ldots)$$

genügt. Setzt man

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n < N \\ \dfrac{a_n}{g(n)} & \text{»} \quad n \geq N, \end{cases}$$

so befriedigt die Reihe $\Sigma b_n x^n$ gemäss Hilfssatz III alle Forderungen der Hilfssatzes V.

Hilfssatz V enthält aber den Satz III ersichtlicherweise. Denn ist $\Sigma a_n x^n$ eine fortsetzbare Potenzreihe, $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ eine beliebige volle Umgebung, $\Sigma b_n x^n$ die Reihe, von welcher der Hilfssatz V handelt, so gehört die Reihe $\Sigma (a_n + b_n) x^n$ der vollen Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, jedoch nicht der nächsten Umgebung der Reihe $\Sigma a_n x^n$ an, und ist gewiss fortsetzbar, w. z. b. w.

Die Sätze I, II, III erweisen vollständig die über die Verteilung der fortsetzbaren und nichtfortsetzbaren Reihen in der Einleitung erwähnte Tatsache. Die eingeführten Definitionen und Methoden bleiben jedoch nicht dabei stehen, sondern gestatten auch die Verteilung der fortsetzbaren Reihen untereinander auf dieselbe Art zu studieren. Sei S eine beliebige abgeschlossene Menge am Einheitskreis; man nenne M_S die Menge aller Potenzreihen, die am Einheitskreise *mindestens* die Punkte von S zu singulären Punkten haben. Durch eine geringe Änderung im Beweise des Satzes II ergibt sich der

Satz IV. *Die Menge M_S besteht nur aus inneren Punkten, ist überall dicht, und ihre komplementäre Menge ist perfekt.*

Wegen der Einfachheit des Beweises und des Resultates gebe ich noch folgenden Satz an:

Satz V. *Die Menge aller Potenzreihen, die am Einheitskreise ausser Polen keine Singularitäten haben, besteht nur aus isolierten Punkten.*

In der Tat, sei $\Sigma a_n x^n$ eine beliebige Reihe, die am Einheitskreis von Polen abgesehen regulär ist. Man schlage um diese Reihe eine Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, die so beschaffen ist, dass

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

$\left(\text{also etwa } \varepsilon_n = \frac{1}{n}\right)$.

Wenn $\Sigma u_n x^n$ dieser Umgebung angehört, und der nächsten Umgebung von $\Sigma a_n x^n$ nicht angehört, dann ist der Konvergenzkreis der Reihe

$$\Sigma (u_n - a_n) x^n$$

der Einheitskreis, und es ist

$$|u_n - a_n| < \varepsilon_n,$$

also gewiss

$$\lim_{n=\infty} (u_n - a_n) = 0.$$

Daher hat die Reihe $\Sigma (u_n - a_n) x^n$ am Einheitskreis keinen Pol. Folglich hat $\Sigma (u_n - a_n) x^n$, also $\Sigma u_n x^n$ am Einheitskreis eine nichtpolare Singularität, w. z. b. w.

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION AND THE THEORY OF THE DISTRIBUTION OF PRIMES

BY

G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD,

TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.[1]

I.

Introduction and summary.

1.1.[2] We have united in this paper a series of contributions towards the solution of various outstanding questions in the Analytic Theory of Numbers.

[1] Some of the results of which this memoir contains the first full account have already been stated shortly and incompletely in the following notes and abstracts.

G. H. HARDY: (1) 'On the zeros of RIEMANN's Zeta-function', *Proc. London Math. Soc.* (records of proceedings at meetings), ser. 2, vol. 13, 12 March 1914, p. xxix; (2) 'Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN', *Comptes Rendus*, 6 April 1914.

J. E. LITTLEWOOD: 'Sur la distribution des nombres premiers', *Comptes Rendus*, 22 June 1914.

G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD: (1) 'New proofs of the prime-number theorem and similar theorems', *Quarterly Journal*, vol. 46, 1915, pp. 215—219; (2) 'On the zeros of the RIEMANN Zeta-function' and (3) 'On an assertion of TSCHEBYSCHEF', *Proc. London Math. Soc.* (records etc.), ser. 2, vol. 14, 1915, p. XIV.

[2] The sections, paragraphs, and formulae contained in this memoir are numbered according to the decimal system of PEANO, the aggregate of numbers employed forming a selection of the rational numbers arranged in order of magnitude. Thus every number occurring in the first section begins with 1; the first paragraph is 1.1 and the first formula of the first paragraph 1.11. The second would naturally be 1.12; but here four formulae occur which are parallel for the purposes of our argument, and so these are numbered 1.121, 1.122, 1.123 and 1.124.

In a long and complicated memoir such as this, PEANO's system has many advantages. It enables the author, in the process of revision of his work, to delete or insert formulae without serious interference with the numbering of the remainder; and it enables the reader to discover any formula referred to with the minimum of trouble.

Our answers to these questions are naturally tentative and fragmentary. The importance and difficulty of the problems dealt with should be a sufficient apology for the incompleteness and miscellaneous character of the results.

We begin, in section 2, by considering some applications to the theory of primes of the formula

$$(1.11) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} \Gamma(s) y^{-s} ds = e^{-y}, \quad (\varkappa > 0, \Re(y) > 0),$$

of CAHEN and MELLIN,[1] a formula which seems not unlikely to play a more prominent part in the Theory of Numbers than has been assigned to it hitherto. Using this formula in combination with some of the 'Tauberian' theorems which we have proved in a series of recent papers in the *Proceedings of the London Mathematical Society* and elsewhere, we are able (in 2. 1) to deduce new theorems as to the convergence of Dirichlet's series of the most general type, from which follow as corollaries such results as

$$(1.121) \qquad \psi(x) \sim x,$$

$$(1.122) \qquad M(x) = o(x),$$

$$(1.123) \qquad \sum \frac{\mu(n)}{n} = 0,$$

all of which are known to be equivalent[2] to the 'Prime Number Theorem'[3]

[1] CAHEN, *Thèse*, Paris, 1894, and *Annales de l'École Normale Supérieure*, ser. 3, vol. 11, 1894, pp. 75—164 (p. 99); MELLIN, *Acta Societatis Fennicae*, vol. 20, 1895, no. 7, pp. 1—39 (p. 6), and *Math. Annalen*, vol. 68, 1910, pp. 305—337.

[2] By this we mean that, from any one of these results, all the rest can be deduced by elementary reasoning which involves no appeal to the theory of functions of a complex variable. That (1. 121), and (1. 124) are equivalent in this sense was shown by DE LA VALLÉE-POUSSIN (*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, vol. 20, part 2, 1896, pp 360—361). The deduction of (1. 122) from (1. 123) is of a very simple character: that of (1. 123) from (1. 122) was first made by AXER (*Prace Matematyczno-Fizyczne*, vol. 21, 1910, pp. 65—95). That (1. 123) follows from (1. 121) was shown by LANDAU (*Dissertation*, Berlin, 1899), and the converse deduction is also due to him (*Wiener Sitzungsberichte*, vol. 115, 1906, pp. 589—632).

[3] We append the following definitions for the benefit of readers who may not be familiar with the notations usual in the Analytic Theory of Numbers.

(1) $f(x) = O(\varphi(x))$ means that a constant K exists such that $|f| < K\varphi$.

(2) $f(x) = o(\varphi(x))$ means that

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$$

when x tends to ∞, or to whatever limit may be in question.

(1.124) $$\Pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

In 2.2 we obtain an explicit formula for the function

(1.13) $$F(y) = \sum_1^\infty (\Lambda(n) - 1) e^{-ny} \quad (\Re(y) > 0),$$

from which we deduce that, assuming the hypothesis of RIEMANN as to the zeros of $\zeta(s)$,

(1.141) $$F(y) = O\sqrt{\frac{1}{y}}$$

as $y \to 0$, while a positive constant K exists, such that each of the inequalities

(1.142) $$F(y) < -K\sqrt{\frac{1}{y}}, \quad F(y) > K\sqrt{\frac{1}{y}}$$

is satisfied for an infinity of values of y tending to zero. From this follows as a corollary the theorem of SCHMIDT[1] which asserts the existence of a K such that each of the inequalities

(1.143) $$\psi(x) - x < -K\sqrt{x}, \quad \psi(x) - x > K\sqrt{x}$$

is satisfied for an infinity of values of x tending to infinity.

It should be observed, however, that our method does not enable us to prove the wider inequalities

(1.15) $$\psi(x) - x < -x^{\Theta-\delta}, \quad \psi(x) - x > x^{\Theta-\delta},$$

(3) $\mu(n) = (-1)^q$ if n is a product of q different primes, and is otherwise zero.
(4) $\Lambda(n) = \log p$ if $n = p^m$, and is otherwise zero.

(5) $$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$$

(6) $$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

(7) $\Pi(x)$ is the number of primes less than or equal to x.

[1] *Math. Annalen*, vol. 57, 1903, pp. 195—204; LANDAU, *Handbuch*, pp. 711 *et seq.* Naturally our argument does not give so large a value of K as SCHMIDT's. The actual inequalities proved by SCHMIDT are not the inequalities (1.143) but the substantially equivalent inequalities (1.51).

which hold when the upper limit Θ of the real parts of the zeros of $\zeta(s)$ is greater than $\frac{1}{2}$. Nor does it seem possible, in the present state of our knowledge of the properties of $\zeta(s)$, to give a satisfactory proof of the explicit formula for

$$f(y) = \sum_{1}^{\infty} \mu(n) e^{-ny}$$

which corresponds to that which we find for the function (1.13).

1.2. In 2.3 we are concerned with a statement made by Tschebyschef[1] in 1853, of which no proof of any kind has yet been published. Tschebyschef asserts that the function

$$F(y) = e^{-3y} - e^{-5y} + e^{-7y} + e^{-11y} - \cdots\cdots = \sum (-)^{\frac{p+1}{2}} e^{-py}$$

tends to infinity as $y \to 0$. We prove that this result is true if all the complex zeros of the function

(1.21) $$L(s) = 1^{-s} - 3^{-s} + 5^{-s} - \cdots\cdots (\sigma > 0)$$

have their real part equal to $\frac{1}{2}$. There seems to be little doubt that, if this assumption is false, then Tschebyschef's assertion is also false, but this we have not succeeded in proving rigorously. The difficulties which have debarred us from a proof are of the same nature as those which have prevented us from deducing the inequalities (1.15) from our explicit formula for the function (1.13).

In 2.4 we prove that

(1.22) $$\int_{-T}^{T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \sim 2T \log T$$

as $T \to \infty$. The method used may be adapted to show that

(1.23) $$\int_{-T}^{T} |\zeta(\beta + it)|^2 dt \sim (2\pi)^{2\beta - 1} \zeta(2 - 2\beta) \frac{T^{2-2\beta}}{2 - 2\beta},$$

[1] Tschebyschef, *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersbourg*, vol. 11, 1853, p. 208, and *Oeuvres*, vol. 1, p. 697; Landau, *Rendiconti di Palermo*, vol. 24, 1907, pp. 155—156.

if $\beta < \frac{1}{2}$: but there is nothing essentially new in this last formula, as it follows from the functional equation satisfied by $\zeta(s)$ and the known result

$$\int_{-T}^{T} |\zeta(\beta + it)|^2 dt \sim 2\zeta(2\beta) T,$$

where $\beta > \frac{1}{2}$.[1]

We conclude this section by noticing a remarkable formula, the form of which was suggested to us by an observation of Mr S. RAMANUJAN. We are unable to give a satisfactory proof of this formula, but it seems to us well worthy of attention. It is intimately connected with an expression of the function $\frac{1}{\zeta(s)}$ as a definite integral, which is due to MARCEL RIESZ.[2]

1.3. In section 3 we are concerned with the series

(1.31)
$$\sum e^{a\varrho \log(-i\varrho)} x^{\varrho} \varrho^{-\varkappa},$$

where a, x, and $\varkappa$ are real, and ϱ is a complex zero of $\zeta(s)$. Our object is to obtain results for this series similar to those obtained by LANDAU[3] for the simpler series

$$\sum x^{\varrho},$$

and our main argument is an adaptation of his.[4] The results of this section are simplified in form if we assume the truth of the RIEMANN hypothesis. Writing $\frac{1}{2} + i\gamma$ for ϱ, and confining ourselves to the zeros for which $\gamma > 0$, series of the type (1.31) are found to be substantially equivalent to series of the type

(1.32)
$$\sum \gamma^{-\omega} e^{ai\gamma \log(\gamma\theta)},$$

where a, θ, and ω are real and the first two positive. Our principal result is that

---

[1] LANDAU, *Handbuch*, p. 816.

[2] *Acta Mathematica*, vol. 40, 1916, pp. 185—190.

[3] *Math. Annalen*, vol. 71, 1912, pp. 548—564.

[4] The idea which dominates the critical stage of the argument is also LANDAU's, but is to be found in another of his papers ('Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen', *Göttinger Nachrichten*, 1912, pp. 687—771, especially p. 707, Hilfsatz 10).

(1.33)
$$\sum_{0<\gamma<T} e^{a i \gamma \log(\gamma 0)} = O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right);$$

this result is trivial if $a > 1$, but otherwise significant. The apparent dependence of the order on a is curious, and we are disposed to believe that it does not really correspond to the truth, and that the order is really $O\left(T^{\frac{1}{2}+\delta}\right)$ for all values of a and all positive values of δ. But this we are unable to prove.

1.4. Section 4 is devoted to a closer study than has yet been published of the zeros of the Zeta-function which lie on the line $\sigma = \frac{1}{2}$. That *some* such zeros exist was first shown by GRAM,[1] and the later investigations of DE LA VALLÉE-POUSSIN, GRAM,[1] LINDELÖF,[1] and BACKLUND[1] have shown that there are exactly 58 on the line

$$\left(\frac{1}{2} - 100\, i,\ \frac{1}{2} + 100\, i\right),$$

and no other complex zeros between the lines $t = -100$, $t = 100$. In other words the function $\Xi(t)$ of RIEMANN has exactly 58 real zeros between -100 and 100, and no complex zeros whose real part lies between these limits.

It was shown recently by HARDY[2] that $\Xi(t)$ has an infinity of real zeros. The method of proof depended on the use of (i) the CAHEN-MELLIN integral and (ii) a lemma relating to the behaviour of the series

$$\vartheta_3(0, \tau) = 1 + 2\sum q^{n^2}$$

when q tends in a certain manner to the point -1 on the circle of convergence. The proof given by HARDY was materially simplified by LANDAU,[3] who showed that no property of the ϑ-function was needed for the purpose of the proof except the obvious one expressed by the equation

$$\vartheta_3(0, \tau) = O\sqrt{\frac{1}{1-|q|}}.$$

[1] See GRAM, *Acta Mathematica*, vol. 27, 1903, pp. 289—304; LINDELÖF, *Acta Societatis Fennicæ*, vol. 31, 1913, no. 3; BACKLUND, *Oversigt af Finska Vetenskap-Societetens Förhandlingar*, vol. 54, 1911—12, A, no. 3; and further entries under these names in LANDAU's bibliography.

[2] *Comptes Rendus*, 6 April, 1914.

[3] *Math. Annalen*, vol. 76, 1915, pp. 212—243.

LANDAU also extended the proof so as to apply to the functions defined by the series

$$\sum \frac{\chi(n)}{n^s},$$

where $\chi(n)$ is a 'character to modulus k',[1] and in particular to the function (1.21). He also proved that there is a zero of $\Xi(t)$ between T and $T^{1+\delta}$, for all positive values of δ and all sufficiently large values of T. From this it follows that the number $N_0(T)$ of zeros between 1 and T is of the form Ω (log log T).[2]

The original proof given by HARDY made use of two parameters α and p; and our first idea, for obtaining a more precise result, was to treat α and p as functions of one another. The result indicated by our investigations was that of the existence of a zero between T and $T+T^{\frac{1}{2}+\delta}$ for any positive δ and all sufficiently large values of T. This would prove that

$$N_0(T) = \Omega\left(T^{\frac{1}{2}-\delta}\right).$$

But this proof has never been completed, as we are now able to prove, by an entirely different method, that there is a zero between T and $T^{\frac{1}{4}+\delta}$ for any positive δ and all sufficiently large values of T. This shows that

$$N_0(T) = \Omega\left(T^{\frac{3}{4}-\delta}\right). \tag{1.41}$$

Our proof of this result is now free from any reference either to the CAHEN-MELLIN integral or to the theory of elliptic functions.

We have entertained hopes of showing, by a modification of our argument, that

$$N_0(T) = \Omega(T^{1-\delta}).$$

But our attempts in this direction have so far been unsuccessful.

1.5. Finally, Section 5 contains a full demonstration of a result given still more recently, with an outline of the proof, by LITTLEWOOD.[3] It follows from the investigations of SCHMIDT, already referred to in 1.1, that the inequalities (1.143), or the substantially equivalent inequalities

---

[1] See LANDAU, *Handbuch*, pp. 401 *et seq.*

[2] For an explanation of this notation see our paper 'Some Problems of Diophantine Approximation (II)', *Acta Mathematica*, vol. 37, pp. 193—238 (p. 225).

[3] *Comptes Rendus*, 22 June 1914.

$$(1.51) \qquad \Pi(x) - Li\,x + \frac{1}{2} Li \sqrt{x} < -K \frac{\sqrt{x}}{\log x}, \quad \Pi(x) - Li\,x + \frac{1}{2} Li\sqrt{x} > K \frac{\sqrt{x}}{\log x},$$

are each satisfied by values of x which surpass all limit. It is shown here that these last inequalities may be replaced by

$$(1.52) \qquad \Pi(x) - Li\,x < -K \frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x}, \quad \Pi(x) - Li\,x > K \frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x}.$$

From the second of these inequalities it follows, in particular, that the relation

$$(1.53) \qquad \Pi(x) < Li\,x,$$

which has been regarded, for empirical reasons, as probably true, is certainly false.

The supposed inequality (1.53) is, as has been shown by GAUSS, GOLDSCHMIDT, GRAM, PHRAGMÉN and MEISSEL,[1] supported by evidence drawn from the distribution of the prime numbers less than 1,000,000,000. The difference $\Pi(x) - Li\,x$ contains (to put the matter roughly) a term $-\frac{1}{2} Li\sqrt{x}$ and an oscillating term of order not less than $\frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x}$, which is of course of higher order than the former term. But the increase of $\log\log\log x$ is exceedingly slow; thus

$$\log\log\log 10{,}000{,}000{,}000 = 1 \cdot 143\cdots;$$

and it is not surprising, therefore, that the term of constant sign should exert a preponderating influence throughout the limits within which calculation is feasible.

The question arises as to whether the function $\log\log\log x$ can be replaced by any more rapidly increasing function, The method which we use, depending as it does on KRONECKER's theorems concerning Diophantine Approximation, has a certain analogy with that by which BOHR proved that $\zeta(1+ti)$ is not bounded for $t > 1$.[2] In that case the conclusion is that $\zeta(1+ti)$ is sometimes of order as great as $\log\log t$; and LITTLEWOOD[3] has shown that (on the RIEMANN hypothesis)

$$\zeta(1+ti) = O(\log\log t \,\log\log\log t)$$

---

[1] See the references in LANDAU's bibliography, and LEHMER's *List of prime numbers from 1 to 10,006,721* (Washington, 1914).

[2] BOHR and LANDAU, *Göttinger Nachrichten*, 1910, pp. 303—330.

[3] *Comptes Rendus*, 29 Jan. 1912.

so that the conclusion is certainly very nearly the best possible of its kind. It is quite possible that this may be true also of the inequalities (1.52); but we are naturally not prepared to express any very definite opinion on the point. It may be remarked in this connexion that BOHR and LANDAU[1] have shown that, on the RIEMANN hypothesis, the true maximum order of

$$\frac{\zeta'(1+ti)}{\zeta(1+ti)}$$

is exactly $\log\log t$.

The method used in this section is capable of application to other important problems. It may be used, for example, to show that if

$$\psi_1(x) = \sum_{p^m < x} (-1)^{\frac{m(p-1)}{2}} \log p$$

then sequences of values of x exist for which $\psi_1(x)$ tends either to ∞ or to $-\infty$, and indeed as rapidly as

$$\sqrt{x}\log\log\log x;$$

and that, if $\Pi_1(x)$ denotes the excess of primes not greater than x and of the form $4n+3$ over those not greater than x and of the form $4n+1$, then sequences of x exist for which $\Pi_1(x)$ tends either to ∞ or to $-\infty$, and indeed as rapidly as

$$\frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x}.$$

This result is of particular interest when considered in connection with those of 2.3. It is known that (to put the matter roughly) the distribution of primes $4n+3$ is *in some senses* denser than that of primes $4n+1$. Our results confirm and elucidate this vague statement, and show in what senses it is true and in what senses false.[2]

2.

Some applications of the integral of Cahen and Mellin.

2.1.

The prime number theorem and allied theorems.

2.11. The investigations of this part of the paper will be based upon certain known results which we state in the form of lemmas.

[1] *Math. Annalen*, vol. 74, 1913, pp. 3—30.

[2] Compare LANDAU, *Math. Annalen*, vol. 61, 1905, pp. 527—550.

Lemma 2.111. If $\varkappa > 0$, $\Re(y) > 0$, and y^{-s} has its principal value, then

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \Gamma(s) y^{-s} ds.$$

This is the CAHEN-MELLIN integral.

Lemma 2.112. If (i) *$F(\sigma + ti)$ is a continuous function of the real variable t and* (ii) *the integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + ti)| dt$$

is convergent, then

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{ti} F(\sigma + ti) dt \to 0$$

as $x \to 0$ or $x \to \infty$.

This result is due to WEYL; it is a generalized form of a theorem of LANDAU.[1]

Lemma 2.113. Let α be a positive number (*or zero*), *and (λ_n) an increasing sequence such that $\lambda_n \to \infty$, $\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \to 1$; and suppose that*

(i) *a_n is real and satisfies one or other of the inequalities*

$$a_n > -K\lambda_n^{\alpha-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}),\ a_n < K\lambda_n^{\alpha-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}),$$

or is complex and of the form

$$O\{\lambda_n^{\alpha-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\};$$

(ii) *the series*

$$f(y) = \sum a_n e^{-\lambda_n y}$$

is convergent for $y > 0$, and

$$f(y) \sim A y^{-\alpha}$$

as $y \to 0$. Then

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n \sim \frac{A\lambda_n^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$$

as $n \to \infty$.

[1] See LANDAU, *Prace Matematyczno-Fizyczne*, vol. 21, p. 170.

This lemma is equivalent to Theorems D, E, and F of our paper 'Some theorems concerning DIRICHLET's series', recently published in the *Messenger of Mathematics*.[1]

2.12. **Theorem 2.12.** *Suppose that*

(i) *the series* $\Sigma a_n \lambda_n^{-s}$ *is absolutely convergent for* $\sigma > \sigma_0 > 0$,

(ii) *the function* $F(s)$ *defined by the series is regular for* $\sigma > c$, *where* $0 < c \leq \sigma_0$, *and continuous for* $\sigma \geq c$,

(iii) $$F(s) = O(e^{C|t|}),$$

where $C < \frac{1}{2}\pi$, *uniformly for* $\sigma \geq c$. *Then the series*

$$f(y) = \sum a_n e^{-\lambda_n y}$$

is convergent for all positive values of y, *and*

$$f(y) = o(y^{-c})$$

as $y \to 0$.

We have

$$(2.121) \qquad e^{-\lambda_n y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \Gamma(s)(\lambda_n y)^{-s} ds$$

if $y > 0$, $\varkappa > 0$, and so

$$(2.122) \qquad f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \Gamma(s) y^{-s} F(s) ds$$

[1] Vol. 43, 1914, pp. 134—147. If a_n satisfies the second form of condition (i), the series $f(y)$ is necessarily convergent (absolutely) for $y > 0$, so that the first clause of condition (ii) is then unnecessary.

There are more general forms of this theorem, involving functions such as

$$y^{-a}\left\{\log\left(\frac{1}{y}\right)\right\}^{a_1}\left\{\log\log\left(\frac{1}{y}\right)\right\}^{a_2}\cdots\cdots,$$

which we have not troubled to work out in detail.

The relation $f(y) \sim Ay^{-a}$ in condition (ii) must be interpreted, in the special case when $A = 0$, as meaning $f(y) = o(y^{-a})$; and a corresponding change must be made in the conclusion.

if $y > 0$, $\varkappa > \sigma_0$, the term by term integration presenting no difficulty. In virtue of the conditions (ii) and (iii) we may replace (2.122) by

(2.1221) $$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) y^{-s} F(s)\, ds.$$ [1]

The result of the theorem now follows at once from Lemma *2.112*.

Theorem 2.121. *If the conditions* (i), (ii), *and* (iii) *of Theorem* **2.12** *are satisfied,* (iv) $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \to 1$, *and* (v) a_n *is real, and satisfies one or other of the inequalities*

$$a_n > -K\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}),\quad a_n < K\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}),$$

or is complex and of the form

$$O\{\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\};$$

then

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = o(\lambda_n^c).$$

This theorem is obviously a direct corollary of Theorem **2.12** and Lemma *2.113*.

Suppose in particular that $\lambda_n = n$, $a_n = \mu(n)$, and $c = 1$. Then

$$F(s) = \sum \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)},$$

and all the conditions of Theorem **2.121** are satisfied. Hence we obtain the well-known formula

$$\sum_{\nu \leq n} \mu(\nu) = o(n),$$

which is (1.122).

[1] The argument is so much like that of Landau (*Prace Matematyczno-Fizyczne*, vol. 21, pp. 173 *et seq.*) that it is hardly worth while to set it out in detail. We apply Cauchy's Theorem to the rectangle

$$c - iT,\ \varkappa - iT,\ \varkappa + iT,\ c + iT,$$

and then suppose that $T \to \infty$.

2.13. The theoreme of 2.12 do not furnish a direct proof of (1.121) or (1.123). In order to obtain such a proof of (1.123) we must frame analogues of Theorems **2.12** and **2.121** which are applicable when $c = 0$.

Theorem 2.13. *Suppose that* (i) *the conditions* (i), (ii), *and* (iii) *of Theorem* **2.12**, *and the conditions* (iv) *and* (v) *of Theorem* **2.121**, *are satisfied, with* $c = 0$; (ii) *that the function* $F(s)$ *is regular for* $s = 0$. *Then the series* Σa_n *is convergent and has the sum* $F(0)$.

The proof differs but slightly from that of Theorem **2.121**. Instead of (2.1221) we have the equation

$$
f(y) = F(0) + \frac{1}{2\pi i}\int \Gamma(s) y^{-s} F(s)\, ds, \tag{2.131}
$$

where the path of integration consists of (a) the imaginary axis from $-i\infty$ to $-i\delta$, (b) a semicircle described to the left on the segment of the axis from $-i\delta$ to $i\delta$, and (c) the axis from $i\delta$ to $i\infty$. That the rectilinear part of the integral tends to zero follows substantially as before. Also

$$
\int \Gamma(s) y^{-s} F(s)\, ds = \frac{y^{-i\delta}\Gamma(i\delta)F(i\delta) - y^{i\delta}\Gamma(-i\delta)F(-i\delta)}{\log\left(\frac{1}{y}\right)}
$$

$$
- \frac{1}{\log\left(\frac{1}{y}\right)} \int y^{-s} \frac{d}{ds}\{\Gamma(s)F(s)\}\, ds = O\left\{\frac{1}{\log\left(\frac{1}{y}\right)}\right\} = o(1).
$$

Thus $f(y) \to F(0)$ as $y \to 0$, and so, by Lemma *2.113*, $\Sigma a_n = F(0)$.

The conditions of the theorem are satisfied, for example, when

$$
\lambda_n = n,\ a_n = \frac{\mu(n)}{n},\ c = 0,\ F(s) = \frac{1}{\zeta(s+1)}.
$$

Hence the equation (1.123) follows as a corollary.

2.14. In order to obtain the equation (1.121), and so the prime number theorem, we require a slightly different modification of Theorem **2.121**.

Theorem 2.14. *Suppose that the conditions of Theorems* **2.12** *and* **2.121** *are satisfied, except that* $F(s)$ *has a simple pole at the point* $s = c$, *and that the residue at the pole is* g. *Then*

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n \sim \frac{g\lambda_n^c}{c}.$$

The formula (2.131) is in this case replaced by

$$(2.141) \qquad f(y) = g\Gamma(c)y^{-c} + \frac{1}{2\pi i}\int \Gamma(s)y^{-s}F(s)ds,$$

where the path of integration is of a kind similar to that used in the preceding proof. Practically the same argument gives the result

$$f(y) \sim g\Gamma(c)y^{-c},$$

and from this, and Lemma *2.113*, the theorem follows at once.

If we take

$$\lambda_n = n, \quad a_n = \Lambda(n), \quad c = 1, \quad F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

we obtain (1.121).

2.15. We add some further remarks in connection with these theorems.

(i) Theorem **2.14** may be regarded as a generalisation of a theorem of Landau,[1] to which it reduces if we suppose that $a_n \geq 0$, that $F(s)$ is regular on the line $\sigma = c$, and that the equation $F(s) = O(e^{C|t|})$ is replaced by $F(s) = O(|t|^K)$.

In his more recent paper already referred to[2] Landau generalizes the second of these hypotheses in the case in which the series for $F(s)$ is an ordinary Dirichlet's series, showing that it is enough to suppose that

$$\lim_{\sigma \to c+0} \left\{F(\sigma + ti) - \frac{g}{\sigma + ti - c}\right\}$$

should exist, uniformly in any finite interval of values of t. This hypothesis is more general than ours, and our result is naturally capable of a corresponding generalization, which may be effected without difficulty by any one who compares Landau's argument and ours.

(ii) Theorem **2.121** breaks down when the increase of λ_n is too rapid, for example when $\lambda_n = e^n$. It is interesting to observe that in this last case the result is still true but is an obvious corollary of familiar theorems. The series

[1] *Handbuch*, p. 874.

[2] *l. c.* pp. 128, 130 (pp. 173 *et seq.*).

$F(s)$ is now a power-series in e^{-s}; condition (iii) is satisfied *ipso facto;* and the continuity of $F(s)$ for $\sigma \geq c$ involves

$$a_n e^{-nc} = o(1),\ a_n = o(e^{nc}),\ s_n = o(e^{nc})$$

(iii) It is a natural conjecture that the occurrence, in Theorems **2.121**, etc., of the condition $C < \frac{1}{2}\pi$ (which seems somewhat artificial), is due merely to some limitation of the method of proof employed. It is easy to show, by modifying our argument a little, that this is so.

Theorem 2.15. *In Theorems* **2.121, 2.13,** *and* **2.14,** *it is unnecessary to suppose that* $C < \frac{1}{2}\pi$.

Choose a so that $\frac{1}{2}\pi a > C$. Then we have instead of equations (2.121), etc.,

$$(2.151) \qquad \frac{1}{a} e^{-(\lambda_n y)^{1/a}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \Gamma(as)(\lambda_n y)^{-s} ds,$$

$$(2.152) \qquad f(y) = \frac{1}{a}\sum a_n e^{-(\lambda_n y)^{1/a}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \Gamma(as) y^{-s} F(s) ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c - i\infty}^{c + i\infty} \Gamma(as) y^{-s} F(s) ds,$$

$$(2.153) \qquad f(y) = o(y^{-c});$$

or, if $y^{1/a} = \eta$ and $\lambda_n^{1/a} = \mu_n$,

$$(2.154) \qquad \Phi(\eta) = \frac{1}{a}\sum a_n e^{-\mu_n \eta} = o(\eta^{-ac}).$$

Now

$$\mu_n^{ac-1}(\mu_n - \mu_{n-1}) = \frac{1}{a}\lambda^{c - \frac{1}{a}}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\Lambda^{\frac{1}{a} - 1}$$

where $\lambda_{n-1} < \Lambda < \lambda_n$. Thus the ratio

$$\frac{\mu_n^{ac-1}(\mu_n - \mu_{n-1})}{\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})}$$

lies between fixed positive limits. Thus (*e. g.*) $a_n = O\{\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\}$ implies $a_n = O\{\mu_n^{ac-1}(\mu_n - \mu_{n-1})\}$. Hence we can deduce from (2.154) that

(2.155) $$A_n = o(\mu_n^{ac}) = o(\lambda_n^c).$$

It follows that the truth of Theorem **2.121** is independent of the condition in question; and similar arguments apply to the later theorems.

2.2.

The function $\sum\{\Lambda(n) - 1\}e^{-ny}$.

2.21. If $\Re(y) > 0$ and $\varkappa > 1$, we have

(2.211) $$f(y) = \sum \Lambda(n) e^{-ny} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \Gamma(s) y^{-s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds.$$

Let $q = -m - \frac{1}{2}$, where m is a positive integer; and let us apply Cauchy's Theorem to the integral

$$\int \Gamma(s) y^{-s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds,$$

taking the contour of integration to be the rectangle

$$(q - iT,\ \varkappa - iT,\ \varkappa + iT,\ q + iT),$$

T having such a value that no zero of $\zeta(s)$ lies on the contour. When we make T tend to infinity, we obtain the formula

(2.212) $$f(y) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{q - i\infty}^{q + i\infty} \Gamma(s) y^{-s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds - \sum R,$$

where R denotes a residue at a pole inside the contour of integration.[1]

[1] The passage from (2.211) to (2.212) requires in reality a difficult and delicate discussion. If we suppress this part of the proof, it is because no arguments are required which involve the slightest novelty of idea. All the materials for the proof are to be found in Landau's *Handbuch* (pp. 333—368). But the problem treated there is considerably more difficult than

If now $m \to \infty$, $q \to -\infty$, it is easy to prove that the integral in (2.212) tends to zero. For in the first place

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log |t|)$$

uniformly for $\sigma \leq -1$.[1] On the other hand, if $y = re^{i\theta}$, where $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, we have

$$y^{m+\frac{1}{2}-ti}\,\Gamma\left(-m-\frac{1}{2}+ti\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+ti\right)}{\left(-m-\frac{1}{2}+ti\right)\cdots\cdots\left(-\frac{1}{2}+ti\right)}\,e^{\left(m+\frac{1}{2}-ti\right)(\log r+i\theta)} =$$

$$= O\left\{\frac{|y|^m}{m!}\,e^{-\left(\frac{1}{2}\pi-\theta\right)|t|}\right\},$$

$$\left|\int_{q-i\infty}^{q+i\infty}\Gamma(s)\,y^{-s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right| = O\left\{\frac{|y|^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{1}{2}\pi-\theta\right)|t|}\log|t|\,dt\right\} \to 0.$$

Hence

(2.213) $$f(y) = -\sum R$$

where the summation now applies to all the poles of the subject of integration. These poles are

(i) a simple pole at $s = 1$, with residue $-\frac{1}{y}$;

(ii) a simple pole at $s = 0$, with residue $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$;

(iii) simple poles at the points $s = \varrho$, the residue at $s = \varrho$ being $\Gamma(\varrho)\,y^{-\varrho}$;

(iv) simple poles at the points $s = -1, -3, -5, \cdots$, the residue at $s = -2p-1$ being

$$\frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!}\,\frac{\zeta'(-2p-1)}{\zeta(-2p-1)},$$

this one, inasmuch as the integrals and series dealt with are not absolutely convergent. Here everything is absolutely convergent, since $|\Gamma(\sigma+ti)y^{\sigma+ti}|$, where $\Re(y) > 0$, tends to zero like an exponential when $t \to \infty$.

[1] Landau, *Handbuch*, p. 336.

(v) double poles at the points $s=-2, -4, -6, \cdots\cdots$, the residue at $s=-2p$ being

$$\frac{y^{2p}}{(2p)!}\left\{\log\left(\frac{1}{y}\right)+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2p}-A+\frac{1}{2}\frac{\zeta''(-2p)}{\zeta'(-2p)}\right\},$$

where A is Euler's constant.

Thus finally

(2.214) $$f(y)=\frac{1}{y}-\sum\Gamma(\varrho)y^{-\varrho}+\Phi(y),$$

where

(2.2141) $$\Phi(y)=\Phi_1(y)+y^2\log\left(\frac{1}{y}\right)\Phi_2(y),$$

and $\Phi_1(y)$ and $\Phi_2(y)$ are integral functions of y.

2.22. On the other hand we have

$$\frac{1}{e^y-1}=\sum e^{-ny}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\Gamma(s)y^{-s}\zeta(s)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{q-i\infty}^{q+i\infty}\Gamma(s)y^{-s}\zeta(s)ds+\frac{1}{y}+\sum_{0}^{m}\frac{(-y)^n}{n!}\zeta(-n).$$

The integral on the right hand side tends to zero, when $m\to\infty$, if $|y|<2\pi$. For

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\frac{1}{2}(2\pi)^s\sec\frac{1}{2}s\pi\,\zeta(1-s)=O\left\{(2\pi)^{-m}e^{-\frac{1}{2}\pi|t|}\right\},$$

and so

$$\int_{q-i\infty}^{q+i\infty}\Gamma(s)y^{-s}\zeta(s)ds=O\left\{\left(\frac{|y|}{2\pi}\right)^m\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{1}{2}\pi-\theta\right)|t|}dt\right\}.$$

Thus

(2.221) $$\sum e^{-ny}=\frac{1}{y}+\sum_{0}^{\infty}\frac{(-y)^n}{n!}\zeta(-n).^{1}$$

[1] This is merely another form of the ordinary formula which defines Bernoulli's numbers. That

$$\sum e^{-ny}=\frac{1}{y}+\Phi(y),$$

where $\Phi(y)$ is a power-series convergent for $|y|<2\pi$, is of course evident.

Subtracting (2.221) from (2.214) we obtain

(2.222) $$F(y) = \sum (\Lambda(n) - 1) e^{-ny} = -\sum \Gamma(\varrho) y^{-\varrho} + \Psi(y),$$

where

(2.2221) $$\Psi(y) = \Psi_1(y) + y^2 \log\left(\frac{1}{y}\right) \Psi_2(y),$$

and $\Psi_1(y)$ and $\Psi_2(y)$ are power-series convergent for $|y| < 2\pi$.

2.23. We shall now assume the truth of the RIEMANN hypothesis, and apply the formula (2.222) to the study of $F(y)$ when $y \to 0$ by positive values. We denote the complex zeros of $\zeta(s)$ whose imaginary part is positive by $\frac{1}{2} + i\gamma_1, \frac{1}{2} + i\gamma_2, \cdots\cdots$, where $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots$. It is known[1] that

$$\gamma_1 = 14 \cdot 1 \cdots, \quad \gamma_2 = 21 \cdot 0 \cdots, \quad \gamma_3 = 25 \cdot 0 \cdots.$$

We shall require some definite upper limit for

$$N(T+1) - N(T)$$

where $N(T)$ is the number of zeros for which $T < \gamma \leq T + 1$. It is well-known that $N(T+1) - N(T) = O(\log T)$, and it is easy to replace this relation by a numerical inequality, such as

(2.2311) $$N(T+1) - N(T) < 2 \cdot 5 \log T;$$

all that is necessary is to introduce numerical values for the constants in the argument given by LANDAU.[2] In order to prove the relation (2.2311), however, comparatively careful numerical calculations are needed; and a much cruder inequality is sufficient for our purpose. We shall use the inequality

(2.2312) $$N(T+1) - N(T) < 2T,$$

in the proof of which only the roughest approximations are necessary.

[1] GRAM, *l. c.*

[2] *Handbuch*, pp. 337 *et seq.* It is known that, on the RIEMANN hypothesis,

$$N(T+1) - N(T) \sim \frac{\log T}{2\pi}$$

(BOHR, LANDAU, LITTLEWOOD, *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 1913, no. 12, pp. 1—35).

We now write

(2. 232)
$$\sum \Gamma(\varrho) y^{-\varrho} = \frac{1}{\sqrt{y}} (u_1 + u_1' + R),$$

where

$$u_1 = \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\gamma_1\right) y^{-i\gamma_1},\ u_1' = \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\gamma_1\right) y^{i\gamma_1},\ |u_1| = |u'_1| = \sqrt{\frac{\pi}{\cosh \gamma_1 \pi}}.$$

Then

$$\frac{|R|}{|u_1|} \leq 2 \sum_2^\infty \sqrt{\frac{\cosh \gamma_1 \pi}{\cosh \gamma_\nu \pi}} < 4 e^{\frac{1}{2}\gamma_1 \pi} \sum_2^\infty e^{-\frac{1}{2}\gamma_\nu \pi}$$

$$= 4 e^{\frac{1}{2}\gamma_1 \pi} \sum_{r=21}^\infty \sum_{r < \gamma \leq r+1} e^{-\frac{1}{2}\gamma \pi}$$

$$< 8 e^{\frac{1}{2}\gamma_1 \pi} \sum_{21}^\infty r e^{-\frac{1}{2} r \pi}$$

(2. 233)
$$< 240 e^{-3 \cdot 4 \pi} < \frac{1}{50}.$$

2. 24. From (2. 222), (2. 232) and (2. 233) we can at once deduce

Theorem 2. 24. *Suppose that $y \to 0$ by positive values. Further, suppose the* Riemann *hypothesis true. Then*

$$F(y) = \sum (\Lambda(n) - 1) e^{-ny} = O \sqrt{\frac{1}{y}};$$

and there is a constant K such that each of the inequalities

$$F(y) < -\frac{K}{\sqrt{y}},\ F(y) > \frac{K}{\sqrt{y}}$$

is satisfied for an infinity of values of y tending to zero.

We can express this by writing[1]

(2. 241)
$$F(y) = O \sqrt{\frac{1}{y}},\ F(y) = \Omega_L \sqrt{\frac{1}{y}},\ F(y) = \Omega_R \sqrt{\frac{1}{y}}.$$

From the second assertion in Theorem **2. 24** we can of course deduce as a corollary

[1] In our paper 'Some Problems of Diophantine Approximation', *Acta Mathematica*, vol. 37, p. 225, we defined $f = \Omega(\varphi)$ as meaning $f \neq o(\varphi)$. The notation adopted here is a natural extension.

Theorem 2.241. *There is a constant K such that each of the inequalities*

$$\psi(x)-x<-K\sqrt{x},\ \psi(x)-x>K\sqrt{x}$$

is satisfied for values of x surpassing all limit; that is to say

$$\psi(x)-x=\Omega_L(\sqrt{x}),\ \psi(x)-x=\Omega_R(\sqrt{x}).$$

This is substantially the well-known result of Schmidt. In Section 5 we shall show that it is possible to prove more.

It is known that, if the Riemann hypothesis is false, then more is true than is asserted by Theorem 2.241. In fact, if Θ is the upper limit of the real parts of the zeros of $\zeta(s)$, and δ is any positive number, then[1]

$$\psi(x)-x=\Omega_L(x^{\Theta-\delta}),\ \psi(x)-x=\Omega_R(x^{\Theta-\delta}).$$

It seems to be highly probable that in these circumstances we have also

$$F(y)=\Omega_L(y^{-\Theta+\delta}),\ F(y)=\Omega_R(y^{-\Theta+\delta});$$

but we have not been able to find a rigorous proof.

2.25. The equations (2.241) show that, if the Riemann hypothesis is true, the function $F(y)$ behaves, as $y\rightarrow 0$, precisely as might be expected, that is to say with as much regularity as is consistent with the existence of the complex zeroes of $\zeta(s)$. The results which will be proved in Section 5 will show that this is not the case with the corresponding 'sum-function' $\psi(x)-x$. It might reasonably be expected that

$$\psi(x)-x=O(\sqrt{x}),\ \psi(x)-x=\Omega_L(\sqrt{x}),\ \psi(x)-x=\Omega_R(\sqrt{x});$$

but the first of these equations is untrue. This being so, an interesting question arises as to the behaviour of the corresponding Cesàro means formed from the series $\Sigma(\Lambda(n)-1)$. The analogy of the theory of Fourier's series suggests that they are likely to behave with as much regularity as the function $F(y)$; and this conjecture proves to be correct.

[1] Schmidt, *Math. Annalen*, vol. 57, 1903, pp. 195—204; see also Landau, *Handbuch*, pp. 712 *et seq.* The inequalities are stated by Schmidt and Landau in terms of $\Pi(x)$.

We shall consider not CESÀRO's means but the 'arithmetic means' introduced by MARCEL RIESZ.[1] It has been shown by RIESZ[2] that these means are in all substantial respects equivalent to CESÀRO's; and they have many formal advantages over the latter. If

$$\Lambda(n) = a_n, \; f(y) = \sum a_n e^{-ny},$$

then RIESZ's mean of order δ is

$$s^\delta(\omega) = \sum_{n \leq \omega} \left(1 - \frac{n}{\omega}\right)^\delta a_n.$$

And[3], if $\varkappa > 1$,

$$s^\delta(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{\Gamma(\delta+1)\Gamma(s)}{\Gamma(\delta+1+s)} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \omega^s ds. \tag{2.251}$$

If we perform on this integral transformations similar to those of 2.21,[4] we are led to the formula

$$s^\delta(\omega) = \frac{\omega}{\delta+1} - \sum \frac{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\delta+1+\varrho)} \omega^\varrho + S\left(\frac{1}{\omega}\right), \tag{2.252}$$

where $S\left(\frac{1}{\omega}\right)$ is in general a power-series[5] in $\frac{1}{\omega}$ convergent for $\omega > 1$.

Similarly, if

$$1 = b_n, \; \frac{1}{e^y - 1} = \sum b_n e^{-ny},$$

and we denote RIESZ's mean of order δ, formed from the b's, by $t^\delta(\omega)$, we have

[1] M. RIESZ, *Comptes Rendus*, 5 July and 22 Nov. 1909.

[2] M. RIESZ, *Comptes Rendus*, 12 June 1911.

[3] This formula is a special case of a general formula, due to RIESZ and included as Theorem 40 in the Tract 'The general theory of Dirichlet's series' (*Cambridge Tracts in Mathematics*, no. 18, 1915) by G. H. HARDY and M. RIESZ.

[4] See 2.21 for our justification of the omission of the details of the proof. Here again the integrals which occur are absolutely convergent.

[5] If δ is an integer, then $S\left(\frac{1}{\omega}\right)$ is a finite series which may include logarithms. It is in any case without importance.

(2.253) $$t^\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{\Gamma(\delta+1)\Gamma(s)}{\Gamma(\delta+1+s)}\zeta(s)\omega^s ds = \frac{\omega}{\delta+1} + T\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

where $T\left(\frac{1}{\omega}\right)$ also is in general a power-series in $\frac{1}{\omega}$ convergent for $\omega > 1$. Finally, subtracting (2.253) from (2.232), we obtain

(2.254) $$\sum_{n<\omega}(\Lambda(n)-1)\left(1-\frac{n}{\omega}\right)^\delta = -\sum \frac{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\delta+1+\varrho)}\omega^\varrho + P\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

where $P\left(\frac{1}{\omega}\right)$ is in general a power-series in $\frac{1}{\omega}$ convergent for $\omega > 1$. The series involving the ϱ's being absolutely convergent, it follows at once that the left hand side of (2.254) is (on the RIEMANN hypothesis) of the form $O(\sqrt{\omega})$. That it is of the forms $\Omega_L(\sqrt{\omega})$, $\Omega_R(\sqrt{\omega})$ requires no special proof; for this is a corollary of Theorem **2.24**. We have therefore

Theorem 2.25. *All* RIESZ's *means (and so all* CESÀRO's *means), formed from the series* $\Sigma\{\Lambda(n)-1\}$, *are, on the* RIEMANN *hypothesis, of the forms*

$$O(\sqrt{\omega}),\ \Omega_L(\sqrt{\omega}),\ \Omega_R(\sqrt{\omega}).$$

This theorem is in part deeper, in part less deep, than Theorem **2.24**. The O result of Theorem **2.24** is a corollary from that of Theorem **2.25**, and the Ω result of Theorem **2.25** a corollary from that of Theorem **2.24**, the deduction in each case being of an ordinary 'Abelian' type, *i. e.* of the kind used in the proofs of ABEL's fundamental theorem and its extensions.

2.3.

On an assertion of Tschebyschef.

2.31. It was asserted by TSCHEBYSCHEF[1] that the function

(2.311) $$F(y) = e^{-3y} - e^{-5y} + e^{-7y} + e^{-11y} - \cdots = \sum_{p>2}(-1)^{\frac{p+1}{2}} e^{-py}$$

tends to infinity as $y \to 0$.

[1] See 1.2.

We shall now prove that TSCHEBYSCHEF's assertion is correct if all the complex zeros of the function $L(s)$, defined for $\sigma > 0$ by the series $1^{-s} - 3^{-s} + 5^{-s} - \cdots$, have their real part equal to $\frac{1}{2}$.[1]

We have, if $\sigma > 0$,

$$L(s) = 1^{-s} - 3^{-s} + 5^{-s} - \cdots = \prod_{p \geq 3} \left(\frac{1}{1 - (-1)^{(p-1)/2} p^{-s}} \right),$$

$$\log L(s) = \sum_{p,m} \frac{(-1)^{m(p-1)/2}}{m p^{ms}},$$

$$-\frac{L'(s)}{L(s)} = \sum_{p,m} (-1)^{\frac{m(p-1)}{2}} \frac{\log p}{p^{ms}}.$$

Hence

$$(2.312) \qquad f(y) = \sum_{p,m} (-1)^{\frac{m(p-1)}{2}} \log p \; e^{-p^m y} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \Gamma(s) y^{-s} \frac{L'(s)}{L(s)} ds,$$

if $\varkappa > 1$.

We now transform this integral by CAUCHY's Theorem as in 2.21, and obtain the formula[2]

$$(2.313) \qquad f(y) = \sum \Gamma(\varrho) y^{-\varrho} + \Phi(y),$$

where ϱ is a complex zero of $L(s)$ and $\Phi(y)$ is a function of y of much the same form as the function $\Phi(y)$ of (2.214).[3]

2.32. We now require an upper limit for the sum $\sum |\Gamma(\varrho)|$. We could

[1] The evidence for the truth of this hypothesis is substantially the same as that for the truth of the RIEMANN hypothesis. LANDAU (*Math. Ann.*, vol. 76, 1915, pp. 212—243) has proved that there are infinitely many zeros on the line $\sigma = \frac{1}{2}$.

[2] The 'trivial' zeros of $L(s)$ are $s = -1, -3, -5, \cdots$: see LANDAU, *Handbuch*, p. 498.

[3] $$\Phi(y) = \Phi_1(y) + y \log\left(\frac{1}{y}\right) \Phi_2(y).$$

obtain such a limit by an argument similar to that of 2.23: but it is simpler to proceed as follows.[1]

The function $L(s)$ satisfies the equation

$$L(1-s) = 2^s \pi^{-s} \Gamma(s) \sin \frac{1}{2} s\pi\, L(s).$$

We write

$$2^s \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) L(s) = \xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2} + ti\right) = \Xi(t).$$

Then $\Xi(t)$ is real when t is real, and an even function of t. And if we write $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma$, then the zeros of $\Xi(t)$ are given by $t = \gamma$. We are supposing that all these zeros are real.

We have now

$$\Xi(t) = \Xi(0)\, \Pi\left(1 - \frac{t^2}{\gamma^2}\right),$$

$$(2.321) \qquad \xi(s) = \Xi(0)\, \Pi\left(\frac{\frac{1}{4} + \gamma^2}{\gamma^2}\right) \Pi\left\{1 + \frac{s(s-1)}{\frac{1}{4} + \gamma^2}\right\},$$

where only the positive γ's occur in the products. Putting $s = 1$ we obtain

$$(2.322) \qquad \Xi(0)\, \Pi\left(\frac{\frac{1}{4} + \gamma^2}{\gamma^2}\right) = \xi(1) = \frac{2L(1)}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

and so

$$\Pi\left\{1 + \frac{s(s-1)}{\frac{1}{4} + \gamma^2}\right\} = \frac{2\,\xi(s)}{\sqrt{\pi}} = 2^{1+s} \pi^{-\frac{1}{2}(1+s)} \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) L(s);$$

or, if $s = 1 + x$,

[1] Our argument is modelled on one applied to the Zeta-function by JENSEN, *Comptes Rendus*, 25 april 1887.

(2.323)
$$\Pi\left\{1+\frac{x(x+1)}{\frac{1}{4}+\gamma^2}\right\}=2^{2+x}\pi^{-1-\frac{1}{2}x}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}x\right)L(1+x).$$

Finally, expanding each side of (2.323) in ascending powers of x, and equating the coefficients of x, we have

(2.324)
$$\sum\frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^2}=\log 2-\frac{1}{2}\log\pi-\frac{1}{2}A+\frac{4}{\pi}L'(1),$$

where A is Euler's constant. From this it follows easily that, if γ_1 is the least of the positive γ's, then

(2.325)
$$\frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma_1^2}<\sum\frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^2}<\cdot 1,$$

$$\gamma_1>3.$$[1]

2.33. Now, as in 2.23, we have

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|=\sqrt{\frac{\pi}{\cosh\gamma\pi}},$$

and the ratio

$$\sqrt{\frac{\pi}{\cosh\gamma\pi}}:\frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^2}$$

decreases steadily as γ increases, for $\gamma>3$. Moreover, the value of the ratio for $\gamma=3$ is less than

$$25e^{-\frac{3}{2}\pi}<\frac{1}{4}.$$

[1] It is in fact true that $\gamma_1>6$: see Grossmann, *Dissertation*, Göttingen, 1913.

Hence

$$\sum_{\gamma>0}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|<\frac{1}{4}\sum_{\gamma>0}\frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^2}<\frac{1}{40},$$

and so

(2.331) $$|\Sigma\Gamma(\varrho)y^{-\varrho}|<\frac{1}{20}\sqrt{\frac{1}{y}}.$$

If now we write

$$f(y)=f_1(y)+f_2(y)+f_3(y),$$

where $f_1(y)$ contains the terms of $f(y)$ for which $m=1$, $f_2(y)$ those for which $m=2$, and $f_3(y)$ the remainder, we have

(2.332) $$f_2(y)=\sum_p \log p\ e^{-p^2 y}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}},$$

(2.333) $$f_3(y)=\sum_{p,\,m\geq 3}(-1)^{\frac{m(p-1)}{2}}\log p\ e^{-p^m y}=O\sqrt[3]{\frac{1}{y}}.$$

Hence, by (2.331), (2.232), and (2.333), we have

$$f_1(y)=\sum_p(-1)^{\frac{p-1}{2}}\log p\ e^{-py}$$

$$<-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{y}}+\frac{1}{20}\sqrt{\frac{1}{y}}+O\sqrt[3]{\frac{1}{y}}$$

$$<-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{y}},$$

for all sufficiently small values of y. We have thus proved

Theorem 2.33. *There is a constant K such that*

$$f_1(y)=\sum(-1)^{\frac{p-1}{2}}\log p\,e^{-py}<-K\sqrt{\frac{1}{y}}$$

for all sufficiently small positive values of y.

Suppose now that

(2. 334)
$$\varphi(y) = \sum a_n e^{-ny}$$

is a power-series in e^{-y}, convergent for $y > 0$, and that

$$\varphi(y) > K y^{-\alpha}$$

for $0 < y < y_0$. Suppose also that $0 < s < \alpha$. Then

$$\sum n^{-s} a_n e^{-ny} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \varphi(t+y) t^{s-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\frac{1}{2}y_0} \varphi(t+y) t^{s-1} dt + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\frac{1}{2}y_0}^\infty \varphi(t+y) t^{s-1} dt = J_1 + J_2,$$

say. The second integral tends to a finite limit as $y \to 0$. If $0 < y \leq \frac{1}{2} y_0$, the first integral is greater than

$$\frac{K}{\Gamma(s)} \int_0^{\frac{1}{2}y_0} \frac{t^{s-1} dt}{(t+y)^\alpha} = \frac{K y^{s-\alpha}}{\Gamma(s)} \int_0^{\frac{1}{2}y_0/y} \frac{u^{s-1} du}{(u+1)^\alpha} \sim \frac{K \Gamma(\alpha - s)}{\Gamma(\alpha)} y^{s-\alpha}.$$

Hence there is a constant H such that

$$\sum n^{-s} a_n e^{-ny} > H y^{s-\alpha}$$

for all sufficiently small values of y. In particular we have

Theorem 2.331. *If $0 < s < \frac{1}{2}$, there is a constant H such that*

$$\sum (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\log p}{p^s} e^{-py} < -H y^{s-\frac{1}{2}}$$

for all sufficiently small values of y.

2.34. In order to prove the actual assertion made by TSCHEBYSCHEF we have to introduce a convergence factor $\frac{1}{\log n}$ into the series (2.334).

It is not difficult to prove that

$$\frac{1}{\log n} = \int_0^\infty e^{-nt}\psi(t)\,dt,$$

where

$$\psi(t) = e^t + \int_0^\infty \frac{e^{-wt}dw}{\pi^2 + (\log w)^2};^{1}$$

so that

$$\sum_2^\infty \frac{a_n e^{-ny}}{\log n} = \int_0^\infty \psi(t)\varphi(t+y)\,dt^{2}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}y_0} \psi(t)\varphi(t+y)\,dt + \int_{\frac{1}{2}y_0}^\infty \psi(t)\varphi(t+y)\,dt = J_1 + J_2,$$

say. As before, J_2 tends to a finite limit as $y \to 0$. It is moreover easy to see that

$$\psi(t) \sim \int_0^\infty \frac{e^{-wt}dw}{\pi^2 + (\log w)^2} \sim \int_0^{1/t} \frac{dw}{(\log w)^2} \sim \frac{1}{t\left(\log \frac{1}{t}\right)^2}$$

as $t \to 0$. We can therefore choose η so that, if $0 < y \leq \eta$,

[1] Cf. W. H. YOUNG, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 12, pp. 41—70.

[2] We suppose that $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, as evidently we may do without loss of generality.

$$J_1 > K \int_0^{\eta} \frac{1}{t\left(\log \frac{1}{t}\right)^2} \frac{dt}{(t+y)^a}$$

$$= O(1) + aK \int_0^{\eta} \frac{1}{\log \frac{1}{t}} \frac{dt}{(t+y)^{a+1}}$$

$$= O(1) + aKy^{-a} \int_0^{\eta/y} \frac{1}{\log \frac{1}{u} + \log \frac{1}{y}} \frac{du}{(u+1)^{a+1}}$$

$$> \frac{1}{2} aK \frac{y^{-a}}{\log \frac{1}{y}} \int_1^2 \frac{du}{(u+1)^{a+1}}$$

$$> \frac{Hy^{-a}}{\log \frac{1}{y}}.$$

Applying this result to Theorem **2.33**, we obtain

Theorem 2.34. *There is a constant H such that*

$$F(y) = \sum (-1)^{\frac{p-1}{2}} e^{-py} < -\frac{H}{\sqrt{y}\log(1/y)}$$

for all sufficiently small positive values of y.

We have thus established the truth of TSCHEBYSCHEF's assertion, under the assumption of the truth of the analogue of the RIEMANN hypothesis. The nature of the proof makes it seem almost certain that the assertion must be false if the hypothesis is false, as the term $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}$ of (2.332) must then be overwhelmed by oscillatory terms of higher order. But, as we explained in 1.2, we have been unable to find a rigorous proof.

2.35. We have proved that

$$\sum (-1)^{\frac{p-1}{2}} \log p \; e^{-py} \to -\infty$$

as $y \to 0$; and, when we remember the results of 2.25, we are naturally led to

enquire whether a similar result holds for the Cesàro means formed from the series

$$\sum(-1)^{\frac{p-1}{2}} \log p.$$

If we denote Riesz's mean of order δ, formed from the series

$$\sum_{p,m}(-1)^{\frac{m(p-1)}{2}} \log p,$$

by $s^{\delta}(\omega)$, we have

$$(2.351) \qquad s^{\delta}(\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{\Gamma(\delta+1)\Gamma(s)}{\Gamma(\delta+1+s)}\frac{L'(s)}{L(s)}\omega^{s}\,ds$$

$$= -\sum \frac{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\delta+1+\varrho)}\omega^{\varrho} + P\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

where $P\left(\frac{1}{\omega}\right)$ is in general[1] a power-series convergent for $\omega > 1$.

From (2.351) it follows at once that

$$(2.352) \qquad s^{\delta}(\omega) = O(\sqrt{\omega}),$$

a result which says the more the smaller is δ.

Let us consider in particular the case in which $\delta = 1$. We have then

$$(2.353) \qquad s^{1}(\omega) = -\sum\frac{\omega^{\varrho}}{\varrho(\varrho+1)} + P\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

But

$$\left|\sum\frac{\omega^{i\gamma}}{\varrho(\varrho+1)}\right| \leq \sum\frac{1}{|\varrho(\varrho+1)|} < \sum\frac{1}{|\varrho|^{2}} = \sum\frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^{2}} < \frac{1}{5},$$

[1] See the footnote to p. 140.

by (2.325). Hence

$$|s^1(\omega)| < \frac{1}{4}\sqrt{\omega} \tag{2.354}$$

for all sufficiently large values of ω.

Let us now write

$$s^1(\omega) = s_1^1(\omega) + s_2^1(\omega) + s_3^1(\omega), \tag{2.355}$$

where $s_1^1(\omega)$, $s_3^1(\omega)$, and $s_3^1(\omega)$ are formed respectively from the terms of the series for which $m = 1$, $m = 2$, and $m \geq 3$. Then

$$s_2^1(\omega) = \sum_{p^2 < \omega} \log p \left(1 - \frac{p^2}{\omega}\right) > \frac{1}{2} \sum_{p^2 < \frac{1}{2}\omega} \log p > \frac{1}{3}\sqrt{\omega}, \tag{2.3561}$$

if ω is large enough. Also

$$s_3^1(\omega) = \sum_{m \geq 3,\, p^m < \omega} (-1)^{\frac{m(p-1)}{2}} \log p \left(1 - \frac{p^m}{\omega}\right) = O\Big(\sum_{m \geq 3,\, p^m < \omega} \log p\Big) = O\big(\sqrt[3]{\omega}\big). \tag{2.3562}$$

From (2.354), (2.355), (2.3561), and (2.3562) it follows that

$$s_1^1(\omega) = \sum_{p < \omega} (-1)^{\frac{p-1}{2}} \log p \left(1 - \frac{p}{\omega}\right) < -\frac{1}{12}\sqrt{\omega} \tag{2.3563}$$

for all sufficiently large values of ω.

We have thus proved

Theorem 2.35. Riesz's *or* Cesàro's *mean of the first order, formed from the series*

$$\sum (-1)^{\frac{p-1}{2}} \log p,$$

tends to $-\infty$ *as* $\omega \to \infty$, *at least as rapidly as a constant multiple of* $-\sqrt{\omega}$.

From this we can deduce without difficulty

Theorem 2.351. *The corresponding means, formed from the series*

$$\sum(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

tend to $-\infty$ *at least as rapidly as a constant multiple of* $-\frac{\sqrt{\omega}}{\log \omega}$.

Theorem 2.33 is a corollary of theorem 2.35, and Theorem 2.34 of Theorem 2.351: the deduction being in either case of the ordinary 'Abelian' type.

In concluding this sub-section we may repeat that, as has already been pointed out in 1.5, the theorems here proved gain greatly in interest when considered in conjunction with those which may be established by the methods of Section 5.

2.4.

The mean value of $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2$

2.41. Landau and Schnee[1] have shown that

(2.411) $$\int_{-T}^{T} |\zeta(\beta+it)|^2 dt \sim 2\zeta(2\beta)T$$

when $\beta > \frac{1}{2}$, and it is an easy deduction[2] that

(2.4111) $$\int_{-T}^{T} |\zeta(\beta+it)|^2 dt \sim (2\pi)^{2\beta-1}\zeta(2-2\beta)\frac{T^{2-2\beta}}{2-2\beta}$$

when $\beta < \frac{1}{2}$. We propose now to complete these results by proving

Theorem 2.41. *We have*

$$\int_{-T}^{T} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \sim 2T\log T.$$

[1] See Landau, *Handbuch*, p. 816.

[2] Using the functional equation.

We shall require some preliminary lemmas. We write

$$K_0(y) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-yu}\,du}{\sqrt{u^2 - 1}} \quad (\Re(y) > 0).$$

Lemma 2. 411. If $\varkappa$ and the real part of y are positive, then

$$H(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \{\Gamma(s)\, y^{-s}\}^2\, ds = 2K_0(2y),$$

y^{-s} having its principal value.

It is unnecessary to give the details of the proof of this formula which depends (like that of the 'CAHEN-MELLIN' formula) merely on a straightforward application of CAUCHY's Theorem.

Lemma 2. 412. If $y = re^{i\vartheta}$, where $|\vartheta| \leq \frac{3}{2}\pi - \delta < \frac{3}{2}\pi$, and $r \to \infty$, then

$$H(y) = e^{-2y}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right\},$$

uniformly in ϑ.

This is a known result.[1]

Lemma 2. 413. If $f(x)$ is positive and continuous, and

$$f(x) = O(e^{\delta x})$$

for all positive values of δ; and if

$$\int_0^{\infty} f(x)\, e^{-\varepsilon x}\, dx \sim A\, \varepsilon^{-\alpha} L\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

where $\alpha > 0$ and $L(x)$ is a finite product of logarithmic factors

$$(\log x)^{\alpha_1} (\log\log x)^{\alpha_2} \ldots\ldots,$$

as $\varepsilon \to 0$; then

$$\int_0^{T} f(t)\, dt \sim \frac{A\, T^{\alpha} L(T)}{\Gamma(1 + \alpha)}.$$

This is the analogue for integrals of a theorem first proved by us in the *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 13, pp. 180 *et seq.* This latter theorem redu-

[1] WHITTAKER and WATSON, *Modern Analysis*, ed. 2, pp. 367, 377

ces, when $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = 0$, to a special case of Lemma *2. 113*. The proofs for series and for integrals are in all important respects the same.

2. 42. If in Lemma *2. 411* we suppose $\varkappa > \frac{1}{2}$, write ny for y, multiply by $d(n)$, the number of divisors of n, and sum, we obtain

$$(2.\ 421) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \{\Gamma(s)\zeta(2s)\,y^{-s}\}^2\,ds = \sum_1^\infty d(n)H(ny).$$

We now use Cauchy's Theorem to replace the integral by one taken along the line $\sigma = \frac{1}{4}$. There is a pole at $s = \frac{1}{2}$ of order 2, and the residue is

$$\frac{\pi}{2y}(A - \log y - 2\log 2),$$

where A is Euler's constant. Thus

$$(2.\ 422) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{4} - i\infty}^{\frac{1}{4} + i\infty} \{\Gamma(s)\zeta(2s)y^{-s}\}^2\,ds = \sum_1^\infty d(n)\,H(ny) - \frac{\pi}{2y}(A - \log y - 2\log 2) = S + S',$$

say. In this formula we write

$$\Gamma(s)\zeta(2s) = \frac{2}{2s(2s-1)}\pi^s\,\xi(2s),$$

$$\xi(2s) = \xi\left(\frac{1}{2} + 2it\right) = \Xi(2t),$$

and we obtain

$$\frac{2}{\pi y}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\Xi(2t)}{\frac{1}{4} + 4t^2}\right\}^2\left(\frac{\pi}{y}\right)^{2ti} dt = S + S'.$$

Finally we write[1]

$$y = \pi e^{i\alpha},$$

where $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$, and we have

[1] These transformations are the same as those used by Hardy, *Comptes Rendus*, 6 April 1914.

(2. 423)
$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\Xi(2t)}{\frac{1}{4}+4t^2}\right\}^2 e^{2\alpha t}\,dt = e^{\frac{1}{2}i\alpha}(S+S'),$$

where

(2. 4241)
$$S = \sum_{1}^{\infty}{}' d(n)H(n\pi e^{i\alpha}),$$

(2. 4242)
$$S' = -\frac{1}{2}e^{-i\alpha}(A-2\log 2-\log\pi-i\alpha).$$

2. 43. We now suppose that $\alpha = \frac{1}{2}\pi-\varepsilon$ and that $\varepsilon\to 0$. In the first place it is obvious that

(2. 431)
$$S' = O(1).$$

Further, by Lemma *2. 412*, we hawe

$$H(n\pi e^{i\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{n}}e^{-\frac{1}{2}i\alpha-2n\pi(\cos\alpha+i\sin\alpha)}+O\left(\frac{e^{-2n\pi\cos\alpha}}{n^{3/2}}\right),$$

and it is plain that the contribution of the last term to S is of the form $O(1)$.

Hence we may write

(2. 432)
$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\Xi(2t)}{\frac{1}{4}+4t^2}\right\}^2 e^{2\alpha t}\,dt = \sum_{1}^{\infty}\frac{d(n)}{\sqrt{n}}e^{-2n\pi(\cos\alpha+i\sin\alpha)}+O(1).$$

But

$$\cos\alpha+i\sin\alpha = i+\varepsilon+O(\varepsilon^2),$$

$$e^{-2n\pi(\cos\alpha+i\sin\alpha)} = e^{-2n\pi\varepsilon+O(n\varepsilon^2)}$$

$$= e^{-2n\pi\varepsilon}\left\{1+n\varepsilon^2e^{O(n\varepsilon^2)}\right\},$$

and

$$\varepsilon^2\sum\sqrt{n}\,d(n)e^{-2n\pi\varepsilon+O(n\varepsilon^2)} = O\left\{\varepsilon^2\sum\sqrt{n}\,d(n)e^{-n\pi\varepsilon}\right\} = o(1).$$

We may therefore replace the series on the right hand side of (2. 432) by

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{d(n)}{\sqrt{n}}e^{-2n\pi\varepsilon}.$$

But

$$\sum_1^{\nu} d(n) \sim \nu \log \nu,$$

$$\sum_1^{\nu} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{\nu} \log \nu;$$

and so

$$\sum_1^{\infty} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} e^{-2n\pi\varepsilon} \sim \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Henc we have

$$(2.\ 433) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{\Xi(2t)}{\frac{1}{4}+4t^2}\right\}^2 e^{(\pi-2\varepsilon)t} dt \sim \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

We may replace the lower limit by 0, since the part of the integral for which $t < 0$ is plainly of no importance. Doing this, and putting $2t = u$, we obtain

$$(2.\ 434) \qquad \int_0^{\infty} \left\{\frac{\Xi(u)}{\frac{1}{4}+u^2}\right\}^2 e^{\left(\frac{1}{2}\pi-\varepsilon\right)u} du \sim \pi \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

2. 44. It follows from (2. 434) and Lemma *2. 413*, that

$$(2.\ 441) \qquad \int_0^{T} \left\{\frac{\Xi(u)}{\frac{1}{4}+u^2}\right\}^2 e^{\frac{1}{2}\pi u} du \sim \sqrt{2\pi T} \log T.$$

But

$$\left\{\frac{\Xi(u)}{\frac{1}{4}+u^2}\right\}^2 \sim \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\, e^{-\frac{1}{2}\pi u} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+iu\right)\right|^2,$$

so that

$$\int_0^{T} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+iu\right)\right|^2 \frac{du}{\sqrt{u}} \sim 2\sqrt{T} \log T.$$

And if we write

$$\Phi(u) = \int_0^u \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

we have

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+iu\right)\right|^2 du = \int_0^T \sqrt{u}\,\Phi'(u)\,du$$

$$= \sqrt{T}\,\Phi(T) - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\Phi(u)}{\sqrt{u}}\,du$$

$$\sim 2T\log T - \int_0^T \log u\,du$$

$$\sim T\log T,$$

which is equivalent to the result of Theorem **2.41.**

2. 5.

The series

$$\sum \frac{\mu(n)}{n} e^{-(a/n)^2}$$

and other similar series.

2. 51. In this sub-section we shall be concerned with some formulae which were suggested to us by some work of Mr S. Ramanujan. We have no satisfactory proof of the truth of the formulae, though this is highly probable; but they are so curious that it seems worth while to mention them.

If $-1 < \varkappa < 0$ and $a > 0$, then

(2. 511) $$1 - e^{-(a/n)^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \left(\frac{n}{a}\right)^{2s} \Gamma(s)\,ds.$$

Hence

$$(2.512)\quad \sum \frac{\mu(n)}{n} e^{-(\alpha/n)^2} = -\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n}\{1 - e^{-(\alpha/n)^2}\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \alpha^{-2s} \frac{\Gamma(s)}{\zeta(1-2s)}\, ds.$$

But

$$\frac{\Gamma(s)}{\zeta(1-2s)} = \pi^{2s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)}{\zeta(2s)};$$

and so

$$(2.513)\quad \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n} e^{-(\alpha/n)^2} = \frac{1}{2i\pi\sqrt{\pi}}\int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)}{\zeta(2s)}\, ds.$$

If now we assume that we may transform the last integral by moving the path of integration parallel to itself across the line $\sigma = \frac{1}{4}$, and introducing the obvious correction due to the poles of the subject of integration,[1] we obtain

$$(2.514)\quad \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n} e^{-(\alpha/n)^2} = \frac{1}{2i\pi\sqrt{\pi}}\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)}{\zeta(2s)}\, ds - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\varrho} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\varrho}{2}\right)}{\zeta'(\varrho)},$$

where $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$. This assumption of course includes that of the convergence of the series last written.

But

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)}{\zeta(2s)}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_1^\infty \mu(n) \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \left(\frac{\beta}{n}\right)^{-2s} \Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right) ds,$$

if $\alpha\beta = \pi$. Also, transforming the last integral by the substitution

$$\frac{1}{2} - s = S,$$

---

[1] In forming the series of residues we have assumed, for simplicity, that the poles are all simple.

we obtain

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{2s}\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)ds = \frac{\beta}{2\pi i n}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{-2S}\Gamma(S)\,dS,$$

where $-1<\varkappa<0$; and the last expression is equal to

$$\frac{\beta}{n}e^{-(\beta/n)^2}.$$

Hence

$$(2.\ 515)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{2s}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\zeta(2s)}ds = \beta\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2}.$$

Substituting in (2. 514), and multiplying by $\sqrt{\alpha}$, we obtain

$$(2.\ 516)\qquad \sqrt{\alpha}\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\alpha/n)^2}-\sqrt{\beta}\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\sum\frac{\Gamma\left(\frac{1-\varrho}{2}\right)}{\zeta'(\varrho)}\beta^{\varrho}.$$

It follows from symmetry that we must have

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sum\frac{\Gamma\left(\frac{1-\varrho}{2}\right)}{\zeta'(\varrho)}\alpha^{\varrho}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sum\frac{\Gamma\left(\frac{1-\varrho}{2}\right)}{\zeta'(\varrho)}\beta^{\varrho}=0,$$

and this relation may be verified without difficulty.

2. 52. In order to obtain a satisfactory proof of (2. 516), it would be enough to show that

$$\int_{\varkappa+iT}^{\lambda+iT}\beta^{2s}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\zeta(2s)}ds\to 0$$

when $T\to\infty$ through an appropriately chosen sequence of values. It would certainly be enough, for example, to show that there is such a sequence (T_ν) for which

$$(2.\ 521)\qquad |\zeta(s)|>e^{-\left(\frac{1}{4}\pi-\delta\right)t}$$

$$(\delta>0,\ t=T_\nu,\ \varkappa<\sigma\leq\lambda).$$

It would even be enough to show that the inequality (2. 521) holds on an appropriate sequence of curves each stretching from $\sigma = \varkappa$ to $\sigma = \lambda$. The existence of such a sequence seems highly probable: it is highly probable, in fact, that the series on the right hand side of (2. 516) is not merely convergent but very rapidly convergent. But we are quite unable to prove this, even when we assume the RIEMANN hypothesis.[1]

2. 53. Mr RAMANUJAN has indicated to us a generalisation of the formula (2. 516). Suppose that $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are a pair of 'reciprocal functions' connected by the relations

$$(2.531)\qquad \int_0^\infty \varphi(x)\cos 2ux\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\psi(u),\quad \int_0^\infty \psi(x)\cos 2ux\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\varphi(u),$$

and let us write

$$(2.532)\qquad \int_0^\infty x^{s-1}\varphi(x)\,dx = \Gamma(s)Z_1(s),\quad \int_0^\infty x^{s-1}\psi(x)\,dx = \Gamma(s)Z_2(s).$$

The simplest case is that in which

$$\varphi(x) = \psi(x) = e^{-x^2},\ Z_1(s) = Z_2(s) = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma(s)}:$$

in this case the formulae reduce to those of 2. 51. Then it can be shown that, if φ and ψ satisfy certain conditions,[2]

$$(2.533)\qquad Z(1-s) = \pi^{-\frac{1}{2}}\,2^s\,\Gamma(s)\sin\frac{1}{2}s\pi\, Z_2(s).$$

We have also (again of course subject to certain restrictions on φ and ψ)

$$(2.534)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\Gamma(s)Z_1(s)x^{-s}\,ds,\quad \psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\Gamma(s)Z_2(s)x^{-s}\,ds,$$

for an appropriate value of $\varkappa$.[3]

---

[1] We can prove that *some* such sequence of curves as is referred to above exists, and that our series can be rendered convergent by *some* process of bracketing terms: but we can prove nothing about the distribution of the curves or the size of the brackets.

[2] As we do not profess to be able to give rigorous proofs of the main formulae of this sub-section, it seems hardly worth which to state such conditions in detail.

[3] MELLIN, *Acta mathematica*, vol. 25, 1902, pp. 139—164, 165—184 (p. 159): see also NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gamma-Funktion*, pp. 221 *et seq.*

We can use the first formula (2. 534) to express the series

$$\sum \frac{\mu(n)}{n}\varphi\left(\frac{\beta}{n}\right)$$

in the form of a definite integral. Carrying out a series of transformations analogous to those of 2. 51, with the aid of (2. 533) and the functional equations satisfied by the Gamma and Zeta-Functions, we are led finally to the formulae

(2. 535)
$$\sqrt{\alpha}\sum \frac{\mu(n)}{n}\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right) - \sqrt{\beta}\sum \frac{\mu(n)}{n}\varphi\left(\frac{\beta}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sum \frac{\Gamma(1-\varrho)Z_1(1-\varrho)\alpha^\varrho}{\zeta'(\varrho)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sum \frac{\Gamma(1-\varrho)Z_2(1-\varrho)\beta^\varrho}{\zeta'(\varrho)}$$

where $\alpha\beta = \pi$.

2. 54. Let us return for a moment to the formula (2. 516). We have

(2. 541)
$$F(\alpha) = \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n} e^{-(\alpha/n)^2} = \sum_{p=1}^\infty \frac{(-1)^p \alpha^{2p}}{p!}\sum_{\mu=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^{2p+1}} = \sum_{p=1}^\infty \frac{(-1)^p\alpha^{2p}}{p!\,\zeta(2p+1)},$$

an integral function of α. And

(2. 542)
$$\sqrt{\alpha}F(\alpha) - \sqrt{\beta}F(\beta) = -\frac{1}{2}\sum \frac{\Gamma\left(\frac{1-\varrho}{2}\right)}{\zeta'(\varrho)}\beta^{\varrho-\frac{1}{2}}$$

when $\alpha\beta = \pi$. If we assume the Riemann hypothesis, and the absolute convergence of

$$\sum \frac{\Gamma\left(\frac{1-\varrho}{2}\right)}{\zeta'(\varrho)}$$

then the right hand side of (2. 542) is of the form

$$O(1)$$

when $\alpha \to 0$ and $\beta \to \infty$. Writing y for β^2, and observing that $F(\alpha) \to 0$ as $\alpha \to 0$ we see that

(2. 543) $$P(y) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-y)^p}{p!\,\zeta(2p+1)} = O\left(y^{-\frac{1}{4}}\right)$$

when $y \to \infty$.

Now it has been proved by MARCEL RIESZ that[1]

(2. 544) $$\int_0^{\infty} y^{-s-1} P(y)\,dy = \frac{\Gamma(-s)}{\zeta(2s+1)}.$$

This formula certainly holds if $0 < s < 1$. If it could be proved to hold for $-\frac{1}{4} < s \leq 0$, the truth of the RIEMANN hypothesis would follow. The hypothesis is therefore certainly true if

(2. 545) $$P(y) = O\left(y^{-\frac{1}{4}+\delta}\right)$$

for all positive values of δ. The result of our previous analysis is therefore to suggest that the truth of (2. 545) is a necessary and sufficient condition for the truth of the RIEMANN hypothesis. It is not difficult to prove that the result thus suggested is in fact true. For LITTLEWOOD[2] has shown that, if the RIEMANN hypothesis is true, the series

$$\sum \frac{\mu(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

is convergent for all positive values of ε, so that

(2. 546) $$M(\nu, n) = \sum_{\nu}^{n} \frac{\mu(m)}{m} = o\left(\nu^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

uniformly in n. Hence

(2. 547) $$P(y) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta^{2p}}{p!\,\zeta(2p+1)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{-(\beta/n)^2} = \sum_{1}^{\nu-1} + \sum_{\nu}^{\infty} = P_1 + P_2,$$

[1] See RIESZ, *Acta mathematica*, vol. 40, 1916, pp. 185—190. The actual formula communicated to us by RIESZ (in 1912) was not this one, nor the formula for $\frac{1}{\zeta(s)}$ contained in his memoir, but the analogous formula for $\frac{1}{\zeta(s+1)}$. All of these formulae may be deduced from MELLIN's inversion formula already referred to in 2. 53. The idea of obtaining a necessary and sufficient condition of this character for the truth of the RIEMANN hypothesis is of course RIESZ's and not ours.

[2] *Comptes Rendus*, 29 Jan. 1912.

say, where $\nu = [\beta^{1-\varepsilon}]$. Now

(2. 5471) $$P_2 = \sum_{\nu}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{-(\beta/n)^2} = \sum_{\nu}^{\infty} M(\nu, n) \Delta e^{-(\beta/n)^2} = o\left(\nu^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) = o\left(\beta^{-\frac{1}{2}+2\delta}\right),$$

where $2\delta = \frac{3}{2}\varepsilon - \varepsilon^2$; and

(2. 5472) $$P_1 = O(\nu e^{-\beta^{2\varepsilon}}) = o\left(\beta^{-\frac{1}{2}+2\delta}\right).$$

From (2. 547), (2. 5471) and (2. 5472) it follows that

(2. 548) $$P(y) = o\left(\beta^{-\frac{1}{2}+2\delta}\right) = o\left(y^{-\frac{1}{4}+\delta}\right).$$

3.

The series $\sum \gamma^{-\omega} e^{a i \gamma \log(\gamma\theta)}$

3. 1. The results of this section will be stated on the assumption that the Riemann hypothesis is true. The truth of the hypothesis is not essential to our argument, and our results remain significant without it. But their interest depends to a considerable extent on the truth of the hypothesis, and the assumption that it is true enables us to state them in a simpler form than would be otherwise attainable.

We shall then denote the complex zeros of $\zeta(s)$ by $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma$, where γ is real. It has been proved by Landau[1] that

(3. 111) $$\sum_{0<\gamma<T} x^{\varrho} = O(\log T)$$

if x is real and not of the form p^m, and

(3. 112) $$\sum_{0<\gamma<T} x^{\varrho} = -\frac{T}{2\pi} \log p + O(\log T)$$

if $x = p^m$. If we assume the truth of the Riemann hypothesis, these results may be stated in the form

[1] *Math. Annalen*, vol. 71, 1912, pp. 548—564.

$$\sum_{0<\lambda<T} e^{i\gamma \log x} = O(\log T), \tag{3.121}$$

$$\sum_{0<\gamma<T} e^{i\gamma \log x} = -\frac{T}{2\pi} \log p + O(\log T). \tag{3.122}$$

In this section we shall apply an argument similar in principle to LANDAU's, but of a rather more intricate character, to the series

$$\sum \gamma^{-\omega} e^{ai\gamma \log(\gamma\theta)}$$

where a, θ, and ω are real and the first two positive. The principal result is

Theorem 3. 1. *If a, θ, and ω are real, and a and θ positive, then*

$$\sum_{0<\gamma<T} \gamma^{-\omega} e^{ai\gamma \log(\gamma\theta)} = O\left(T^{\frac{1+a}{2}-\omega}\right)$$

if $\omega < \frac{1+a}{2}$, and

$$\sum_{0<\gamma<T} \gamma^{-\omega} e^{ai\gamma \log(\gamma\theta)} = O(\log T)$$

if $\omega = \frac{1+a}{2}$. If $\omega < \frac{1+a}{2}$ then the series is convergent when continued to infinity. These results hold uniformly in any interval $0 < \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$.

The result is trivial when $a > 1$. We may therefore suppose that $a \leq 1$.

3. 2. Suppose that the theorem has been proved in the special case in which $\omega = 0$. Let

$$b_\gamma = e^{ai\gamma \log(\gamma\theta)}$$

and

$$\Phi(\tau) = \sum_{0<\gamma\leq\tau} b_\gamma,$$

so that

$$\Phi(\tau) = O\left(\tau^{\frac{1+a}{2}}\right).$$

Then

$$\sum_{0<\gamma\leq T} \gamma^{-\omega} b_\gamma = \sum_1^N \frac{\Phi(\gamma_n) - \Phi(\gamma_{n-1})}{\gamma_n^{\omega}}$$

where N is the largest number such that $\gamma_N < T$. Applying the method of partial summation, we obtain

$$\sum_{0<\gamma<T} \gamma^{-\omega} b_\gamma = \sum_{1}^{N-1} \Phi(\gamma_n)\left(\gamma_n^{-\omega} - \gamma_{n+1}^{-\omega}\right) + \Phi(\gamma_N)\gamma_N^{-\omega}$$

$$= \omega \sum_{1}^{N-1} \Phi(\gamma_n) \int_{\gamma_n}^{\gamma_{n+1}} u^{-\omega-1}\,du + \Phi(\gamma_N)\gamma_N^{-\omega}$$

$$= \omega \int_{\gamma_1}^{\gamma_N} \Phi(u) u^{-\omega-1}\,du + \Phi(\gamma_N)\gamma_N^{-\omega}$$

$$= O \int_{\gamma_1}^{T} u^{\frac{1+a}{2}-\omega-1}\,du + O\left(T^{\frac{1+a}{2}-\omega}\right)$$

and the general result of Theorem **3. 1** follows immediately. It is therefore sufficient to prove the theorem when $\omega = 0$.

It should be observed that the O's which occur in this argument are uniform in θ, when $0 < \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$; that is to say, the constants which they imply are independent of θ. This remark applies to the whole discussion which follows.

3. 31. We choose numbers a and δ such that

$$a > \frac{3}{8},\ \delta > 0,\ a\delta + a < \frac{1}{2}; \tag{3. 311}$$

and we denote by C the rectangle

$$(1 + \delta + i,\ 1 + \delta + Ti,\ -2p - 1 + Ti,\ -2p - 1 + i),$$

where p is a large positive integer, and T a large positive number differing from any γ. This being so, we consider the integral

$$\int_C e^{as\log(-is)} x^s s^{-\frac{1}{2}a} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds, \tag{3. 312}$$

where $x = \theta^a$ and $\log(-is)$, x^s and $s^{-\frac{1}{2}a}$ have their principal values. An application of Cauchy's Theorem gives the formula

(3. 313)
$$2\pi i \sum_{0<\gamma<T} e^{a\varrho \log(-i\varrho)} x^{\varrho} \varrho^{-\frac{1}{2}a} = \int_{1+\delta+i}^{1+\delta+Ti} + \int_{1+\delta+Ti}^{-2p-1+Ti} + \int_{-2p-1+Ti}^{-2p-1+i} + \int_{-2p-1+i}^{1+\delta+i}$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

say. When t is fixed and $\sigma \to -\infty$, $e^{as\log(-is)}$ tends to zero like $e^{a\sigma \log|\sigma|}$. It follows that $I_3 \to 0$ when $p \to \infty$, and that I_2 and I_4 tend to limits I_2 and I_4, the latter being independent of T. Thus

(3. 314)
$$2\pi i \sum_{0<\gamma<T} e^{a\varrho \log(-i\varrho)} x^{\varrho} \varrho^{-\frac{1}{2}a} = I_1 + I_2 + O(1) = I_1 + I_2 + O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right),$$

where

(3. 315)
$$I_2 = \int_{1+\delta+Ti}^{-\infty+Ti} e^{as\log(-is)} x^{-s} s^{-\frac{1}{2}a} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds.$$

3. 32. We shall now prove that the term I_2 in (3. 314) may be omitted. We write

(3. 321)
$$I_2 = \int_{-1+Ti}^{-\infty+Ti} + \int_{1+\delta+Ti}^{-1+Ti} = I_{2,1} + I_{2,2}.$$

The discussion of $I_{2,1}$ is simple. If $s = \sigma + Ti$ and $\sigma < -1$, we have

$$\left| e^{as\log(-is)} \right| = e^{\frac{1}{2}a\sigma \log(\sigma^2+T^2) + aT \arctan(\sigma/T)} < T^{a\sigma},$$

$$|x^s| = x^{\sigma}$$

$$\left| s^{-\frac{1}{2}a} \right| < 1,$$

and

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log T),$$

uniformly for $\sigma \leq -1$.[1] Hence

[1] Landau, *Handbuch*, p. 336.

(3.322)
$$\bar{I}_{2,1} = O\left\{\log T \int_{-1}^{-\infty} (xT^a)^\sigma d\sigma\right\}$$

$$O\left\{\frac{\log T}{xT^a \log(xT^a)}\right\}$$

$$= O(T^{-a})^1 = O\left(T^{-\frac{1+a}{2}}\right).$$

Thus the integral $I_{2,1}$ is without importance. The discussion of $\bar{I}_{2,2}$ is somewhat more difficult.

3.33. We may write

(3.331)
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\gamma - T| < 1} \frac{1}{s-\varrho} + \left\{\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{|\gamma - T| < 1} \frac{1}{s-\varrho}\right\} = Z_1(s) + Z_2(s),$$

say. Then

(3.332)
$$Z_2(s) = O(\log T)$$

uniformly for $-1 \leq \sigma < 1 + \delta$.[2]

We now write

(3.333)
$$\bar{I}_{2,2} = \int_{1+\delta+Ti}^{-1+Ti} e^{as\log(-is)} x^s s^{-\frac{1}{2}a} (Z_1(s) + Z_2(s))\, ds = \bar{I}_{2,2,1} + I_{2,2,2},$$

say. It follows from (3.332) that

(3.334)
$$I_{2,2,2} = O\left(T^{-\frac{1}{2}a} \log T \int_{-1}^{1+\delta} T^{a\sigma} d\sigma\right) = O(T^p \log T),$$

where

(3.335)
$$p = \left(\frac{1}{2} + \delta\right) a < \frac{1+a}{2}.$$

Thus the integral $I_{2,2,2}$ is of no importance.

[1] Observing that $\frac{1}{x} < \frac{1}{x_0}$, where $x_0 = \theta_0^a$, and that $\log(xT^a) > a\log T + \log x_0$.

[2] Landau, *Handbuch*, p. 339.

3. 34. On the other hand

$$(3.341)\qquad I_{2,2,1}=\sum_{|\gamma-T|<1}\int_{1+\delta+Ti}^{-1+Ti} e^{as\log(-is)}x^s s^{-\frac{1}{2}a}\frac{ds}{s-\varrho}.$$

We can transform each of these integrals, by CAUCHY's Theorem, into an integral along a semicircle described on the line $(-1+Ti,\ 1+\delta+Ti)$, taking the semicircle above or below the line according as $\gamma<T$ or $\gamma>T$.[1] Each integral is of the form $O(T^p)$ and their number is of the form $O(\log T)$. Hence

$$(3.342)\qquad I_{2,2,1}=O(T^p\log T)=O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right).$$

From (3. 321), (3. 322), (3. 333), (3. 334), (3. 335), and (3. 342) it follows that

$$(3.343)\qquad I_2=O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right);$$

and from (3. 314) and (3. 343) that

$$(3.344)\qquad 2\pi i\sum_{0<\gamma<T} e^{a\varrho\log(-i\varrho)}x^\varrho\varrho^{-\frac{1}{2}a}=I_1+O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right).$$

Thus the result of (3. 3) is to reduce the problem to the discussion of I_1.

3. 4. The main difficulty in the proof of the theorem lies in the discussion of the integral

$$(3.41)\qquad I_1=\int_{1+\delta+i}^{1+\delta+Ti} e^{as\log(-is)}x^s s^{-\frac{1}{2}a}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds.$$

We observe first that, when σ is fixed,

$$e^{as\log(-is)}=\left\{A+O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}e^{ait\log t}t^{a\sigma},$$

where A is a constant. The contribution to I_1 of the term $O\left(\frac{1}{t}\right)$ is of the form

$$(3.42)\qquad O\int_1^T t^{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)a-1}dt=O(T^p)=O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right),$$

[1] Cf. LANDAU, *Math. Annalen*, vol. 71, 1912, p. 557.

and is therefore without importance. For similar reasons we may replace $s^{-\frac{1}{2}a}$, in I_1, by $(it)^{-\frac{1}{2}a}$. The problem is then reduced to the study of the integral

(3. 43)
$$J = \int_1^T e^{ait\log t} x^{it} t^p \frac{\zeta'(1+\delta+it)}{\zeta(1+\delta+it)} dt.$$

Replacing ζ'/ζ by the DIRICHLET's series which represents it, and making an obvious formal transformation, we obtain

(3. 44)
$$J = -\sum \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\delta}} j(\xi),$$

where

(3. 45)
$$\xi = \sqrt[a]{\frac{n}{x}}$$

and

(3. 46)
$$j(\xi) = \int_1^T t^p e^{ait\log(t/\xi)} dt.$$

We write

(3. 47)
$$J = -\left(\sum_1 + \sum_2 + \sum_3\right) \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\delta}} j(\xi) = J_1 + J_2 + J_3,$$

say, where J_1 contains the terms (if any) for which

(3. 481)
$$n + 1 \leq xe^a,$$

J_2 those for which

(3. 482)
$$xe^a - 1 < n < x(eT)^a + 1,$$

and J_3 those for which

(3. 483)
$$n \geq x(eT)^a + 1.$$

3. 51. The discussion of J_1 and J_3 is simple, and depends on a lemma which will be useful to us later in the paper.

Lemma 3. 51. *There is a number K, independent of τ_1, τ_2, and ξ, such that*

$$\left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{ait\log(t/\xi)} dt \right| < \frac{K}{\log(e\tau_1/\xi)}$$

when $0 < \xi < e\tau_1 < e\tau_2$, *and*

$$\left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{ait\log(t/\xi)} dt \right| < \frac{K}{\log(\xi/e\tau_2)}$$

when $\xi > e\tau_2 > e\tau_1$.

Suppose, for example, that $\xi < e\tau_1$. It is plain that we may consider the real and imaginary parts of the integral separately. If we put

$$w = t\log(t/\xi),$$

so that

$$\frac{dw}{dt} = \log\left(\frac{et}{\xi}\right),$$

and observe that w increases steadily, say from w_1 to w_2, as t increases from τ_1 to τ_2, we obtain

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \cos aw\, dt = \int_{w_1}^{w_2} \cos aw \frac{dw}{\log(et/\xi)}.$$

But $\log(et/\xi)$ is positive, and increases as t increases. Hence

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \cos aw\, dt = \frac{1}{\log(e\tau_1/\xi)} \int_{w_1}^{w_3} \cos aw\, dw,$$

where $w_1 < w_3 < w_2$. The truth of the lemma follows immediately.

3.52. We are now in a position to discuss J_1 and J_3. We begin with J_1, which exists only if $xe^a \geq 2$.

The real part of $j(\xi)$ is

$$(3.521) \qquad \int_1^T t^p \cos\left(at\log\frac{t}{\xi}\right) dt = T^p \int_{T_1}^T \cos\left(at\log\frac{t}{\xi}\right) dt,$$

where $1 < T_1 < T$. Since

$$(3.522) \qquad \xi = \sqrt[a]{\frac{n}{x}} < e < eT_1,$$

the right hand side of (3. 521) is less in absolute value than a constant multiple of

$$\frac{T^p}{\log(eT_1/\xi)} < \frac{T^p}{\log(e/\xi)}.$$

The same argument may be applied to the imaginary part of $j(\xi)$, so that we may write

(3. 523) $$j(\xi) = O\left\{\frac{T^p}{\log(e/\xi)}\right\}.$$

Also

(3. 524) $$\left(\frac{e}{\xi}\right)^a = \frac{xe^a}{n} = \frac{\nu}{n},$$

(3. 525) $$\log\left(\frac{e}{\xi}\right) = \frac{1}{a}\log\left(\frac{\nu}{n}\right),$$

where $\nu \geq n + 1$. Hence

(3. 526) $$J_1 = O\left\{T^p \sum_{n \leq \nu - 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\delta}} \frac{1}{\log(\nu/n)}\right\} = O(T^p)^1 = O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right).$$

3. 53. The discussion of J_3 is similar. It will be sufficient to write down the formulae which correspond to the formulae (3. 522), etc. They are

(3. 532) $$\xi = \sqrt[a]{\frac{n}{x}} > eT,$$

(3. 533) $$j(\xi) = O\left\{\frac{T^p}{\log(\xi/eT)}\right\},$$

(3. 534) $$\left(\frac{\xi}{eT}\right)^a = \frac{n}{x(eT)^a} = \frac{n}{\nu},$$

(3. 535) $$\log\left(\frac{\xi}{eT}\right) = \frac{1}{a}\log\left(\frac{n}{\nu}\right)$$

(where $\nu < n - 1$),

(3. 536) $$J_3 = O\left\{T^p \sum_{n > \nu + 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\delta}} \frac{1}{\log(n/\nu)}\right\} = O(T^p)^1 = O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right).$$

[1] Landau, *Handbuch*, p. 806.

3.61. The discussion of J is accordingly reduced to that of J_2. In order to discuss J_2 we observe[1] that $\tau\log(\tau/\xi)$ is stationary when $\tau=\xi/e$. This point is the critical point in the integral $j(\xi)$. It falls in the range $(1, T)$ if

$$e<\xi\leq eT$$

or

$$xe^a\leq n\leq x(eT)^a.$$

This condition is certainly satisfied by every term of J_2 except possibly the first and last, and no serious modification is required, for these two possibly exceptional terms, in the analysis which follows.[2]

We write

(3.611) $$j(\xi)=\left(\int_1^{\xi/e}+\int_{\xi/e}^{T}\right)t^p e^{ait\log(t/\xi)}dt=j_1(\xi)+j_2(\xi).$$

Then

(3.6121) $$j_1(\xi)=\left(\frac{\xi}{e}\right)^{p+1}\int_{e/\xi}^{1}u^p e^{ai\xi w/e}du=\left(\frac{\xi}{e}\right)^{p+1}k_1(\xi),$$

(3.6122) $$j_2(\xi)=\left(\frac{\xi}{e}\right)^{p+1}\int_{1}^{eT/\xi}u^p e^{ai\xi w/e}du=\left(\frac{\xi}{e}\right)^{p+1}k_2(\xi),$$

where

(3.613) $$w=u\log u-u.$$

In general $e/\xi\leq 1\leq eT/\xi$, and we write further

(3.6141) $$k_1=\int_{1-\varepsilon}^{1}+\int_{e/\xi}^{1-\varepsilon}=k_{1,1}+k_{1,2},$$

(3.6142) $$k_2=\int_{1}^{1+\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{eT/\xi}=k_{2,1}+k_{2,2},$$

[1] The fundamental idea in the analysis which follows is the same as that of LANDAU's memoir 'Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen' (*Göttinger Nachrichten*, 1912, pp. 687—771).

[2] The terms have to be retained in J_2 because ξ/e, though outside the range of integration, may be very near to one of the limits.

where

$$\varepsilon = T^{-\alpha},$$

α being the number defined at the beginning of 3. 31. If, however, $e/\xi > 1$ or $eT/\xi < 1$, as may happen, each with one term only, we must write

$$(3.\,6151) \qquad k_1 = -\int_1^{1+\varepsilon} - \int_{1+\varepsilon}^{e/\xi} = k_{1,1} + k_{1,2},$$

or

$$(3.\,6152) \qquad k_2 = -\int_{1-\varepsilon}^{1} - \int_{eT/\xi}^{1-\varepsilon} = k_{2,1} + k_{2,2}.$$

These exceptional cases need not detain us further, as the treatment of k_2 in the general case covers *a fortiori* that of k_1 in the special case, and *vice versa*. Each of the formulae (3. 6141)—(3. 6152), however, may in certain cases require to be interpreted in the light of a further convention. It may happen, for example, that $1 - \varepsilon < e/\xi < 1$. In this case, in the formula (3. 6142), we must regard $k_{1,2}$ as non-existent, and the subject of integration in as having the value zero for $1 - \varepsilon < u < e/\xi$, and a similar understanding may be necessary in the other formulae. If regard is paid to these conventions, the analysis needed in every case is included in that which refers explicitly to the normal case in which

$$e/\xi < 1 - \varepsilon < 1 < 1 + \varepsilon < eT/\xi.$$

We may therefore conduct our argument as if these conditions were always satisfied. And we have

$$(3.\,616) \qquad j(\xi) = \left(\frac{\xi}{e}\right)^{p+1} \left(k_{1,1}(\xi) + k_{1,2}(\xi) + k_{2,1}(\xi) + k_{2,2}(\xi)\right).$$

3. 62. The really important terms on the right hand side of (3. 616) are $k_{1,1}$ and $k_{2,1}$. We shall discuss $k_{1,2}$ and $k_{2,2}$ first.

The real part of $k_{1,2}$ is

$$(3.\,621) \qquad \int_{e/\xi}^{1-\varepsilon} u^p \cos\left(\frac{a\xi w}{e}\right) du = \int_{u=e/\xi}^{1-\varepsilon} \frac{u^p}{\log u} \cos\left(\frac{a\xi w}{e}\right) dw = \frac{(1-\varepsilon)^p}{\log(1-\varepsilon)} \int_{u=\lambda}^{1-\varepsilon} \cos\left(\frac{a\xi w}{e}\right) dw$$

where $e/\xi < \lambda < 1 - \varepsilon$. A similar argument may be applied to the imaginary part. Also

$$\frac{1}{\log(1-\varepsilon)} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

and

$$\int_{\lambda'}^{\lambda} \cos\left(\frac{a\xi w}{e}\right) dw = O\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

for all values of λ and λ'. It follows that

(3. 622) $$k_{1,2} = O\left(\frac{1}{\varepsilon\xi}\right) = O\left(\frac{T^a}{\xi}\right).$$

Similarly, the real part of $k_{2,2}$ is

(3. 623) $$\int_{1+\varepsilon}^{eT/\xi} u^p \cos\left(\frac{a\xi w}{e}\right) du = \int_{u=1+\varepsilon}^{eT/\xi} \frac{u^p}{\log u} \cos\left(\frac{a\xi w}{e}\right) dw = \left(\frac{eT}{\xi}\right)^p \int_{u=\lambda}^{eT/\xi} \cos\left(\frac{a\xi w}{e}\right) \frac{dw}{\log u}$$

$$= \frac{(eT/\xi)^p}{\log\lambda} \int_{u=\lambda}^{\lambda'} \cos\left(\frac{a\xi w}{e}\right) dw,$$

where

$$1 + \varepsilon < \lambda < \lambda' < eT/\xi,$$

and a similar argument may be applied to the imaginary part. Hence

(3. 624) $$k_{2,2} = O\left(\frac{T^p}{\varepsilon\xi^{p+1}}\right) = O\left(\frac{T^{p+a}}{\xi^{p+1}}\right).$$

3. 63. We shall now consider $k_{1,1}$ and $k_{2,1}$. It is here that we are for the first time in touch with the real kernel of the problem. The two integrals are amenable to the same treatment, and we may confine our attention to one of them, say $k_{2,1}$.

We write

$$u = 1 + \mu,$$

so that $0 \leq \mu \leq \varepsilon$ and

$$u^p = 1 + O(\mu),$$

$$w = u \log u - u = -1 + \frac{1}{2}\mu^2 + O(\mu^3),$$

$$e^{ai\xi w/e} = e^{-(ai\xi/e) + (ai\xi\mu^2/2e) + O(\xi\mu^3)}$$

$$= e^{-(ai\xi/e) + (ai\xi\mu^2/2e)}(1 + O(\xi\mu^3)).$$

Then

$$(3.631)\qquad k_{2,1} = e^{-ai\xi/\epsilon}\int_0^{\epsilon}\left(1 + O(u) + O(\xi u^3)\right) e^{ai\xi u^2/2\epsilon}\, du$$

$$= O\left(\xi^{-\frac{1}{2}}\right) + O(\epsilon^2) + O(\xi\epsilon^4)$$

$$= O\left(\xi^{-\frac{1}{2}}\right) + O(T^{-2a}) + O(\xi T^{-4a}).$$

Combining (3.631) with (3.622) and (3.624), and substituting in (3.616), we obtain

$$(3.632)\qquad j(\xi) = O\left(\xi^{p+\frac{1}{2}}\right) + O(\xi^{p+1}T^{-2a}) + O(\xi^{p+2}T^{-4a}) + O(\xi^p T^a) + O(T^{p+a}).$$

3.64. We can now complete our discussion of J_2. We have

$$J_2 = -\sum_{xe^a - 1 < n < x(eT)^a + 1} \frac{\Delta(n)}{n^{1+\delta}}\, j(\xi),$$

$$|J_2| \leq \sum_{n < O(T^a)} \frac{\Delta(n)}{n^{1+\delta}}\, |j(\xi)|,$$

the symbolism used last implying that the summation is extended to all positive integers n less than some fixed multiple of T^a. We have now to estimate the five sums S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, obtained by substituting in turn for $|j(\xi)|$ the five terms on the right hand side of (3.632).

In the first place

$$(3.641)\qquad S_1 = \sum_{n < O(T^a)} \frac{\Delta(n)}{n^{1+\delta}}\, O\left(\xi^{p+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= O\sum_{n < O(T^a)} \Delta(n)\, n^{\frac{2p+1}{2a} - 1 - \delta}$$

$$= O\sum_{n < O(T^a)} \Delta(n)\, n^{\frac{1+a}{2a} - 1}$$

$$= O\left\{(T^a)^{\frac{1+a}{2a}}\right\}$$

$$= O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right).$$

In the second place

(3. 642)
$$S_2 = \sum_{n<O(T^a)} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\delta}} O(\xi^{p+1} T^{-2a})$$

$$= O\left\{T^{-2a} \sum_{n<O(T^a)} \Lambda(n) n^{\frac{p+1}{a}-1-\delta}\right\}$$

$$= O\left\{T^{-2a} \sum_{n<O(T^a)} \Lambda(n) n^{\frac{2+a}{2a}-1}\right\}$$

$$= O\left\{T^{-2a} (T^a)^{\frac{2+a}{2a}}\right\}$$

$$O\left\{T^{\frac{2+a}{2}-2a}\right\}$$

$$= o\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right),$$

since $2\alpha > \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.

Thirdly

(3. 643)
$$S_3 = \sum_{n<O(T^a)} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\delta}} O(\xi^{p+2} T^{-4a})$$

$$= O\left\{T^{-4a} \sum_{n<O(T^a)} \Lambda(n) n^{\frac{p+2}{a}-1-\delta}\right\}$$

$$= O\left\{T^{-4a} \sum_{n<O(T^a)} \Lambda(n) n^{\frac{4+a}{2a}-2}\right\}$$

$$= O\left\{T^{-4a} (T^a)^{\frac{4+a}{2a}}\right\}$$

$$= O\left(T^{\frac{4+a}{2}-4a}\right)$$

$$= o\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right)$$

since $4\alpha > \frac{3}{2}$.

Fourthly,

(3.644)
$$S_4 = \sum_{n < O(T^a)} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\delta}} O(\xi^p T^a)$$

$$= O\left\{T^a \sum_{n < O(T^a)} \Lambda(n) n^{\frac{p}{a} - 1 - \delta}\right\}$$

$$= O\left\{T^a \sum_{n < O(T^a)} \Lambda(n) n^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= O\left(T^{\frac{1}{2}a + a}\right)$$

$$= O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right),$$

since $a < \frac{1}{2}$.

Finally

(3.645)
$$S_5 = \sum_{n < O(T^a)} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\delta}} O(T^{p+a})$$

$$= O(T^{p+a})$$

$$= O\left(T^{\frac{1}{2}a + a\delta + a}\right)$$

$$= O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right),$$

since $a\delta + a < \frac{1}{2}$. Combining (3.641)—(3.645), we see that

(3.646)
$$J_2 = O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right).$$

3.7. We have thus proved that

(3.71)
$$\sum_{0 < \gamma < T} e^{a\varrho \log(-i\varrho)} x^\varrho \varrho^{-\frac{1}{2}a} = O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right),$$

uniformly in any positive interval of values of x. We now assume the truth of the Riemann hypothesis, and write $\frac{1}{2} + i\gamma$ for ϱ and θ^a for x. We have

$$e^{a\varrho \log(-i\varrho)} x^\varrho \varrho^{-\frac{1}{2}a} = e^{a\varrho \log(-i\varrho) + a\varrho \log \theta - \frac{1}{2} a \log \varrho},$$

and

$$a\varrho \log(-i\varrho) = ai\gamma \log \gamma + \frac{1}{2} a \log \gamma + \frac{1}{2} a + O\left(\frac{1}{\gamma}\right),$$

$$a\varrho \log \theta = ai\gamma \log \theta + \frac{1}{2} a \log \theta,$$

$$-\frac{1}{2} a \log \varrho = -\frac{1}{2} a \log \gamma - \frac{1}{4} a\pi i + O\left(\frac{1}{\gamma}\right),$$

and so

$$e^{a\varrho \log(-i\varrho)} x^{\varrho} \varrho^{-\frac{1}{2}a} = A e^{ai\gamma \log(\gamma\theta)} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right\},$$

where A is a constant. It follows from (3. 71) that

(3. 72)
$$\sum_{0<\gamma<T} e^{ai\gamma \log(\gamma\theta)} = O\left(T^{\frac{1+a}{2}}\right);$$

and the proof of Theorem **3. 1** is completed.

4.

The zeros of $\zeta(s)$ on the line $\sigma = \frac{1}{2}$.

4. 1. In this section we prove that the number $N_0(T)$ of zeros of $\zeta(s)$ on the line $\sigma = \frac{1}{2}$, between the points $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{2} + Ti$, is of the form $\Omega\left(T^{\frac{3}{4}-\varepsilon}\right)$ for all positive values of ε. As a matter of fact we prove rather more than this, viz. that there is at least one zero of odd order between T and $T + T^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ for all sufficiently large values of T.[1]

4. 2. We write

(4. 21)
$$\pi^{-s} e^{-\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4}\right)\pi i} \Gamma(s) \zeta(2s) = f(s) = f\left(\frac{1}{4} + ti\right) = X(t).$$

[1] See section 1 for a summary of previous results.

Then

$$X(t) = \frac{2e^{\frac{1}{2}\pi t}\,\Xi(2t)}{\frac{1}{4}+4t^2}$$

is real when t is real. Let ε be any positive number. We shall prove that, if $T > T_0(\varepsilon)$, then $X(t)$ changes its sign at least once in the interval $(T, T+H)$, where $H = T^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$. We may obviously suppose, without loss of generality, that $\varepsilon < \frac{1}{5}$.

There are two stages in the proof. The first consists in showing that

$$\int_T^{T+H} X(t)\,dt = O(T^{\delta}) \tag{4. 22}$$

for all positive values of δ; and the second in showing that, if $\delta < \varepsilon$, and T is large enough, then the equation (4. 22) contradicts the assumption that $X(t)$ is of constant sign throughout the range of integration. The second stage of the proof is the easier, and we shall discuss it first.[1]

Suppose then that (4. 22) is true, with $\delta < \varepsilon$, and that $X(t)$ is of constant sign throughout $(T, T+H)$. Then

$$\int_T^{T+H} |X(t)|\,dt = O(T^{\delta}),$$

$$\int_T^{T+H} e^{\frac{1}{2}\pi t}\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+ti\right)\right|\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+2ti\right)\right| dt = O(T^{\delta}).$$

Now

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+ti\right)\right| \sim \sqrt{2\pi}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi t}}{t^{\frac{1}{4}}}$$

as $t \to \infty$. Hence

[1] The general idea used in this part of the proof is identical with that introduced by Landau in his simplification of Hardy's proof of the existence of an infinity of roots (see Landau, *Math. Annalen*, vol. 76, 1915, pp. 212—243).

$$\int_T^{T+H} \frac{\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+2ti\right)\right|}{t^{\frac{1}{4}}}\,dt = O(T^{\delta}),$$

$$\int_T^{T+H} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+2ti\right)\right| dt = O\left(T^{\frac{1}{4}+\delta}\right),$$

$$\int_{\frac{1}{2}+2Ti}^{\frac{1}{2}+2(T+H)i} |\zeta(s)|\,ds = O\left(T^{\frac{1}{4}+\delta}\right),$$

(4. 23)
$$\int_{\frac{1}{2}+2Ti}^{\frac{1}{2}+2(T+H)i} \zeta(s)\,ds = O\left(T^{\frac{1}{4}+\delta}\right).$$

Applying CAUCHY's Theorem to the rectangle whose vertices are $\frac{1}{2}+2Ti$, $2+2Ti$, $2+2(T+H)i$, and $\frac{1}{2}+2(T+H)i$, we obtain

(4. 24)
$$J_1+J_2+J_3 = \int_{\frac{1}{2}+2Ti}^{2+2Ti} \zeta(s)\,ds + \int_{2+2Ti}^{2+2(T+H)i} \zeta(s)\,ds + \int_{2+2(T+H)i}^{\frac{1}{2}+2(T+H)i} \zeta(s)\,ds = O\left(T^{\frac{1}{4}+\delta}\right).$$

Now

$$\zeta(s) = O\left(t^{\frac{1}{4}+\delta}\right)$$

uniformly for $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$.[1] Hence

(4. 25)
$$J_1 = O\left(T^{\frac{1}{4}+\delta}\right), \quad J_3 = O\left(T^{\frac{1}{4}+\delta}\right);$$

and from (4. 24) and (4. 25) it follows that

---

[1] LANDAU, *Handbuch*, p. 868.

(4. 26) $$J_2 = O\left(T^{\frac{1}{4}+\delta}\right).$$

But

$$J_2 = \int_{2+2Ti}^{2+2(T+H)i} \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}\, ds = 2Hi + \int_{2+2Ti}^{2+2(T+H)i} \sum_2^\infty \frac{1}{n^s}\, ds$$

$$= 2Hi + \sum_2^\infty \frac{n^{-2-2Ti}}{\log n} - \sum_2^\infty \frac{n^{-2-2(T+H)i}}{\log n}$$

$$= 2Hi + O(1);$$

which contradicts (4. 26), since $H = T^{\frac{1}{4}+\epsilon}$ and $\delta < \epsilon$.

4. 3. The problem is therefore reduced to the proof of (4. 22). Using CAUCHY's Theorem in a manner very similar to that of 4. 2, we obtain

(4. 31) $$\int_T^{T+H} X(t)\,dt = -i\left(\int_{\frac{1}{4}+Ti}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta+Ti} + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta+Ti}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta+(T+H)i} + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta+(T+H)i}^{\frac{1}{4}+(T+H)i}\right) f(s)\,ds$$

$$= J_1 + J_2 + J_3,$$

say. Now [1]

$$\zeta(2s) = O\left(t^{\frac{1}{2}-\sigma}\log t\right)$$

uniformly for $\frac{1}{4} < \sigma \leq \frac{1}{2}$, and

$$\zeta(2s) = O(\log t)$$

uniformly for $\frac{1}{2} \leq \sigma < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta$. Also

$$e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\,\Gamma(s) = O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}}\right)$$

uniformly for $\frac{1}{4} \leq \sigma \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta$. Hence

$$f(s) = O(\log t)$$

[1] LANDAU, *l. c. supra.*

uniformly for $\frac{1}{4} \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$, and

$$f(s) = O\left(t^{\frac{1}{2}\delta}\right)$$

uniformly for $\frac{1}{2} < \sigma \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta$; and so

$$f(s) = O(t^{\delta}) \tag{4.32}$$

uniformly for $\frac{1}{4} \leq \sigma \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta$. It follows that

$$J_1 = O(T^{\delta}), \quad J_3 = O(T^{\delta}); \tag{4.33}$$

and the problem is accordingly reduced to that of proving that

$$I = iJ_2 = \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta+Ti}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta+(T+H)i} f(s)\,ds = O(T^{\delta}). \tag{4.34}$$

4.4. Now, when $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta$, we have

$$f(s) = \pi^{-s} e^{-\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4}\right)\pi i}\, \Gamma(s) \sum \frac{1}{n^{2s}}. \tag{4.41}$$

We have also, by a straightforward application of STIRLING's Theorem,

$$\pi^{-s} e^{-\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4}\right)\pi i}\, \Gamma(s) = t^{\frac{1}{2}\delta} e^{it\log(t/e\pi)} \left\{A + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\} \tag{4.42}$$

where A is a constant. The term $O\left(\frac{1}{t}\right)$ in this equation may be neglected, for its contribution to I is of the form

$$O\left(T^{\frac{1}{2}\delta-1}H\right) = o(1).$$

We have also

$$t^{\frac{1}{2}\delta} = T^{\frac{1}{2}\delta} + O\left(T^{\frac{1}{2}\delta-1}H\right), \quad (T < t \leq T+H),$$

and the second term's contribution is of the form

$$O\left(T^{\frac{1}{2}\delta-1}H^{2}\right)=O(1)^{1}.$$

Thus we are at liberty to replace $t^{\frac{1}{2}\delta}$ by $T^{\frac{1}{2}\delta}$ in (4. 42), and to replace I in our argument by

$$(4.\ 43)\qquad T^{\frac{1}{2}\delta}\int_{T}^{T+H} e^{it\log(t/e\pi)}\sum\frac{1}{n^{1+\delta+2ti}}\,dt = T^{\frac{1}{2}\delta}\sum\frac{1}{n^{1+\delta}}\int_{T}^{T+H} e^{it\log(t/e\pi n^2)}\,dt$$

$$= T^{\frac{1}{2}\delta}\sum\frac{\Phi(e\pi n^2)}{n^{1+\delta}} = T^{\frac{1}{2}\delta}S,$$

say.

The integral $\Phi(e\pi n^2)$ belongs to a type considered in 3. 4 and the following sections;[2] and its behaviour depends on the position of the point $\tau=\pi n^2$ with reference to the interval $(T, T+H)$. At most one value of n can satisfy the inequalities

$$T<\pi n^2<T+T^{\frac{1}{4}+\epsilon};$$

so that πn^2 can fall inside $(T, T+H)$ for at most one value of n. We denote this value of n, if it exists, by ν; if there be no such value, we denote by ν the largest value of n for which $\pi n^2 < T$. And we write

$$(4.\ 44)\qquad S=\sum_{1}^{\nu-2}+\sum_{\nu-1}^{\nu+1}+\sum_{\nu+2}^{\infty}=S_1+S_2+S_3,$$

say.

[1] For $\varepsilon<\frac{1}{5}$, $4\varepsilon<1-\varepsilon$, and *a fortiori* $4\varepsilon<1-\delta$. Hence

$$\frac{1}{2}\delta-1+2\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)=2\varepsilon-\frac{1}{2}(1-\delta)<0.$$

[2] We have

$$\Phi(e\pi n^2)=j_{1,0}(e\pi n^2, T+H)-j_{1,0}(e\pi n^2, T),$$

where

$$[illegible] \int_{1}^{T} [illegible]$$

Then, in the first place, we have

$$T^{\frac{1}{2}\delta} S_2 = O\left(T^{\frac{1}{2}\delta} T^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta}\right) = o(1). \tag{4. 45}$$

Secondly, if $n \leq \nu - 2$, we have, by Lemma 2. 432,

$$\Phi(e\pi n^2) = O\left\{\frac{1}{\log\left(\frac{T}{\pi n^2}\right)}\right\}. \tag{4. 46}$$

But

$$\log\left(\frac{T}{\pi n^2}\right) = 2\left(\log\sqrt{\frac{T}{\pi}} - \log n\right)$$

and

$$T > \pi(\nu - 1)^2, \quad \log\sqrt{\frac{T}{\pi}} > \log(\nu - 1).$$

Hence

$$S_1 = O\left\{\sum_{1}^{\nu-2} \frac{1}{n^{1+\delta}\log\left(\frac{\nu - 1}{n}\right)}\right\} = O(1)^1,$$

$$T^{\frac{1}{2}\delta} S_1 = O\left(T^{\frac{1}{2}\delta}\right). \tag{4. 47}$$

Similarly, if $n \geq \nu + 2$, we have

$$\Phi(e\pi n^2) = O\left\{\frac{1}{\log\left(\frac{\pi n^2}{T + H}\right)}\right\}, \tag{4. 48}$$

$$\log\left(\frac{\pi n^2}{T + H}\right) = 2\left(\log n - \log\sqrt{\frac{T + H}{\pi}}\right),$$

$$T + H < \pi(\nu + 1)^2, \log\sqrt{\frac{T + H}{\pi}} < \log(\nu + 1),$$

$$S_3 = O\left\{\sum_{\nu+2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}\log\left(\frac{n}{\nu + 1}\right)}\right\} = O(1)^2,$$

[1] Landau, *Handbuch*, p. 806.
[2] Landau, *l. c. supra.*

(4. 49) $$T^{\frac{1}{2}\delta} S_3 = O\left(T^{\frac{1}{2}\delta}\right).$$

From (4. 45), (4. 47) and (4. 49) it follows that

(4. 491) $$I = O\left(T^{\frac{1}{2}\delta}\right) = O(T^{\delta});$$

and our proof is therefore completed.

Theorem 4. 41. *Let ε be any positive number. Then there is a number $T_0(\varepsilon)$ such that the segment*

$$\frac{1}{2} + Ti, \frac{1}{2} + \left(T + T^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)i,$$

where $T > T_0(\varepsilon)$, contains at least one zero of $\zeta(s)$ of odd order.

As a corollary we have

Theorem 4. 42. *The number $N_0(T)$ of zeros of $\zeta(s)$, on the line $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + Ti$, is of the form*

$$\Omega\left(T^{\frac{3}{4}-\delta}\right)$$

for every positive value of δ.

5.

On the order of $\psi(x) - x$ and of $\Pi(x) - Li\,x$.

5. 1. In this section we shall prove that

(5. 111) $$\psi(x) - x = \Omega_R(\sqrt{x}\log\log\log x),\ \psi(x) - x = \Omega_L(\sqrt{x}\log\log\log x),$$

i. e. that there exists a constant K such that each of the inequalities

(5. 112) $$\psi(x) - x > K\sqrt{x}\log\log\log x, \psi(x) - x < -K\sqrt{x}\log\log\log x,$$

is satisfied for arbitrarily large values of x; and from these inequalities we shall deduce the inequalities (1. 52). It is clear that we may base our proof on the assumption that the Riemann hypothesis is true. If it is false, then more is true than our inequalities assert.[1]

[1] Landau, *Handbuch*, pp. 712 *et seq.*

We shall found our proof on the formulae

$$\gamma_n = g(n) + O(1), \tag{5. 121}$$

where $t = g(z)$ is the function inverse to

$$z = \frac{1}{2\pi} t \log t - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} t; \tag{5. 122}$$

and

$$\frac{\psi(x) - x}{\sqrt{x}} = -2 \sum_{\gamma_n < T} \frac{\sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} + O(1), \tag{5. 131}$$

where $\eta = \log x$, uniformly for $T \geq x^2$. Of these two formulae (5. 121) and (5. 131), the first is an immediate corollary of VON MANGOLDT's formula

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)^{1};$$

and the second is an immediate corollary of known formulae to be found in LANDAU's *Handbuch*.[2]

If we make T tend to infinity in (5. 131), we obtain

$$\frac{\psi(x) - x}{\sqrt{x}} = -2 \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} + O(1), \tag{5. 132}$$

since the series is known to be convergent.

5. 2. Let $z = \xi + i\eta$, and let $F(z)$ be the function of z defined by the series

$$F(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n z}}{\gamma_n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n(\xi + i\eta)}}{\gamma_n}, \tag{5. 21}$$

convergent for $\xi > 0$. We shall consider the behaviour of this function in the semi-infinite strip defined by the inequalities $0 < \xi \leq 1, \eta \geq 1$. Our object will be to prove

Theorem 5. 2. *If $\Im F(z)$ is the imaginary part of $F(z)$ then*

[1] It has been shown by BOHR, LANDAU, and LITTLEWOOD (»Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le voisinage de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$», *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 1913, pp. 1144—1175) that, on the RIEMANN hypothesis (which we are now assuming), the O in this formula and the corresponding O in (5. 121) can each be replaced by o.

[2] See pp. 387, 351.

$$-\Im F(z) = \sum_1^\infty e^{-\gamma_n \xi} \frac{\sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} = \Omega_R(\log \log \eta),$$

$$-\Im F(z) = \Omega_L (\log \log \eta),$$

in the semi-infinite strip $0 < \xi \leq 1, \eta \geq 1$[1].

We shall consider the first of these relations: the second can of course be proved in a similar manner. And we shall begin by proving the following lemma.

Lemma 5. 21. We have

$$-\Im F(\xi + i\xi) = \sum \frac{e^{-\gamma_n \xi} \sin \gamma_n \xi}{\gamma_n} \sim \frac{1}{8} \log\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

as $\xi \to 0$.

Suppose that $n \leq u \leq n+1$. Then

$$g'(u) = \frac{2\pi}{\log\left(\frac{g}{2\pi}\right)}, \tag{5. 22}$$

and so

$$g(u) - g(n) = (u-n) g'(\nu) \quad (n \leq \nu < u)$$

$$= O\left(\frac{1}{\log n}\right) = O(1).$$

Hence

$$\frac{e^{-(\xi + i\xi) g(u)}}{g(u)} = \frac{e^{-(\xi+i\xi)\gamma_n + O(\xi)}}{\gamma_n} \left\{1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{e^{-\gamma_n(\xi + i\xi)}}{\gamma_n} \left\{1 + O(\xi) + O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right\}.$$

It should be observed that the constants implied by these O's, and by those which occur in the argument which follows, are independent of both u (or n) and ξ.

Let u_0 be a fixed positive number, and let $g_0 = g(u_0)$. Then

[1] To write

(1) $$-\Im F(z) = \Omega_R (\log \log \eta),$$

for a fixed value of ξ, would be to assert the existence of a positive K such that

(2) $$-\Im F(z) > K \log \log \eta$$

for this value of ξ and arbitrarily large values of η. To assert (1) *in the strip* $0 < \xi \leq 1, \eta \geq 1$ is to assert the existence of a positive K such that (2) holds for arbitrarily large values of η (corresponding in general to different values of ξ)

(5. 23) $$F(\xi + i\xi) = \int_{u_0}^{\infty} \frac{e^{-(\xi+i\xi)g(u)}}{g(u)}\,du + O\int_{u_0}^{\infty} \frac{e^{-\xi g(u)}}{g(u)}\left(\xi + \frac{\log u}{u}\right)du + O(1)$$

$$= \int_{g_0}^{\infty} \frac{e^{-(\xi+i\xi)g}}{g}\,\frac{dg}{g'(u)} + O\left(\xi\int_{g_0}^{\infty} \frac{e^{-\xi g}}{g}\,\frac{dg}{g'(u)}\right) + O(1).$$

But, by (5. 22),

$$\frac{1}{g'(u)} = \frac{\log g - \log 2\pi}{2\pi}.$$

Hence

$$\int_{g_0}^{\infty} \frac{e^{-\xi g}}{g}\,\frac{dg}{g'(u)} = O\int_{g_0}^{\infty} \frac{e^{-\xi g}\log g}{g}\,dg = O\left(\log\frac{1}{\xi}\right)^2,$$

and

(5. 24) $$F(\xi + i\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{g_0}^{\infty} \frac{e^{-(\xi+i\xi)g}}{g}(\log g - \log 2\pi)\,dg + O(1).$$

Thus

(5. 25) $$-\mathfrak{I}F(\xi + i\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{g_0}^{\infty} \frac{e^{-\xi g}\sin\xi g}{g}\log g\,dg$$

$$- \frac{\log 2\pi}{2\pi}\int_{g_0}^{\infty} \frac{e^{-\xi g}\sin\xi g}{g}\,dg + O(1)$$

$$= J_1 + J_2 + O(1),$$

say. But

(5. 26) $$J_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\xi g}\sin\xi g}{g}\log g\,dg + O(1)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-w}\sin w}{w}(\log w - \log\xi)\,dw + O(1)$$

$$= \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{\xi}\right) + O(1);$$

and

(5. 27) $$J_2 = -\frac{\log 2\pi}{2\pi}\int_{\xi g_0}^{\infty} \frac{e^{-w}\sin w}{w}\,dw = O(1).$$

From (5. 25), (5. 26), and (5. 27) it follows that

(5. 28) $$-3F(\xi + i\xi) \sim \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

as $\xi \to 0$.

5. 3. *Lemma 5. 3. There is a constant a such that*

(5. 31) $$\sum_{\gamma_n \xi > a} \frac{e^{-\gamma_n \xi}}{\gamma_n} < \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

for all sufficiently small values of ξ.

The number of γ's which lie between ν and $\nu + 1$ is of the form $O(\log \nu)$. Hence

$$\sum_{\gamma_n \xi > a} \frac{e^{-\gamma_n \xi}}{\gamma_n} = O \sum_{\nu > \frac{a}{\xi} - 1} \frac{e^{-\nu\xi} \log \nu}{\nu}$$

$$= O \int_a^\infty \frac{e^{-\xi u} \log u}{u}\, du$$

$$= O\left\{\int_a^\infty \frac{e^{-w} \log w}{w}\, dw + \log\left(\frac{1}{\xi}\right) \int_a^\infty \frac{e^{-w}}{w}\, dw\right\};$$

and (5. 31) follows immediately.

5. 4. We shall now make use of a well-known theorem of DIRICHLET, the fundamental importance of which in the theory of DIRICHLET's series was first recognised by BOHR.[1] Let us denote by (x)[2] the number which differs from x by an integer and satisfies the inequalities $-\frac{1}{2} < (x) \leq \frac{1}{2}$. Then DIRICHLET's theorem asserts that, given any positive numbers τ_0 (large), ξ (small), and N (integral), there exists a τ such that

(5. 41) $$\tau_0 < \tau < \tau_0 \left(\frac{1}{\xi} + 1\right)^N,$$

and

(5. 42) $$\left|\left(\frac{\gamma_n \tau}{2\pi}\right)\right| < \xi$$

[1] See BOHR and LANDAU, *Göttinger Nachrichten*, 1910, pp. 303—330, and a number of later papers by BOHR.

[2] The notation is that of our first paper, 'Some problems of Diophantine Approximation', *Acta Mathematica*, vol. 37, pp. 155—193.

for
$$n = 1, 2, \ldots N.$$

Let
$$\eta = \tau + \xi, N = \frac{a}{\xi}.$$

Then
$$|-\Im F(\xi + i\eta) + \Im F(\xi + i\xi)|$$
$$= \left| \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} e^{-\gamma_n \xi} - \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \xi}{\gamma_n} e^{-\gamma_n \xi} \right|$$
$$< \sum_1^{N} \left| \frac{\sin \gamma_n \eta - \sin \gamma_n \xi}{\gamma_n} \right| + 2 \sum_{N+1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n \xi}}{\gamma_n}.$$

But, by (5. 42),
$$\sin \gamma_n \eta = \sin(\gamma_n \xi + \gamma_n \tau) = \sin(\gamma_n \xi + \omega_n),$$
where
$$|\omega_n| < 2\pi\xi;$$
and so
$$|\sin \gamma_n \eta - \sin \gamma_n \xi| < 2\pi\xi.$$

Hence

(5. 43)
$$|-\Im F(\xi + i\eta) + \Im F(\xi + i\xi)| \leq 2\pi\xi \sum_1^{N} \frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{16} \log\left(\frac{1}{\xi}\right)$$
$$= \frac{1}{16} \log\left(\frac{1}{\xi}\right) + O(1) < \frac{1}{12} \log\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

if ξ is small enough. It follows that the inequality

(5. 44)
$$-\Im F(\xi + i\eta) > \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) \log\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{24} \log\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

holds for every sufficiently small value of ξ and a corresponding value of η satisfying

(5. 45)
$$\tau_0 < \eta < \xi + \tau_0 \left(\frac{1}{\xi} + 1\right)^a.$$

5. 5 We are now in a position to prove Theorem **5. 2**. Suppose that the formula
$$-\Im F(\xi + i\eta) = \Omega_R(\log \log \eta)$$
is false. Then, given any positive number ε, we have

(5. 51) $$-\mathfrak{J}\,F(\xi + i\eta) < \varepsilon \log\log \eta,$$

provided only

$$\eta > \tau_1 = \tau_1(\varepsilon).$$

Let us take $\tau_0 = \tau_1$: then (5. 51) holds for all values of η which satisfy (5. 45). We have therefore

(5. 52) $$-\mathfrak{J}\,F(\xi + i\eta) < \varepsilon \log\log \left\{\xi + \tau_1 \left(\frac{1}{\xi} + 1\right)^{\frac{a}{\xi}}\right\}.$$

But

$$\log\log \left\{\xi + \tau_1 \left(\frac{1}{\xi} + 1\right)^{\frac{a}{\xi}}\right\} \sim \log\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

as $\xi \to 0$. Thus (5. 52) contradicts (5. 44). Therefore (5. 51) must be false, and the theorem is proved.

5. 6. Our next object is to prove

Theorem 5. 6. *If we denote by $\mathfrak{J}\,F(i\eta)$ the limit of $\mathfrak{J}\,F(\xi + i\eta)$ as $\xi \to 0$, so that*

$$\mathfrak{J}\,F(i\eta) = \sum_1^\infty \frac{\sin \gamma_n \eta}{\gamma_n},$$

then

$$-\mathfrak{J}\,F(i\eta) = \Omega_R(\log\log \eta), \quad -\mathfrak{J}\,F(i\eta) = \Omega_L(\log\log \eta).$$

If $F(z)$ were regular for $\xi \geq 0$, or regular for $\xi > 0$ and continuous for $\xi \geq 0$, we could deduce Theorem **5. 6** from Theorem **5. 2** by means of a well-known theorem of Lindelöf. Our argument would in fact be much the same as that used by Bohr and Landau[1] in deducing

$$\zeta(1 + it) = \Omega(\log\log t)$$

from

$$\zeta(s) = \Omega(\log\log t) \quad (\sigma \geq 1).$$

In the present case, however, $F(z)$ is not continuous for $\xi \geq 0$. We proceed therefore to frame a modification of Lindelöf's theorem adapted for our purpose.

Lemma 5. 61. Suppose that

(i) *$f(z)$ is regular in the open semi-infinite strip*

$$0 < \xi < 1, \ \eta \geq \eta_0 > 0;$$

(ii) *$f(\xi + i\eta)$ tends to a limit $f(i\eta)$ as $\xi \to 0$, for every such value of η; and that positive constants A_1, A_2, and p exist such that*

[1] *Göttinger Nachrichten*, 1910, p. 316.

(iii) *given any number* y *greater than* η_0, *we can find a positive number* $\delta = \delta(y)$ *such that*

$$\left|\frac{f(\xi + i\eta)}{f(i\eta)}\right| < A_1$$

for

$$0 \leq \xi \leq \delta, \eta_0 \leq \eta \leq y;$$ [1]

(iv) $$|f(z)| < A_2$$

on the boundary of the strip;

(v) $$|f(z)| = O(e^{z^p})$$

in the interior.

Then there is a constant A *such that*

$$|f(z)| < A$$

in the interior and on the boundary of the strip.

There is plainly no real loss of generality in supposing that η_0 is greater than any number fixed beforehand. Let us then choose a number q greater than p, and suppose that

$$q \operatorname{arc\,tan}\left(\frac{1}{\eta_0}\right) < \frac{1}{2}\pi.$$

If $z = Re^{i\Theta}$, then

$$\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tan}\left(\frac{1}{\eta_0}\right) \leq \Theta \leq \frac{1}{2}\pi$$

for all points of the strip, so that

$$\cos q\left(\Theta - \frac{1}{2}\pi\right) > 0$$

and

$$\Re(-iz)^q > 0.$$

If now

$$\Phi(z) = f(z)\, e^{-\varepsilon(-iz)^q},$$

where ε is positive, then

(5 61) $$|\Phi(z)| < A_2$$

at all points of the boundary. Also $\Phi(z) \to 0$ as $\eta \to \infty$, uniformly for $0 \leq \xi \leq 1$. We can therefore choose a value of y, as large as we please, and such that

$$|\Phi(\xi + iy)| < A_2 \quad (0 \leq \xi < 1).$$

The inequality (5. 61) is then satisfied at all points of the boundary of the rectangle R whose corners are $(0, \eta_0)$, $(1, \eta_0)$, $(1, y)$ and $(0, y)$.

Now let δ be the number $\delta(y)$ of condition (iii), and let R' be the left-hand, and R'' the right-hand, of the two rectangles into which R is divided by the line $\xi = \delta$. It follows from condition (iii) that

$$(5.\ 62) \qquad \Phi(z) < A_1 A_2$$

at all points in or on the boundary of R'. It is moreover evident that $A_1 \geq 1$. Hence (5. 62) holds also on the boundary of R'', and therefore, since $\Phi(z)$ is regular in and on the boundary of R'', inside R'' also. Thus (5. 62) holds inside and on the boundary of the whole rectangle R. Making ε tend to zero, as in the proof of LINDELÖF's theorem, we see that

$$|f(z)| \leq A = A_1 A_2$$

inside and on the boundary of R. Thus the lemma is proved, with $A = A_1 A_2$.

5. 7. We can now prove Theorem **5. 6**. Let us suppose that the first proposition asserted in the theorem is false. Then, given any positive number δ, there is an η_0 such that

$$(5.\ 71) \qquad -\Im F(i\eta) < \delta \log\log \eta$$

for

$$\eta > \eta_0.$$

Let

$$(5.\ 72) \qquad f(z) = e^{iF(z)} (\log z)^{-K}$$

where $K > \delta$. We shall show that $f(z)$ satisfies all the conditions of Lemma *5. 61* in the strip $0 < \xi \leq 1, \eta \geq 2$. That conditions (i) and (ii) are satisfied is evident, and (iv) is satisfied in virtue of (5. 71). It remains to verify (iii) and (v).

It follows from (5. 131) that

$$\sum_{\gamma_n > T} \frac{\sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} = O(1),$$

uniformly for $T > x^2 = e^{2\eta}$. If then we choose N so that $\gamma_{N+1} > e^{2y}$, we have

$$(5.\ 73) \qquad \sum_{\nu}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} = O(1)$$

uniformly for $\nu > N, 2 \leq \eta \leq y$. It follows by partial summation that

$$(5.\ 74) \qquad \sum_{N+1}^{\nu} \frac{e^{-\gamma_n \xi} \sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} = O(1),$$

uniformly for $\xi \geq 0, 2 \leq \eta \leq y$. Thus

$$|-\Im F(\xi + i\eta) + \Im F(i\eta)| = \left| \sum_{1}^{\infty} (1 - e^{-\gamma_n \xi}) \frac{\sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} \right|$$

$$N\xi + \left| \sum_{N+1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} \right| + \left| \sum_{N+1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n \xi} \sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} \right|$$

$$= N\xi + O(1),$$

$$\left| \frac{f(\xi + i\eta)}{f(i\eta)} \right| = e^{-\Im F(\xi + i\eta) + \Im F(i\eta)} \left| \frac{\log (i\eta)}{\log (\xi + i\eta)} \right|^{K}$$

$$< K_1 e^{N\xi + K_2},$$

where K_1 and K_2 are constants; so that condition (iii) is satisfied if we take $\delta = \frac{1}{N}$.

We have finally to verify that $f(z)$ satisfies condition (v). It is known that

$$\frac{\psi(x) - x}{\sqrt{x}} = O(\log x)^2,$$

and it follows from (5. 131) that

$$(5.\ 75) \qquad \sum_{1}^{\nu} \frac{\sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} = O(\eta^2),$$

uniformly for $\gamma_\nu > x^2 = e^{2\eta}$. But, if $\gamma_\nu \leq e^{2\eta}$, we have

$$\sum_{1}^{\nu} \frac{\sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} = O \sum_{\gamma_n < e^{2\eta}} \frac{1}{\gamma_n} = O \sum_{k < e^{2\eta}} \frac{\log k}{k} = O(\eta^2).$$

Thus (5. 75) holds uniformly for all values of ν; and so, by partial summation we obtain

$$-\Im F(\xi + i\eta) = \sum_1^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n \xi} \sin \gamma_n \eta}{\gamma_n} = O(\eta^2),$$

(5. 76) $$f(z) = e^{O(\eta^2)} o(1) = O(e^{\eta^3}).$$

Thus condition (v) is satisfied with $p = 3$.

The function $f(z)$ therefore satisfies all the conditions of Lemma *5. 61*, and so

$$f(z) = O(1)$$

for $0 \leq \xi \leq 1, \eta \geq 2$. Hence

$$e^{iF(z)} = O\,|(\log z)^K|$$

and so

(5. 77) $$-\Im F(z) < 2K \log\log \eta$$

for all sufficiently large values of η. But K, being restricted only to be greater than δ, is arbitrarily small; and so (5. 77) is in contradiction with Theorem **5. 2** It follows that (5. 71) is false, and therefore Theorem **5. 6** is true.

5. 8. From (5. 132) and Theorem **5. 6** we can at once deduce the theorem which it is our main object to prove, viz.,

Theorem 5. 8. *We have*

$$\psi(x) - x = \Omega_R(\sqrt{x} \log\log\log x),\ \psi(x) - x = \Omega_L(\sqrt{x} \log\log\log x).$$

All that remains is to deduce from these relations the corresponding relations which involve $\Pi(x)$. This deduction presents one point of interest. It might be anticipated that nothing more than a partial summation would be needed; and if the one-sided relations involving Ω_R and Ω_L are replaced, in premiss and conclusion, by a single relation involving Ω, this is actually so. But the argument now required is a little more subtle and involves an appeal to the results established in 2. 25 concerning the Cesàro means of $\psi(x) - x$.

We have to show that

(5. 81) $$\Pi(x) - Li\,x = \Omega_R\left(\frac{\sqrt{x} \log\log\log x}{\log x}\right),\ \Pi(x) - Li\,x = \Omega_L\left(\frac{\sqrt{x} \log\log\log x}{\log x}\right).$$

It is plainly enough to establish similar relations for the function

(5. 82) $$F(x) = \Pi(x) + \frac{1}{2}\Pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\Pi\left(\sqrt[3]{x}\right) + \dots.$$

It is of course this function, and not $\Pi(x)$, which can be connected with $\psi(x)$ by a partial summation. We have in fact

$$f(x) = \sum_{2}^{x} \frac{\psi(n) - \psi(n-1)}{\log n}$$

$$= \sum_{2}^{x} \frac{1}{\log n} + \sum_{2}^{x} \frac{\{\psi(n) - n\} - \{\psi(n-1) - (n-1)\}}{\log n},$$

$$f(x) = Li\,x + O(1) + \sum_{2}^{x} \frac{\{\psi(n) - n\} - \{\psi(n-1) - (n-1)\}}{\log n}$$

$$= Li\,x + O(1) + \sum_{2}^{x-1} \{\psi(n) - n\} \left\{\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right\} +$$

$$+ \frac{\psi(x) - [x]}{\log\{[x]+1\}},$$

(5. 83)
$$f(x) - Li\,x - \frac{\psi(x) - x}{\log x} = \sum_{2}^{x} \frac{\psi(n) - n}{n(\log n)^2}$$

$$+ O \sum_{2}^{x} \frac{|\psi(n) - n|}{n^2 (\log n)^2} + O(1)$$

$$= \sum_{2}^{x} \frac{\psi(n) - n}{n(\log n)^2} + O(1).$$

Let

$$\chi(x) = \sum_{2}^{x} \{\psi(n) - n\}.$$

Then

$$\chi(n) = O\left(n^{\frac{3}{2}}\right),$$

by Theorem 2. 25. Hence

(5. 84)
$$\sum_{2}^{x} \frac{\psi(n) - n}{n(\log n)^2} = \sum_{2}^{x} \frac{\chi(n) - \chi(n-1)}{n(\log n)^2}$$

$$= \sum_{2}^{x} \chi(n) \left[\frac{1}{n(\log n)^2} - \frac{1}{(n+1)\{\log(n+1)\}^2} \right] + \frac{\chi[x]}{([x]+1)\{\log([x]+1)\}^2}$$

$$= O \sum_{2}^{x} \frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^2} + O\left\{\frac{\sqrt{x}}{(\log x)^2}\right\}$$

$$= O\left\{\frac{\sqrt{x}}{(\log x)^2}\right\}.$$

From (5. 83) and (5. 84) it follows that

$$f(x) - Li\,x - \frac{\psi(x) - x}{\log x} = O\left\{\frac{\sqrt{x}}{(\log x)^2}\right\}; \tag{5. 85}$$

and from (5. 85) and Theorem 5. 8 we deduce

Theorem 5. 81. *We have*

$$\Pi(x) - Li\,x = \Omega_R\left(\frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x}\right), \Pi(x) - Li\,x = \Omega_L\left(\frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x}\right).$$

We refer in the introduction (1. 5) to the other important applications which may be made of the method of this section.

Additional Note.

While we have been engaged on the final correction of the proofs of this memoir, which was presented to the *Acta Mathematica* in the summer of 1915, two very interesting notes by M. DE LA VALLÉE-POUSSIN entitled 'Sur les zéros de $\zeta(s)$ de RIEMANN' have appeared in the *Comptes Rendus* (23 Oct. and 30 Oct. 1916). M. DE LA VALLÉE-POUSSIN obtains, by methods quite unlike those which we use here, a considerable part of the results of section 4 (18 Nov. 1916).

Erratum

G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, 'Some problems of Diophantine Approximation', II, *Acta Mathematica*, vol. 37, p. 231, line 1:

$$\textit{for}\quad o\left\{\sqrt{\frac{1}{1-r}}\right\} \quad \textit{read}\quad o\left\{\sqrt{\frac{1}{1-r}}\right\}.$$

SUR LA SÉRIE DE LAMBERT ET SON APPLICATION À LA THÉORIE DES NOMBRES.

PAR

S. WIGERT

à STOCKHOLM.

Introduction.

Dans ce mémoire j'écris la série de LAMBERT sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nz} - 1}$$

en remplaçant dans la série originale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}$$

la variable x à module < 1 par e^{-z}, où il faut donc supposer $R(z) > 0$. Alors la série peut encore s'écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{-nz}$$

en désignant par $\tau(n)$ le nombre des diviseurs de n, et elle représente une fonction analytique $L(z)$, dont le domaine d'existence est limité par l'axe imaginaire. M. LANDAU a démontré,[1] en effet, d'une manière élégante et fort simple, que $L(z)$ devient infinie chaque fois que la variable z s'approche d'une valeur de la forme $\frac{2m\pi i}{n}$, en suivant la droite parallèle à l'axe réel.

[1] Cf. KNOPP: Journal für Mathematik, Bd. 142. La démonstration de M. LANDAU porte sur la série originale en x.

On sait de plus que la fonction $L(z)$ peut être représentée, pour les valeurs *réelles* dans le voisinage de $z = 0$, par une formule asymptotique[1] de la forme

$$L(z) = \frac{\gamma - \log z}{z} + \frac{1}{4} - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{B_\nu^2}{2\nu|\underline{2\nu}} z^{2\nu-1} + \vartheta_p$$

où γ est la constante d'Euler et B_ν le ν-ième nombre de Bernoulli. Pour $p = \infty$ on aurait une série divergente, mais puisqu'on a

$$|\vartheta_p| < \frac{B_p B_{p+1} z^{2p}}{|\underline{2p}} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{z^2}{4\pi^2}\right)$$

le développement en question est du type dit sémi-convergent.

Je me suis demandé à plusieurs reprises s'il n'était pas possible de modifier ce développement asymptotique afin qu'il fût valable aussi pour les petites valeurs complexes de z. Mais il me paraissait toujours difficile de donner une forme pratiquable au terme-reste dans le cas général, où $L(z)$ devient infinie dans chaque voisinage de $z = 0$. La réponse que je sais donner maintenant à cette question, peut être formulée ainsi:

Pour les valeurs de z dans le voisinage de l'origine la fonction $L(z)$ admet une équation fonctionnelle asymptotique de la forme

$$L(z) = \frac{\gamma - \log z}{z} + \frac{1}{4} - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{B_\nu^2}{2\nu|\underline{2\nu}} z^{2\nu-1} \mp \frac{2\pi i}{z} L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) + \Theta_p$$

où les signes $\mp$ correspondent à $R\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$. Quant au terme-reste Θ_p, on a

$$|\Theta_p| < \frac{4|\underline{2p}\sqrt{2(p+1)e}\,\zeta^2(2p+1)}{(2\pi)^{4p+2}} |z|^{2p}$$

en désignant comme à l'ordinaire par ζ la fonction connue de Riemann.

Il y a lieu d'en faire comparaison avec l'équation fonctionnelle *exacte* de

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nz} - 1}$$

à savoir

$$f(z) = \frac{\pi^2}{6z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{24} - \frac{4\pi^2}{z^2} f\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)$$

[1] Voir p. ex. Schlomilch, Compendium d. h. Analysis, Bd. II, pag. 238 et suiv.

dont j'ai tiré beaucoup de parti dans un travail récent[1] que j'aurai besoin de citer dans ce qui suit.

Au résultat précédent un problème important de la théorie des nombres aussi se rattache. On obtient en effet de $L(z)$ à l'aide de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}L(z)\,dz}{z^{k+1}}, \quad \begin{cases} a > 0 \\ x \geqq 1 \end{cases}$$

la fonction arithmétique

$$\frac{1}{\underline{|k}}\sum_{n \leqq x}\tau(n)(x-n)^k$$

laquelle a été étudiée surtout par M. VORONOÏ. Dans deux grands mémoires[2] ce savant en a fait un examen approfondi, dont je me borne ici à citer le théorème suivant:

»Pour $k \geqq 1$ la fonction arithmétique $\frac{1}{\underline{|k}}\sum_{n \leqq x}\tau(n)(x-n)^k$ peut s'écrire

$$\frac{1}{\underline{|k}}\int_0^x (x-t)^k(\log t + 2\gamma)\,dt + \sum_{\lambda=0}^{k}\frac{(-1)^\lambda\zeta^2(-\lambda)}{\underline{|\lambda}\,\underline{|k-\lambda}}x^{k-\lambda} + F_k$$

où

$$F_k = O\left(x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\right).»$$

L'intégrale figurant dans cette expression est égale à

$$\frac{x^{k+1}}{\underline{|k+1}}\left\{\log x + \gamma - \frac{\Gamma'(k+2)}{\Gamma(k+2)}\right\}.$$

En y ajoutant le polynôme du degré k on aura précisément la somme des résidus de la fonction analytique de la variable s:

$$\frac{x^{s+k}\zeta^2(s)}{s(s+1)\dots(s+k)},$$

et d'après une lettre[3] que M. LANDAU a bien voulu m'écrire, je sais que l'étude de l'intégrale

---

[1] Sur quelques fonctions arithmétiques, Acta Mathematica, T. 37.

[2] Annales de l'École Normale, sér. 3, T. 21 (1904).

[3] du 31 Août 1914. Les recherches de M. LANDAU ont été publiées plus tard dans les *Göttingische gelehrte Anzeigen*, nos 7 et 8 (1915).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^{s+k}\zeta^2(s)\,ds}{s(s+1)\ldots(s+k)}$$

lui a donné le moyen de retrouver par un calcul plus simple le résultat cité de M. Voronoï. Je prends ici l'occasion d'exprimer à M. Landau ma reconnaissance vive de l'intérêt qu'il a pris à mes recherches antérieures et des renseignements précieux sur diverses questions, dont il m'a fourni.

Maintenant il me semble assez intéressant *qu'on peut obtenir aussi à l'aide de l'équation asymptotique de $L(z)$ le résultat précédent, du moins pour $k \geqq 3$.* En effet, l'expression de M. Voronoï, moins F_k, n'est autre chose que le résultat de l'opération $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}}{z^{k+1}}(\;)\,dz$, exécutée sur les termes précédant $\mp\frac{2\pi i}{z}L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)$ dans l'équation en question. Quant à la fonction F_k, elle est représentée par une série infinie de la forme

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{(-1)^{k+1}\xi_{k+1}(4\pi^2nx)+\eta_{k+1}(4\pi^2nx)}{(4\pi^2n)^{k+1}}$$

ξ et η étant deux fonctions qui satisfont aux équations différentielles

$$\begin{cases} x\dfrac{d^2\xi_k}{dx^2}-(k-1)\dfrac{d\xi_k}{dx}-\xi_k=0 \\ x\dfrac{d^2\eta_k}{dx^2}-(k-1)\dfrac{d\eta_k}{dx}+\eta_k=0. \end{cases}$$

Par mes recherches j'en ai obtenu une série tout à fait analogue

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{c\varphi_{k+1}(4\pi^2nx)+c'\psi_{k+1}(4\pi^2nx)}{(4\pi^2n)^{k+1}}$$

où

$$\begin{cases} x\varphi''_k-(k-1)\varphi'_k+\varphi_k=0 \\ x\psi''_k-(k-1)\psi'_k+\psi_k=-x^ke^{-x} \end{cases}$$

et cette série est aussi $=O\left(x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\right)$. Or, il faut ici ajouter un terme-reste, dont l'ordre de grandeur ne dépasse pas x^2 ou x, selon que l'entier k est pair ou impair. Pour $k \geqq 3$ l'ordre du reste est donc inférieur à celui de la série. Si, au contraire, $k=2$ ou 1, certes la série est encore valable, mais la discussion du reste exige d'autres méthodes.

Première Partie.

L'équation fonctionnelle asymptotique de L(z).

§ 1. *Transformation de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{nz}-1}.$$

Partons de la formule d'Euler-Maclaurin[1]

$$\sum_{n=0}^{p}F(n)=\int_0^p F(v)dv+\frac{1}{2}[F(p)+F(0)]+P_2(0)[F'(p)-F'(0)]-\int_0^p P_2(v)F''(v)dv$$

où

$$P_2(v)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n v}{2\pi^2 n^2}.$$

En y posant

$$F(v)=\frac{1}{e^{zv}-1}-\frac{1}{zv},\quad (R(z)>0) \tag{1}$$

on aura

$$F(+\infty)=F'(+\infty)=0,\ F(v)=-\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}B_\nu(zv)^{2\nu-1}}{|\underline{2\nu}},\quad (|vz|<2\pi)$$

et par suite

$$-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{e^{nz}-1}-\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}=\lim_{\varepsilon=0}\left\{\int_\varepsilon^p\frac{dv}{e^{zv}-1}-\frac{1}{z}\log\frac{p}{\varepsilon}\right\}+\frac{1}{2}F(p)-\frac{1}{4}+$$

$$+\frac{1}{12}\left[F'(p)-\frac{z}{12}\right]-\int_0^p P_2(v)F''(v)dv=\frac{1}{z}\log(1-e^{-pz})+\frac{1}{z}\lim_{\varepsilon=0}\log\frac{\varepsilon}{1-e^{-\varepsilon z}}+$$

$$-\frac{\log p}{z}+\frac{1}{2}F(p)-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left[F'(p)-\frac{z}{12}\right]-\int_0^p P_2(v)F''(v)dv$$

ce qui nous donne pour $p=\infty$

[1] Wirtinger: Acta Mathematica, T. 26, p. 259.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nz}-1} = \frac{\gamma - \log z}{z} + \frac{1}{4} - \frac{z}{144} - \int_0^{\infty} P_2(v) F''(v) dv.$$

Or, l'intégrale $\int_0^{\infty} |F''(v)| dv$ étant convergente, on a

$$\left| \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n v}{2\pi^2 n^2} \right) F''(v) dv \right| < \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\infty} |F''(v)| dv < \frac{1}{2\pi^2 q} \int_0^{\infty} |F''(v)| dv$$

d'où il suit

$$\int_0^{\infty} P_2(v) F''(v) dv = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} \int_0^{\infty} F''(v) \cos 2\pi n v dv$$

et enfin, en observant que

$$\int_0^{\infty} F''(v) \cos 2\pi n v dv = -\frac{z}{12} - 4\pi^2 n^2 \int_0^{\infty} F(v) \cos 2\pi n v dv$$

le résultat suivant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nz}-1} = \frac{\gamma - \log z}{z} + \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F(v) \cos 2\pi n v dv. \qquad (2)$$

Nous allons maintenant donner à la série figurant dans le membre droit de (2) une forme plus pratiquable, et pour cela nous calculons d'abord la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) \cos a t dt$$

en y supposant a réel et > 0. Elle peut donc s'écrire

$$\lim_{\substack{p=\infty \\ \varepsilon=0}} \left[\int_{\varepsilon}^{p} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) dt - \int_{\varepsilon}^{p} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) (1 - \cos a t) dt \right] =$$

$$= - \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos a t}{e^t - 1} dt + \lim_{\varepsilon=0} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{e^t - 1} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos a t dt}{t} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \left[\log \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon}} + ci(a\varepsilon) \right] - \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos a t}{e^t - 1} dt$$

en employant la notation connue

$$ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t\,dt}{t} \quad (x > 0).$$

Or, on a[1]

$$\lim_{\varepsilon=0}\Big[ci(\varepsilon) - \log\varepsilon\Big] = \gamma$$

et de plus, pour $a < 1$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos at}{e^t - 1}\,dt = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu-1}a^{2\mu}}{\underline{|2\mu}} \int_0^\infty \frac{t^{2\mu}\,dt}{e^t-1} = \sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\zeta(2\mu+1)a^{2\mu}.$$

Cette série représente la fonction

$$\gamma + \frac{\Gamma'(1+ai)}{\Gamma(1+ai)} + \frac{\Gamma'(1-ai)}{\Gamma(1-ai)} = \gamma + \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'(ai)}{\Gamma(ai)} + \frac{\Gamma'(-ai)}{\Gamma(-ai)}\right]$$

comme il est bien connu, et nous avons ainsi

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)\cos at\,dt = \log a - \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'(ai)}{\Gamma(ai)} + \frac{\Gamma'(-ai)}{\Gamma(-ai)}\right] = \varphi(a). \qquad (3)$$

La série de puissances $\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\zeta(2\mu+1)a^{2\mu}$ ne converge que pour $a < 1$, mais la formule (3) est valable pour toutes les valeurs réelles et positives de a. En substituant dans (3): $t = zv$ et $az = \lambda$, où z aussi est supposé provisoirement réel et > 0, nous avons finalement

$$\int_0^\infty F(v)\cos\lambda v\,dv = \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{\lambda}{z}\right), \quad (\lambda \text{ réel et} > 0). \qquad (4)$$

Ici l'intégrale converge tant que $R(z) > 0$, et la formule (4) reste vraie sous cette hypothèse. Nous avons par là démontré la formule importante

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{nz}-1} = \frac{\gamma - \log z}{z} + \frac{1}{4} + \frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{2\pi n}{z}\right). \qquad (A)$$

---

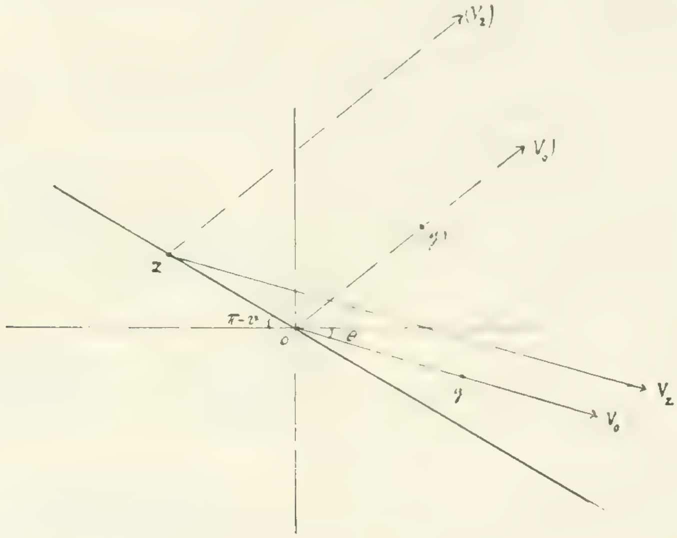
[1] Cf. NIELSEN: Theorie des Integrallogarithmus (Leipzig 1906), §§ 3 et 8.

§ 2. *Les fonctions J et Ω.*

Considérons l'intégrale

$$J = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ty}\,dt}{t + \frac{z}{y}}, \quad (R(y) > 0) \tag{5}$$

laquelle a toujours un sens, pourvu que le quotient $\frac{z}{y}$ ne soit pas réel et négatif ou zéro. On aura alors (voir la figure!)



$$J = \int_{V_0} \frac{e^{-t}dt}{t+z} = e^z \int_{V_z} \frac{e^{-t}dt}{t}.$$

En ayant soin de faire varier y seulement d'une telle manière que le vecteur V_z, parallèle à V_0, ne passe point par l'origine, on voit donc que J représentera la fonction analytique $-e^z\, li e^{-z}$, rendue monodrome en pratiquant la coupure $0 \ldots -\infty$ dans le plan de la variable z. La valeur de $J(z)$ au point $-\xi$ de l'axe réel négatif sera par conséquent

$$J(-\xi) = -e^{-\xi} li_1 e^{\xi} \mp \pi i e^{-\xi}$$

selon que $-\xi$ est considéré comme appartenant au bord supérieur ou inférieur de la coupure. Ici j'ai adopté la notation de M. Nielsen[1]

[1]) Loc. cit. § 1.

$$li_1 e^{\xi} = -v.p.\int_{-\xi}^{\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{t}.$$

Dans ce qui suit nous aurons surtout besoin de la propriété suivante de $J(z)$:

La fonction $J(z)$ reste finie dans tout le plan, sauf pour $z = 0$, et elle admet le développement asymptotique

$$J(z) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(-1)^n\, n!}{z^{n+1}} + R_p \tag{6}$$

où

$$|R_p| < \frac{p!\,(p+2)\,e}{|z|^{p+1}}. \tag{7}$$

En effet, l'identité

$$\frac{1}{t+\frac{z}{y}} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(-1)^n y^{n+1}}{z^{n+1}} t^n + (-1)^p \frac{y^p}{z^p} \frac{t^p}{t+\frac{z}{y}}$$

nous donne précisément ce développement avec

$$R_p = (-1)^p \frac{y^p}{z^p} \int_0^{\infty} \frac{t^p e^{-ty}\,dt}{t+\frac{z}{y}}.$$

Soit maintenant

$$\begin{cases} z = re^{iv} \\ y = \varrho e^{i\theta} \end{cases}$$

où $\cos\theta > 0$. Pour $R(z) \geqq 0$ cela suffit, mais si $R(z) < 0$, il faut encore supposer:

$$\begin{cases} \theta > -(\pi - v) \text{ pour } \frac{\pi}{2} < v \leqq \pi \\ \theta < \pi + v \quad\quad \text{»} \quad -\pi \leqq v < -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Il s'ensuit

$$\left|t + \frac{z}{y}\right|^2 = t^2 + 2\frac{r}{\varrho} t \cos(v - \theta) + \frac{r^2}{\varrho^2} \geqq \frac{r^2}{\varrho^2} \sin^2(v - \theta)$$

et par conséquent

$$|R_p| < \frac{\varrho^p}{r^p}\frac{\varrho}{r\,|\sin(v-\theta)|}\frac{\lfloor\!\underline{p}}{\varrho^{p+1}\cos^{p+1}\theta} = \frac{\lfloor\!\underline{p}}{r^{p+1}\cos^{p+1}\theta\,|\sin(v-\theta)|}.$$

En désignant par β l'angle positif $< \frac{\pi}{2}$, dont le sinus est égal à $\frac{1}{\sqrt{p+2}}$, la fonction $\sin u \cos^{p+1} u$ aura pour $u = \beta$ son maximum $= \frac{1}{\sqrt{p+2}}\left(\frac{p+1}{p+2}\right)^{\frac{p+1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{(p+2)e}}$. et en faisant

$$\left|\begin{array}{lll} \theta = -\beta & \text{pour } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} & \text{et } -\pi \leq v < -\frac{\pi}{2} \\ \theta = \beta & \quad \text{»} \; -\frac{\pi}{2} \leq v < 0 & \text{»} \quad \frac{\pi}{2} < v \leq \pi \end{array}\right.$$

on aura toujours

$$\cos\theta > 0,\ |\sin(v-\theta)|\cos^{p+1}\theta \geq \sin\beta\cos^{p+1}\beta$$

d'où enfin

$$|R_p| < \frac{\lfloor\!\underline{p}\sqrt{(p+2)e}}{|z|^{p+1}}.$$

C. q. f. d.

Le résultat trouvé tout à l'heure nous permet d'établir des formules asymptotiques analogues pour les fonctions

$$\Omega(z) = J(z) + J(-z)^{1} \tag{8}$$

et $\sum_{m=1}^{r}\Omega(2m\pi z)$, dont nous aurons besoin plus tard. On trouve en effet sans la moindre difficulté

$$\Omega(z) = -2\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\lfloor\!\underline{2\mu-1}}{z^{2\mu}} + S_p(z),\ |S_p(z)| < \frac{2\lfloor\!\underline{2p}\sqrt{2(p+1)e}}{|z|^{2p+1}} \tag{9}$$

et finalement

[1] Il sera bon d'observer les formules suivantes

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\eta=0}\Omega(\xi + i\eta) = -[e^{\xi}li\,e^{-\xi} + e^{-\xi}li_1\,e^{\xi}] \pm \pi i e^{-\xi} \\ \lim\limits_{\eta=0}\Omega(-\xi + i\eta) = -[e^{\xi}li\,e^{-\xi} + e^{-\xi}li_1\,e^{\xi}] \mp \pi i e^{-\xi} \end{array}\right\}(\xi > 0,\ \eta \gtrless 0)$$

$$\Omega(\pm\alpha i) = -2(\sin\alpha\,\mathrm{si}\,\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{ci}\,\alpha),\ (\alpha > 0).$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\Omega(2m\pi z) = -\sum_{\mu=1}^{p}\frac{2\zeta(2\mu)\underline{|2\mu-1}}{(2\pi z)^{2\mu}} + \sum_{m=1}^{\infty}S_p(2m\pi z) = -\sum_{\mu=1}^{p}\frac{B_\mu}{2\mu z^{2\mu}} + T_p(z)\\ |T_p(z)| < \frac{2\underline{|2p}\sqrt{2(p+1)}\,e\,\zeta(2p+1)}{(2\pi|z|)^{2p+1}}\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

§ 3. *La relation entre φ et Ω. Application à $L(z)$.*

Il nous reste à montrer comment la fonction φ de la formule (A) s'exprime à l'aide de Ω. En nous servant du développement connu

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right)$$

nous pouvons écrire

$$\varphi(z) = \log z + \gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n(z^2+n^2)} = \log z + \gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{i}{2}\frac{1}{z+in} + \frac{i}{2}\frac{1}{z-in}\right). \qquad (11)$$

D'autre part nous avons

$$\frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} = -\frac{\pi i}{2} + \frac{i}{2z} + \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+in} + \frac{1}{z-in}\right)$$

d'où

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}\varphi(z) + \frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} &= \log z + \gamma - \frac{\pi i}{2} + \frac{i}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-iz}\right)\\ &= \log z - \frac{\pi i}{2} - \frac{i}{2z} - \frac{\Gamma'(-iz)}{\Gamma(-iz)}\\ \varphi(z) - \frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} &= \log z + \gamma + \frac{\pi i}{2} - \frac{i}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+iz}\right) =\\ &= \log z + \frac{\pi i}{2} + \frac{i}{2z} - \frac{\Gamma'(iz)}{\Gamma(iz)}.\end{aligned}\right.$$

Les équations (12) se prêtent bien à l'application de la formule suivante,[1] valable pour $R(u) > 0$

[1] Lindelöf: Calcul des résidus (Paris 1905), pag. 87 et suiv.

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} = \log u - \frac{1}{2u} - \psi(u), \quad \psi(u) = \int_0^\infty \frac{2v}{v^2+u^2}\frac{dv}{e^{2\pi v}-1}.$$

On en tire

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} + \psi(-iz) \text{ pour } R\left(\frac{z}{i}\right) > 0 \\ \varphi(z) &= +\frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} + \psi(iz) \quad \text{»} \quad R\left(\frac{z}{i}\right) < 0 \end{aligned}\right| \tag{13}$$

ce qu'on pourrait voir d'ailleurs d'une formule[1] établie par M. Lindelöf d'une manière différente. En écrivant maintenant

$$\psi(iz) = \psi(-iz) = \int_0^\infty \frac{2v}{v^2-z^2}\frac{dv}{e^{2\pi v}-1}$$

l'intégrale certes n'a pas de sens pour les valeurs réelles de z, mais dans (13) la fonction ψ s'approche évidemment d'une valeur finie et déterminée, quand z devient réelle. Du reste on aura pour $R\left(\frac{z}{i}\right) \neq 0$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2\pi m v}dv}{v \pm z} = J(\pm 2m\pi z), \quad \int_0^\infty \frac{2v}{v^2-z^2}e^{-2\pi m v}dv = \Omega(2\pi m z)$$

ce qui nous donne

$$\psi(iz) = \psi(-iz) = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega(2m\pi z)$$

et par suite la relation cherchée entre φ et Ω

$$\varphi(z) = \mp \frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \Omega(2m\pi z), \quad \left(R\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0\right). \tag{14}$$

A l'aide de cette formule importante le développement (A) prendra une forme nouvelle. Car on a d'après (10)

---

[1] Loc. cit., n:o 10, p. 92.

$$\frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Omega\left(\frac{4\pi^2 mn}{z}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{p}\frac{B_\mu z^{2\mu-1}}{\mu(2\pi n)^{2\mu}}+\frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}T_p\left(\frac{2\pi n}{z}\right)=-\sum_{\mu=1}^{p}\frac{B_\mu^2 z^{2\mu-1}}{2\mu\,|\underline{2\mu}}+\Theta_p$$

où

$$|\Theta_p|<\frac{4|\underline{2p}\sqrt{2}(p+1)e\zeta^2(2p+1)}{(2\pi)^{4p+2}}|z|^{2p} \tag{15}$$

et par là le résultat final

$$L(z)=\frac{\gamma-\log z}{z}+\frac{1}{4}\mp\frac{2\pi i}{z}L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)-\sum_{\mu=1}^{p}\frac{B_\mu^2 z^{2\mu-1}}{2\mu\,|\underline{2\mu}}+\Theta_p,\quad \left(R\left(\frac{z}{i}\right)\gtrless 0\right). \tag{B}$$

C'est l'équation fonctionnelle asymptotique de $L(z)$ que j'avais signalé dans l'introduction.

Avant de terminer ce paragraphe je voudrais dire un mot sur deux formules concernant la fonction $L(z)$, dont il est question dans l'ouvrage de M. G. Torelli: *Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato* (*Napoli 1901*). Ces formules, qu'on retrouve pag. 188, s'écrivent en employant la variable z comme il suit

$$\begin{cases} L(z)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^z-1}+\dfrac{1}{z}\log\dfrac{1}{1-e^{-z}}+2\displaystyle\int_0^\infty\dfrac{e^{-z}\sin zt}{1-2e^{-z}\cos zt+e^{-2z}}\cdot\dfrac{dt}{e^{2\pi t}-1} \\[2ex] L(z)=\dfrac{\gamma-\log z}{z}+\dfrac{1}{4}+\displaystyle\int_0^\infty\left(\cot\dfrac{zt}{2}-\dfrac{2}{zt}\right)\dfrac{dt}{e^{2\pi t}-1}. \end{cases}$$

La première de ces deux formules est vraie, mais seulement pour les valeurs réelles (et positives) de z, ce qui ne doit pas étonner du reste, la variable z ne pouvant pas quitter le domaine réel sans traverser une infinité de lignes singulières de l'intégrale, à savoir les cercles

$$\xi^2+\eta^2\pm 2k\pi\eta=0 \qquad (z=\xi+i\eta,\ k=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Dans la seconde équation, au contraire, l'intégrale n'a un sens que pour les valeurs de z situées hors de l'axe réel, mais dans ce cas *l'équation n'est pas exacte.* Supposons en effet que z ne soit pas réelle, et posons $z=re^{iv}$. On trouve alors

$$\int_0^\infty \left(\cot\frac{zt}{2} - \frac{2}{zt}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} = \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=1}^{p} \frac{4zt}{z^2t^2 - 4\pi^2 n^2} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2} \right\} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$$

et de plus (cf. pag. 208)

$$\int_0^\infty \frac{4zt}{z^2t^2 - 4\pi^2n^2}\cdot\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{2}{z}\int_0^\infty \frac{1}{t^2 - \frac{4\pi^2n^2}{z^2}}\cdot\frac{2tdt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{2}{z}\,\psi\left(\frac{2\pi n i}{z}\right)$$

d'où

$$\int_0^\infty \left(\cot\frac{zt}{2} - \frac{2}{zt}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{2}{z}\sum_{n=1}^{p}\psi\left(\frac{2\pi n i}{z}\right) + \int_0^\infty \left(\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Or, on a

$$\left|\frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2}\right| < \frac{rt}{n^2\,.\,\pi^2\sin^2 v}$$

de sorte que

$$\left|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2}\right| < \frac{rt}{\pi^2\sin^2 v}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \frac{rt}{\pi^2\sin^2 v\,.\,p}$$

et par suite

$$\left|\int_0^\infty \left(\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\right| < \frac{r}{\pi^2\sin^2 v\,.\,p}\int_0^\infty\frac{tdt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{r}{24\pi^2\sin^2 v}\cdot\frac{1}{p}$$

donc, en faisant $p = \infty$

$$\int_0^\infty \left(\cot\frac{zt}{2} - \frac{2}{zt}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\psi\left(\frac{2\pi n i}{z}\right) = \frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Omega\left(\frac{4\pi^2 mn}{z}\right) =$$

$$= L(z) - \frac{\gamma - \log z}{z} - \frac{1}{4} \pm \frac{2\pi i}{z} L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) \qquad \left(R\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0\right).$$

Il faut donc, pour rendre exacte l'équation en question, ajouter au membre droit le terme fonctionnel $\mp \frac{2\pi i}{z} L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)$.

Seconde partie.

Application de L(z) à la théorie des nombres.

§ 1. *Calcul de la partie réelle de l'intégrale* $\int\limits_a^{a+i\infty} \frac{e^{xz}dz}{z^{n+1}}$.

Il ne sera pas sans intérêt d'examiner l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}L(z)dz}{z^{k+1}}, \quad (a > 0,\ x \geqq 1)$$

en faisant usage de l'équation fonctionnelle de $L(z)$ trouvée auparavant. Comme il est bien connu, la valeur de cette intégrale n'est autre chose que la fonction arithmétique

$$\frac{1}{\lfloor k}\sum_{n<x} \tau(n)(x-n)^k$$

et on en obtient de cette manière une représentation asymptotique, dont nous allons nous occuper dans ce qui suit.

Quant à cela, il ne nous suffit plus de connaître l'intégrale

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}dz}{z^{n+1}} = \frac{2\pi i x^n}{\lfloor n}$$

mais le signe double dans la formule (B) nécessite encore le calcul de

$$\left(\int\limits_a^{a+i\infty} - \int\limits_{a-i\infty}^{a}\right)\frac{e^{xz}dz}{z^{n+1}}$$

c'est-à-dire la partie *réelle* (multipliée par 2) de l'intégrale $\int\limits_a^{a+i\infty} \frac{e^{xz}dz}{z^{n+1}}$. Faisons ce calcul. En partant de la formule[1]

[1] Nielsen: § 10.

$$\int_0^\infty \frac{e^{ixt}\,dt}{a+it} = \pi e^{-ax} + i e^{-ax} li_1 e^{ax}$$

on trouvë en dérivant n fois par rapport à a

$$(-1)^n \lfloor n \int_0^\infty \frac{e^{ixt}dt}{(a+it)^{n+1}} = (-1)^n \pi x^n e^{-ax} + i x^n \left[\frac{d^n}{dv^n} e^{-v} li_1 e^v\right]^{v=ax}.$$

Or, nous avons

$$\frac{d^n}{dv^n} e^{-v} li_1 e^v = (-1)^n \left(e^{-v} li_1 e^v - \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\lfloor \mu}{v^{\mu+1}} \right)$$

de sorte que

$$\int_0^\infty \frac{e^{ixt}dt}{(a+it)^{n+1}} = \frac{x^n}{\lfloor n} \left\{ \pi e^{-ax} + i \left(e^{-ax} li_1 e^{ax} - \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\lfloor \mu}{(ax)^{\mu+1}} \right) \right\}$$

et pour $z = a + it$

$$\int_a^{a+i\infty} \frac{e^{xz}dz}{z^{n+1}} = \frac{x^n}{\lfloor n} \left\{ e^{ax} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\lfloor \mu}{(ax)^{\mu+1}} - li_1 e^{ax} + \pi i \right\}. \tag{16}$$

On en tire finalement

$$\left(\int_a^{a+i\infty} - \int_{a-i\infty}^{a} \right) \frac{e^{xz}dz}{z^{n+1}} = 2 \frac{x^n}{\lfloor n} \left(e^{ax} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\lfloor \mu}{(ax)^{\mu+1}} - li_1 e^{ax} \right). \tag{17}$$

§ 2. *Représentation asymptotique de*

$$\frac{1}{\lfloor k} \sum_{n \leq x} \tau(n)(x-n)^k.$$

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour le calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz} L(z) dz}{z^{k+1}}.$$

En observant que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}\log z\,dz}{z^{k+1}}=\frac{x^k}{\underline{|k}}\left\{\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\log x\right\}$$

on obtient pour $p \leqq \frac{k+1}{2}$

$$\frac{1}{\underline{|k}}\sum_{n\leqq x}\tau(n)(x-n)^k=\frac{x^{k+1}}{\underline{|k+1}}\left\{\log x+\gamma-\frac{\Gamma'(k+2)}{\Gamma(k+2)}\right\}+\frac{1}{4}\frac{x^k}{\underline{|k}}-\sum_{\nu=1}^{p}\frac{B_\nu^2}{2\nu\underline{|2\nu}}\frac{x^{k+1-2\nu}}{\underline{|k+1-2\nu}}-$$

$$-\left(\int_a^{a+i\infty}-\int_{a-i\infty}^{a}\right)\frac{e^{xz}}{z^{k+2}}L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}\Theta_p dz}{z^{k+1}}. \quad (18)$$

Comme $|\Theta_p|<H_p|z|^{2p}$, où H_p ne dépend pas de z, il s'ensuit

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}\Theta_p dz}{z^{k+1}}\right|<\frac{H_p e^{ax}}{2\pi a^{k-2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{k+1}{2}-p}}.$$

Donc, en posant

$$a=\frac{1}{x},\quad p=\begin{cases}\frac{k}{2}-1 & \text{pour } k \text{ pair}\\ \frac{k-1}{2} & \text{» } k \text{ impair}\end{cases}$$

on voit que la valeur de l'intégrale sera, en sens absolu, inférieure à $\frac{H_{\frac{k}{2}-1}e}{\pi}x^2$ ou $\frac{H_{\frac{k-1}{2}}e}{2}x$, selon que k est pair ou impair. Il faut pourtant supposer $k\geqq 3$, puisque le nombre p doit être >0.

Celà étant, passons à l'intégrale

$$\left(\int_a^{a+i\infty}-\int_{a-i\infty}^{a}\right)\frac{e^{xz}}{z^{k+2}}L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)dz.$$

Par une démonstration identique à celle, dont je me suis servi à une autre occasion,[1] on trouve d'abord pour $k\geqq 4$

[1] Acta Mathematica: T. 37, § 4.

$$\left(\int_a^{a+i\infty}-\int_{a-i\infty}^{a}\right)\frac{e^{xz}}{z^{k+2}}L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left(\int_a^{a+i\infty}-\int_{a-i\infty}^{a}\right)\frac{e^{xz-\frac{4\pi^2 n}{z}}}{z^{k+2}}dz=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}}(4\pi^2 n)^\nu\left(\int_a^{a+i\infty}-\int_{a-i\infty}^{a}\right)\frac{e^{xz}dz}{z^{k+\nu+2}}=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}}(4\pi^2 n)^\nu\frac{x^{k+\nu+1}}{\underline{|k+\nu+1}}\left(e^{ax}\sum_{\mu=0}^{k+\nu}\frac{\underline{|\mu}}{(ax)^{\mu+1}}-li_1\, e^{ax}\right). \qquad (19)$$

Après avoir fait $a=\frac{1}{x}$, on aura un résultat valable encore pour $k\geqq 1$,[1] bien que pour $k<3$ on ne sache rien de l'ordre de grandeur du terme-reste.

La série de (19) devient pour $a=\frac{1}{x}$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(4\pi^2 n)^\nu x^{k+\nu+1}}{\underline{|\nu}\,\underline{|k+\nu+1}}(e A_{k+\nu+1}-li_1 e)$$

en posant pour abréger

$$A_n=\sum_{\mu=0}^{n-1}\underline{|\mu} \qquad (20)$$

et cela peut encore s'écrire

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left\{\frac{e}{(4\pi^2 n)^{k+1}}\psi_{k+1}(4\pi^2 nx)-li_1\, e\left(\frac{x}{4\pi^2 n}\right)^{\frac{k+1}{2}}I_{k+1}(4\pi\sqrt{nx})\right\}$$

où

$$\psi_k(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu A_{k+\nu}}{\underline{|\nu}\,\underline{|k+\nu}}x^{k+\nu} \qquad (21)$$

$I_k(x)$ étant la fonction de Bessel[2]

$$I_k(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}\,\underline{|k+\nu}}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\nu}. \qquad (22)$$

[1] Voir l'appendice.

[2] Pour ce qui concerne les fonctions de Bessel et de Neumann, on consultera p. ex. le grand traité de M. Nielsen: Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen (Leipzig 1904).

En écrivant

$$x^{\frac{k}{2}} I_k(2\sqrt{x}) = \varphi_k(x)$$

la fonction φ_k satisfait à l'équation différentielle:

$$x\varphi''_k - (k-1)\varphi'_k + \varphi_k = 0.$$

Quant à ψ_k, on vérifie sans peine en observant la relation $A_{n+1} = A_n + \underline{|n}$ qu'elle est une intégrale de l'équation non homogène

$$x\psi''_k - (k-1)\psi'_k + \psi_k = -x^k e^{-x}.$$

Cela nous détermine à introduire une nouvelle fonction $\bar{I}_k$ par la définition

$$x^{\frac{k}{2}} \bar{I}_k(2\sqrt{x}) = \psi_k(x) \tag{23}$$

d'où

$$\bar{I}_k(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu A_{k+\nu}}{\underline{|\nu}\,\underline{|k+\nu}} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\nu}. \tag{24}$$

La fonction $\bar{I}_k$ satisfait alors à *l'équation de* Bessel *à membre droit différent de zéro,* savoir

$$x^2 \bar{I}''_k + x\bar{I}'_k + (x^2 - k^2)\bar{I}_k = -\frac{x^{k+2}}{2^k} e^{-\frac{x^2}{4}} = xf(x). \tag{25}$$

Par conséquent elle peut s'exprimer à l'aide des deux intégrales fondamentales de l'équation homogène, I_k et Y_k, en désignant avec M. Nielsen par Y_k la fonction dite de Neumann

$$Y_k(x) = \frac{2}{\pi} I_k(x) \log\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}\,\underline{|k+\nu}} \left[\frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\right] \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\nu} + \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\underline{|k-\nu-1}}{\underline{|\nu}} \left(\frac{2}{x}\right)^{k-2\nu} \right\}. \tag{26}$$

Le déterminant $I_k Y'_k - I'_k Y_k$ étant nécessairement de la forme $\frac{c}{x}$, on trouve immédiatemant la valeur de $c = \frac{2}{\pi}$, ce qui nous fait voir que la fonction $\bar{I}_k$ doit être de la forme

$$I_k = B I_k + B' Y_k + \frac{\pi}{2}\left(Y_k \int_0^x I_k f\,dx - I_k \int_0^x Y_k f\,dx \right). \tag{27}$$

D'ailleurs la constante B' ne peut être que zéro, parce que Y_k devient infinie pour $x = 0$, tandis que $\bar{I}_k(0) = 0$. L'intégrale $\int_0^x I_k f\,dx$ est divisible par x^{2k+2}; on a donc:

$$\lim_{x=0} Y_k x^{-k} \int_0^x I_k f\,dx = 0.$$

D'autre part la valeur de $I_k x^{-k}$ pour $x = 0$ est égale à $\frac{1}{2^k \underline{|k}}$, d'où nous voyons que l'on a aussi

$$\lim_{x=0} I_k x^{-k} \int_0^x Y_k f\,dx = 0.$$

Il en résulte:

$$\lim_{x=0} \bar{I}_k x^{-k} = \frac{A_k}{2^k \underline{|k}} = \frac{B}{2^k \underline{|k}}$$

c'est-à-dire:

$$B = A_k = \sum_{\mu=0}^{k-1} \underline{|\mu}. \tag{28}$$

Il suffit maintenant de se rappeler la propriété importante des fonctions I_k et Y_k, la valeur de x étant grande et positive, savoir

$$I_k(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad Y_k(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

pour reconnaître que les intégrales $\int_0^x I_k f\,dx$ et $\int_0^x Y_k f\,dx$ sont bornées et que la fonction $\bar{I}_k$ est par conséquent aussi $= O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Nous sommes ainsi parvenus au résultat final

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\lfloor k}\sum_{n<x}\tau(n)(x-n)^k &= \frac{x^{k+1}}{\lfloor k+1}\left\{\log x+\gamma-\frac{\Gamma'(k+2)}{\Gamma(k+2)}\right\}+\frac{1}{4}\frac{x^k}{\lfloor k}-\sum_{\nu<\frac{k-1}{2}}\frac{B_\nu^2}{2\nu\lfloor 2\nu}\frac{x^{k+1-2\nu}}{\lfloor k+1-2\nu}+\\ &+2x^{\frac{k+1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+1}{2}}}\{li_1 e I_{k+1}(4\pi\sqrt{nx})-e I_{k+1}(4\pi\sqrt{nx})\}+r_k(x)\end{aligned}\right\} \quad (C)$$

où la série infinie $= O\left(x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\right)$ pour $k \geq 1$. Quant à $r_k(x)$, on n'en sait rien dans le cas où $k<3$, mais pour $k \geq 3$ nous avons vu que $r_k(x)=O(x^2)$ ou $O(x)$, selon que k est pair ou impair.

Appendice.

Il faut dire encore quelques mots pour expliquer comment on parvient jusqu'à la valeur 3 de la constante k. En effet, dans la série infinie de (C), laquelle s'écrit aussi sous la forme: $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}\{li_1 e\varphi_{k+1}(4\pi^2 nx)-e\psi_{k+1}(4\pi^2 nx)\}$ on peut abaisser le nombre k de 4 jusqu'à 1, la convergence restant toujours uniforme et absolue. Or, on a: $\varphi'_{k+1}(x)=\varphi_k(x)$, $\psi'_{k+1}(x)=\psi_k(x)+x^k e^{-x}$ de sorte que la dérivation donne naissance, outre la série correspondant à k, à un terme: $-2ex^k L(4\pi^2 x)$, qui s'annule pour $x=\infty$, puisque $L(x)<\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$. D'autre part on trouve, en désignant par $\overline{\Theta}_1$ et $\overline{\overline{\Theta}}_1$ les valeurs de Θ_1 pour $R\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$, à cause de la convergence uniforme et absolue des intégrales

$$2\pi i\frac{d}{dx}r_4(x)=\frac{d}{dx}\lim_{\tau=\infty}\left\{\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}+i\tau}\frac{e^{xz}\Theta_1 dz}{z^5}+\int_{\frac{1}{x}-i\tau}^{\frac{1}{x}}\frac{e^{xz}\Theta_1 dz}{z^5}\right\}=$$

$$=\lim_{\tau=\infty}\left\{\int_{\frac{1}{x}-i\tau}^{\frac{1}{x}+i\tau}\frac{e^{xz}\Theta_1 dz}{z^4}-\frac{1}{x^2}\left[\frac{e^{1+ix\tau}\overline{\Theta}_1\left(\frac{1}{x}+i\tau\right)}{\left(\frac{1}{x}+i\tau\right)^5}-ex^5\overline{\Theta}_1\left(\frac{1}{x}\right)+ex^5\overline{\overline{\Theta}}_1\left(\frac{1}{x}\right)+\right.\right.$$

$$- \frac{e^{1-ix\tau}\bar{\bar{\Theta}}_1\left(\frac{1}{x} - i\tau\right)}{\left(\frac{1}{x} - i\tau\right)^5}\Bigg]\Bigg\} = \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \frac{e^{xz}\Theta_1 dz}{z^4} + e x^3\left[\bar{\Theta}_1\left(\frac{1}{x}\right) - \bar{\bar{\Theta}}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right] = O(x).$$

Stockholm, Novembre 1914.

UNTERSUCHUNGEN ZUR THEORIE DER FOLGEN ANALYTISCHER FUNKTIONEN.

VON

ROBERT JENTZSCH

in BERLIN.

Einleitung.

Betrachtet man die Abschnitte $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, der Reihe: $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, deren Konvergenzkreis $|x| = 1$ ist, so bemerkt man, dass jede Einheitswurzel ausser 1 Nullstelle eines Abschnittes $P_n(x)$ ist, so dass die Menge M der Nullstellen aller Polynome $P_n(x)$ auf dem Kreise $|x| = 1$ überall dicht liegt, jeder Punkt des Konvergenzkreises also Häufungsstelle von Nullstellen der Abschnitte ist. Sei nun eine Potenzreihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

mit dem endlichen Konvergenzradius R vorgelegt, so fragt es sich, ob eine ähnliche Beziehung zwischen dem Konvergenzkreis $|x| = R$ dieser Reihe und den Nullstellen ihrer Abschnitte $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ bestehe, wie bei der betrachteten speziellen Reihe. Diese Frage wird im Folgenden bejahend beantwortet, d. h. es gilt folgender Satz:

Jeder Punkt des Konvergenzkreises einer Potenzreihe ist Häufungspunkt für Nullstellen ihrer Abschnitte.

Betrachtet man also die Menge M der Nullstellen aller Abschnitte der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$ und bildet die Menge M' ihrer Häufungspunkte, so gehören zu M':

1. alle Nullstellen der durch die Reihe dargestellten analytischen Funktion, soweit sie im Innern des Konvergenzkreises liegen, und innerhalb desselben liegen auch keine anderen Punkte von M';

2. die ganze Peripherie des Konvergenzkreises.

Das erstere ist bekannt und ganz einfach einzusehen,[1] das zweite ist bisher

[1] Vgl. HURWITZ, Über die Nullstellen der Besselschen Funktion. Math. Ann. Bd. 33. 1889.

nur in dem einfachen Falle, dass alle Koeffizienten a_ν reell und positiv sind und der Bedingung $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$ genügen, unter Benutzung eines algebraischen Satzes von Kakeya von den Herren Lindwart und Pólya[1] bewiesen worden. Die Tatsache, dass mindestens ein Punkt des Konvergenzkreises zu M' gehört, hat Herr F. Lukács unlängst bemerkt.[2]

Der Satz von Hurwitz ist eine Folge der gleichmässigen Konvergenz der Potenzreihe in jedem im Innern des Konvergenzkreises gelegenen Gebiete. Sei zunächst x_0 eine ν-fache Nullstelle der durch die Potenzreihe dargestellten Funktion $f(x)$ und $|x_0| < R$, so lässt sich um x_0 ein kleiner Kreis C: $|x - x_0| \leqq \varrho$ abgrenzen, der ganz innerhalb des Konvergenzkreises liegt, sodass weder in ihm noch auf ihm $f(x)$ eine weitere Nullstelle hat. Die von o verschiedene untere Grenze von $|f(x)|$ auf der Peripherie dieses Kreises sei ε. Dann ist:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \nu.$$

In C sei $|f(x)| < M$, $|f'(x)| < M$. Es lässt sich dann für jedes noch so kleines $\delta < \varrho\frac{M}{3}$ ein Index n_0 so bestimmen, dass für $n \geqq n_0$:

$$|P_n(x)| > \frac{2\varepsilon}{\varrho M}\delta$$

für $|x - x_0| = \varrho$, ebenso innerhalb und auf C:

$$|P'_n(x) - f'(x)| < \left(\frac{\varepsilon\delta}{\varrho M}\right)^2$$

$$|P_n(x) - f(x)| < \left(\frac{\varepsilon\delta}{\varrho M}\right)^2.$$

Dann ist:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)}\right] dx\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{(P'_n(x) - f'(x))f(x) + (f(x) - P_n(x))f'(x)}{P_n(x)\,f(x)} dx\right| <$$

$$< \frac{1}{2\pi} M \frac{2\left(\frac{\varepsilon\delta}{\varrho M}\right)^2}{\varepsilon\frac{\varepsilon\delta}{\varrho M}2} 2\pi\varrho = \delta,$$

[1] Rendiconti di Palermo. T. 37. S. u.

[2] Über eine Eigenschaft des Konvergenzkreises einer Potenzreihe. Archiv d. Math. u. Phys. 1914.

sodass von einem bestimmten n ab $\int\limits_C \frac{P'_n(x)}{P_n(x)} dx = 2\pi i \nu$ ist, d. h. P_n in C ν Nullstellen besitzt. Damit ist bewiesen, dass jede Nullstelle von $f(x)$ Häufungsstelle von Nullstellen aller Abschnitte mit genügend hohem Index ist, wobei auch die Vielfachheit der Nullstellen berücksichtigt werden kann.[1]

Ist umgekehrt für unendlich viele Abschnitte $P_{n_1}(x_1) = P_{n_2}(x_2) = \cdots\cdots = 0$, $n_1 < n_2 < \cdots$, und $\lim\limits_{\nu = \infty} x_\nu = x_0$ im Innern des Konvergenzkreises gelegen, so ist $f(x_0) = 0$; denn wäre $|f(x_0)| = \varepsilon > 0$, so liesse sich um x_0 ein Kreis $|x - x_0| \leqq \varrho$ abgrenzen, in welchem $|f(x) - f(x_0)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ wäre, ferner ein Index n_0 so bestimmen, dass $|f(x) - P_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ wäre für $n \geqq n_0$, $|x - x_0| \leqq \varrho$, also:

$$|P_n(x)| = |P_n(x) - f(x) + f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \geqq \frac{\varepsilon}{3} > 0$$

wäre in dem Kreise $|x - x_0| \leqq \varrho$, was dem Vorhandensein unendlich vieler Abschnitte mit Nullstellen in dem betrachteten Kreise widerspricht. —

Der neue Satz enthält (bei weitem) alle bisher in dieser Hinsicht über die Abschnitte von Potenzreihen ausgesprochenen Sätze; er steht aber auch in Beziehung zu den allgemeineren Untersuchungen, die die Herren Montel,[2] Severini,[3] Carathéodory und Landau[4] über Folgen eindeutiger analytischer Funktionen überhaupt angestellt haben. Es gilt nämlich darnach folgender Satz:[5]

Wenn eine Folge eindeutiger analytischer Funktionen, die sämtlich für $|x| < R$ regulär und, in dem Kreise $|x| < R$ von 0 und 1 verschieden sind, in unendlich vielen Punkten dieses Kreises mit einem Häufungspunkt im Innern desselben konvergiert, so konvergiert diese Folge im Innern des Kreises $|x| = R$ überall, und zwar in jedem kleineren Kreise $|x| \leqq R - \varepsilon$ gleichmässig.

Wendet man diesen Satz auf die Abschnitte der Potenzreihen an, so lässt sich leicht folgern, dass die Menge der Nullstellen und der Einsstellen der Abschnitte zusammengenommen die ganze Peripherie des Konvergenzkreises ausfüllen, während hier dasselbe von der Menge der Nullstellen allein bewiesen werden wird.

[1] Vgl. auch unten Kap. II § 3 Ende.

[2] Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe. Paris 1910. Sur les points irréguliers des séries convergentes de fonctions analytiques. C. R., Paris, T. 145, p. 910—913. 1907.

[3] Sulle successioni infinite di funzioni analitiche. Atti del IV° Congresso. Roma, T. 2, p. 183—193. 1909.

[4] Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen. S. B. Berlin 1911, p. 587—613.

[5] Carathéodory u. Landau, l. c. p. 598—600.

In dem allgemeineren Falle, bei Polynomreihen etwa, gilt jedoch der analoge Satz schon nicht mehr; es kann vorkommen, dass auf dem Rande des Gebietes gleichmässiger Konvergenz[1] einer Polynomfolge kein Häufungspunkt der 0-Stellen der Polynome liegt; ein einfaches Beispiel hierfür s. u.; — dass die Häufungspunkte der 0- und 1-Stellen der Polynome zusammengenommen ihn bedecken, erscheint daher als das beste in dieser Richtung zu erzielende Resultat. Nur einige spezielle, aber besonders wichtige, Klassen von Reihen haben die in Rede stehende Eigenschaft mit den Potenzreihen gemein.

Vielmehr ist hier folgende Erwägung anzustellen. Es sei:

$$f_\nu(x) = a_{0\nu} + a_{1\nu}x + \cdots + a_{n\nu}x^n + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Entwickelung von $f_\nu(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes, und $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(x) = f(x)$ in dem (notwendig einfach zusammenhängenden) Gebiete gleichmässiger Konvergenz G, das den Nullpunkt enthält. $|x| = R$ sei der grösste Kreis um 0, der noch in G liegt. (Genauere Bestimmung s. u.) Dann kann man unendlich viele Polynomfolgen aus der Folge f_ν herausholen, indem man etwa setzt:

$$f_\nu^\varkappa(x) = a_{0\nu} + a_{1\nu}x + \cdots + a_{\varkappa\nu}x^\varkappa$$

und die Polynomfolge $f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha}(x)$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$, $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$; $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \cdots$ betrachtet; für diese ist dann zunächst ebenfalls:

$$\lim_{\alpha=\infty} f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha}(x) = f(x) \qquad \text{in } G.$$

Man findet nun folgenden allgemeinen Satz:

Jeder Punkt des Kreises $|x| = R$ ist Häufungspunkt für die Nullstellen einer Polynomfolge der beschriebenen Art, und auch unendlich vieler; oder es gibt eine (und also auch unendlich viele) Polynomfolgen der beschriebenen Art, für die alle Punkte von $|x| = R$ Häufungspunkte der Nullstellen sind.

Sucht man also für jede derartige Polynomfolge $(\nu, \varkappa)$ die Häufungspunkte ihrer Nullstellen, so gehören zu ihnen, wenn alle möglichen Folgen $(\nu, \varkappa)$ in Betracht gezogen werden:

1. die Nullstellen von $f(x)$, die innerhalb $|x| = R$ liegen, und innerhalb dieses Kreises liegen keine anderen Häufungspunkte;

[1] Oder eines derselben.

2. die ganze Peripherie des Kreises $|x| = R$, des grössten um o möglichen, im Gebiete gleichmässiger Konvengenz gelegenen Kreises.

Die Begründung der beiden ausgesprochenen Sätze bildet den Hauptinhalt der folgenden Arbeit. Beim Beweise derselben spielt der Satz von VITALI[1] über Konvergenz von Funktionenfolgen die Hauptrolle; ich gebe daher in Kapitel I unter Benutzung einer bekannten, von Herrn Professor SCHWARZ angegebenen Ungleichheitsbedingung einen sehr einfachen Beweis für ihn an. Kapitel II handelt von den Abschnitten der Potenzreihen; es werden ausser dem erwähnten Hauptsatz (§ 1) einige, in gewisser Hinsicht schärfere Bedingungen für die Nullstellen der Abschnitte hergeleitet (§ 2, § 3), ferner Anwendungen auf spezielle Fälle gemacht (§ 2). In Kapitel III werden zunächst einige allgemeinere Klassen von Funktionenfolgen angegeben, für die der für Potenzreihen gültige Satz gleichfalls gilt (§ 1), dann folgen ganz allgemeine Bemerkungen über Funktionenfolgen und ihre gleichmässige Konvergenz; in § 3 beweise ich den Hauptsatz nebst einigen Zusätzen und Verschärfungen und gebe in § 4 einige Ausführungen über die Beziehung des Hauptsatzes zu einigen, neuerdings in Verallgemeinerung LAGUERRE'scher Untersuchungen von den Herren PÓLYA, LINDWART und mir aufgestellen Sätzen über Polynomfolgen.

ERSTES KAPITEL.

Der Satz von Vitali.

Herr VITALI hat folgenden Satz über Folgen analytischer Funktionen ausgesprochen und bewiesen:[2]

Ist $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... eine Folge eindeutiger analytischer Funktionen, die in einem, im Endlichen gelegenen, Gebiete G sämtlich regulär sind und dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gemeinsamen Schranke M liegen, konvergiert ferner die Folge in unendlich vielen Punkten dieses Gebietes mit einem im Innern

[1] Sopra le serie di funzione analitiche; Annali di Matematica (3), T. 10. — Herr E. LANDAU hat in seine vor Kurzem erschienene Schrift: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, den Beweis des Hauptsatzes über Potenzreihen aufgenommen, wobei er jedoch statt des VITALI'schen Satzes den HADAMARD'schen Dreikreisesatz heranzieht (vgl. l. c. S. 14 und S. 80—83).

[2] Siehe oben.

dieses Gebietes gelegenen Häufungspunkt, so konvergiert die Folge $f_\nu(x)$ in jedem, ganz im Innern von G gelegenen Gebiete G_1 gleichmässig gegen eine daselbst reguläre analytische Funktion $f(x)$.

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung dar eines zuerst von STIELTJES[1] aufgestellten, bei welchem die Konvergenz der Folge in einem beliebig kleinen Gebiete G_1 innerhalb G vorausgesetzt wird. Der in der Einleitung erwähnte Satz von CARATHÉODORY und LANDAU folgt aus dem Satz von VITALI unter Benutzung einer bei den elementaren Beweisen des PICARD'schen Satzes erhältlichen Abschätzung.

Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, G als Kreis vorauszusetzen und G_1 als kleineren, konzentrischen Kreis, und den Mittelpunkt als den Häufungspunkt der Konvergenzpunkte anzunehmen; denn man kann, wie bei der analytischen Fortsetzung, jedes Gebiet G_1 (bzw. G) durch endlich viele (bzw. abzählbar unendlich viele) Kreise erschöpfen, in denen die gleichmässige Konvergenz durch das für das Kreisgebiet bewiesene Theorem sichergestellt wird.

Wir setzen also speziell voraus:

1. $f_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ sind eindeutig und regulär für $|x| \leq R$;
2. $|f_\nu(x)| < M$ für $|x| \leq R$;
3. $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(x_\alpha)$ existiert für unendlich viele Punkte $x_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots)$, wobei

$|x_\alpha| \leq R$ und $\lim\limits_{\alpha=\infty} x_\alpha = 0$ ist, und beweisen dann:

$$\lim_{\nu=\infty} f_\nu(x) = f(x)$$

existiert gleichmässig für alle Punkte $|x| \leq R - \varepsilon (\varepsilon > 0)$, und $f(x)$ ist daher eine eindeutige reguläre Funktion dortselbst.

Für den Satz von VITALI sind schon recht einfache Beweise gegeben worden, von CARATHÉODORY und LANDAU[2] und neuestens von Herrn E. LINDELÖF;[3] um aber betreffs dieses für die folgende Arbeit fundamentalen Satzes nicht anders wohin verweisen zu müssen, sei es erlaubt, einen vielleicht noch kürzeren Beweis hier anzuführen.

Beweis. 1. Es sei:

$$f_\nu(x) = a_{0,\nu} + a_{1,\nu}x + a_{3,\nu}x^2 + \cdots \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \quad \text{für } |x| \leq R,$$

dann ist:

[1] Sur la théorie des fractions continues. Annales de Toulouse 1894.

[2] l. c. § 2.

[3] Bulletin de la société mathématique de France 1914.

$$|f_\nu(x) - f_\nu(0)| \leq |f_\nu(x)| + |f_\nu(0)| < 2M.$$

Nach einem Lemma von Herrn Professor SCHWARZ[1] ist daher, da $f_\nu(x) - f_\nu(0)$ für $x = 0$ verschwindet:

$$|f_\nu(x) - f_\nu(0)| \leq 2M\left|\frac{x}{R}\right| \text{ für } |x| \leq R.$$

Es ist mithin:

$$|f_n(0) - f_{n+m}(0)| \leq |f_n(0) - f_n(x_a)| + |f_n(x_a) - f_{n+m}(x_a)|$$

$$+ |f_{n+m}(x_a) - f_{n+m}(0)| < 4M\left|\frac{x_a}{R}\right| + |f_n(x_a) - f_{n+m}(x_a)|.$$

Da aber $\lim\limits_{a=\infty} x_a = 0$ ist und die Funktionenfolge für x_a konvergiert, so besagt diese Abschätzung schon, dass auch $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(0) = \lim\limits_{\nu=\infty} a_{0,\nu}$ existiert; wir setzen:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{0,\nu} = a_0.$$

2. Auch $\lim\limits_{\nu=\infty} f_{\nu,1}(x) = \lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{f_\nu(x) - a_{0,\nu}}{x}$ existiert für $x_a (x_a \neq 0)$, da nach 1. $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{0,\nu} = a_0$ existiert; es ist aber auch, wegen $|f_\nu(x)| < M$ für $|x| \leq R$:

$$|a_{n,\nu}| \leq \frac{M}{R^n},$$

also ist:

$$|f_{\nu,1}(x)| = |a_{1,\nu} + a_{2,\nu}x + \cdots| \leq \frac{M}{R}\left[1 + \frac{R-\varepsilon}{R} + \cdots\right] = \frac{M}{\varepsilon} \text{ für } |x| \leq R - \varepsilon;$$

mithin existiert nach demselben Schluss wie bei 1. auch $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{1,\nu} = a_1$.[2]

So fahren wir fort, Schritt vor Schritt, die beiden Schlussweisen abwechseln lassend, und finden die Existenz der limites:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{\varkappa,\nu} = a_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

Da $|a_{\varkappa,\nu}| \leq \dfrac{M}{R^\varkappa}$ ist, so ist auch $|a_\varkappa| \leq \dfrac{M}{R^\varkappa}$, die Reihe

[1] Gesammelte Abhandlungen. Bd. II, S. 109.

[2] Dieser zweite Schritt ist hier einem Punkte im Beweise des Herrn LINDELÖF ähnlich.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

stellt also eine für $|x| < R$ reguläre analytische Funktion dar.

3. Es ist endlich für $|x| < R - \varepsilon$:

$$|f(x) - f_\nu(x)| \leq |a_0 - a_{0,\nu} + \cdots + (a_m - a_{m,\nu})x^m| + \left|\sum_{m+1}^{\infty} a_\varkappa x^\varkappa\right| + \left|\sum_{m+1}^{\infty} a_{\varkappa,\nu} x^\varkappa\right|$$

oder:

$$|f(x) - f_\nu(x)| \leq \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} |a_\lambda - a_{\lambda,\nu}|\, |x|^\lambda + 2 \cdot \frac{M}{R^{m+1}} \cdot (R-\varepsilon)^{m+1} \cdot \frac{R}{\varepsilon}.$$

Aus dieser Abschätzung geht aber unmittelbar die gleichmässige Konvergenz von $\lim_{\nu=\infty} f_\nu(x)$ gegen $f(x)$ für $|x| \leq R - \varepsilon$ hervor, denn man kann m zunächst so gross wählen, dass $2M \cdot \frac{(R-\varepsilon)^{m+1}}{R^m} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{\delta}{2}$ wird, und sodann $\nu \geq \nu(\delta, m)$ so gross, dass $|a_0 - a_{0,\nu}|, |a_1 - a_{1,\nu}|, \ldots |a_m - a_{m,\nu}|$ sämtlich kleiner sind als $\frac{\delta}{2} \cdot \frac{1-(R-\varepsilon)}{1-(R-\varepsilon)^{m+1}}$, denn dann wird:

$$|f(x) - f_\nu(x)| \leq \delta$$

ür $\nu \geq \nu(\delta, m) = \nu(\delta)$, da m nur von δ abhängt, für alle $|x| < R - \varepsilon$, w. z. b. w.

ZWEITES KAPITEL.

Über die Abschnitte der Potenzreihen.

§ 1.

Beweis des Hauptsatzes.

Es sei die Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots (a_0 \neq 0)$ vorgelegt, mit endlichem (von 0 und ∞ verschiedenen) Konvergenzradius R. Es ist dann nach CAUCHY:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Die Voraussetzung $a_0 \neq 0$ stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar da, wenn $a_0 = a_1 = \cdots = a_{\nu-1} = 0$, $a_\nu \neq 0$ wäre, einfach die Reihe

$$a_\nu + a_{\nu+1}x + \cdots$$

betrachtet werden dürfte, wobei nur die ν-fache Nullstelle 0 der Abschnitte vernachlässigt wäre. Der n-te Abschnitt:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

habe die Nullstellen $x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots x_{n,n}$; es sei $|x_{1,n}| \leqq |x_{2,n}| \leqq \cdots \leqq |x_{n,n}|$. Eventuell tritt hier ein- oder mehrfach die Nullstelle ∞ auf.

Wir behaupten sodann den in der Einleitung angegebenen Satz über diese Nullstellen, den wir auch so aussprechen

In jedem beliebig kleinen um einen Punkt der Peripherie des Konvergenzkreises $x_0 = R \cdot e^{i\vartheta_0}$ beschriebenen Kreise $|x - x_0| \leqq \varepsilon$ haben unendlich viele Abschnitte $P_n(x)$ je mindestens eine Nullstelle.

Beweis. Anderenfalls hätte von einem gewissen n_0 ab kein $P_n(x)$ eine Nullstelle in $|x - x_0| \leqq \varepsilon$. Sei daher ξ ein innerhalb des Konvergenzkreises $|x| < R$ und innerhalb des Kreises $|x - x_0| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ gelegener Punkt, in dem $f(x)$, die durch die Potenzreihe in $|x| < R$ dargestellte Funktion nicht verschwindet, und $P_n(\xi) = r_n \cdot e^{i\vartheta_n}$, so kann man von den Funktionen $\sqrt[n]{P_n(x)}$ $(n \geqq n_0)$ je einen Zweig als eindeutige Funktion in dem Kreise $|x - x_0| \leqq \varepsilon$ bestimmen durch die Festsetzung:

$$\sqrt[n]{P_n(\xi)} = \sqrt[n]{r_n} \cdot e^{i\frac{\vartheta_n}{n}} = \varrho_n \cdot e^{i\psi_n}$$

wobei:

$$-\frac{\pi}{n} < \psi_n < \frac{\pi}{n}$$

zu setzen ist.

Ferner ist:

$$P_n(x) = a_0\left(1 - \frac{x}{x_{1,n}}\right)\left(1 - \frac{x}{x_{2,n}}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_{n,n}}\right)$$

$$|P_n(x)| \leqq |a_0|\left(1 + \frac{|x|}{|x_{1,n}|}\right)\cdots\left(1 + \frac{|x|}{|x_{n,n}|}\right).$$

Da aber die Häufungsstellen der Nullstellen der $P_n(x)$, soweit sie im Innern

des Konvergenzkreises liegen, Nullstellen der Funktion $f(x)$ sind, und deren kleinste Nullstelle, da $a_0 \neq 0$ ist, von o verschieden ist, so lässt sich für die Nullstellen aller $P_n(x)$, von einem gewissen n ab, und wegen $a_0 \neq 0$ sogar für alle n, eine von o verschiedene untere Schranke angeben; es sei etwa:

$$|x_{\alpha, n}| \geq \eta > 0 \qquad (\alpha, n \text{ beliebig}),$$

mithin:

$$|P_n(x)| \leq |a_0| \cdot \left(1 + \frac{|x|}{\eta}\right)^n.$$

In dem Kreise $|x - x_0| \leq \varepsilon$ ist aber $|x| \leq R + \varepsilon$, daher:

$$|P_n(x)| \leq |a_0| \cdot \left(1 + \frac{R + \varepsilon}{\eta}\right)^n.$$

$$|\sqrt[n]{P_n(x)}| = \sqrt[n]{|P_n(x)|} \leq \sqrt[n]{|a_0|} \cdot \left(1 + \frac{R + \varepsilon}{\eta}\right)$$

so dass die für $|x - x_0| \leq \varepsilon$ eindeutigen, regulären Funktionen $\sqrt[n]{P_n(x)}$ $(n \geq n_0)$, wie sie oben definiert wurden, in diesem Gebiet unter einer gemeinsamen oberen Schranke liegen.

Ferner existiert $\lim\limits_{n = \infty} \sqrt[n]{P_n(\xi)} = \lim\limits_{n = \infty} \varrho_n \cdot e^{i \psi_n}$ und ist gleich 1. Denn es ist $\lim\limits_{n = \infty} P_n(\xi) = \lim\limits_{n = \infty} r_n \cdot e^{i \vartheta_n}$ vorhanden und nicht gleich o, da ξ so ausgesucht ist, also $\lim\limits_{n = \infty} r_n = r \neq 0$, mithin $\lim\limits_{n = \infty} \varrho_n = \lim\limits_{n = \infty} \sqrt[n]{r_n} = 1$, und $\lim\limits_{n = \infty} \psi_n = \lim\limits_{n = \infty} \frac{\vartheta_n}{n} = 0$. Legt man nun die durch Wahl des Hauptwertes für $x = \xi$ eindeutig definierten Funktionen $\sqrt[n]{P_n(x)}$ zu Grunde, so lässt sich um ξ ein ganz in $|x| < R$ und $|x - x_0| < \varepsilon$ gelegener Kreis abgrenzen, in welchem $\lim\limits_{n = \infty} \sqrt[n]{P_n(x)}$ gleichmässig vorhanden und gleich 1 ist, wie dies aus der gleichmässigen Konvergenz von $P_n(x)$ in demselben leicht gefolgert werden kann.

Es ist also jetzt bewiesen:

1. In dem Kreise $|x - x_0| \leq \varepsilon$ sind die Funktionen $\sqrt[n]{P_n(x)}$ $(n > n_0)$ eindeutig zu bestimmen,

2. ebenda existiert eine gemeinsame obere Schranke für den absoluten Betrag dieser Funktionen,

3. in einem innerhalb dieses Kreises gelegenen kleineren Kreise ist $\lim\limits_{n = \infty} \sqrt[n]{P_n(x)}$

gleichmässig vorhanden und gleich 1, wenn man die Zweige der Wurzeln nach 1. passend auswählt; ein Teil dieses Kreises liegt in $|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, da sein Zentrum ξ dort liegt.

Daraus folgt nach dem Satz von STIELTJES—VITALI: Es ist:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{P_n(x)}$$

gleichmässig vorhanden in dem ganz in $|x - x_0| \leq \varepsilon$ gelegenen Kreise $|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und der limes gleich einer daselbst regulären analytischen Funktion $f(x)$. Diese muss hier aber 1 sein, da sie in unendlich vielen (den durch 3. bestimmen) Punkten im Innern ihres Regularitätsbereiches diesen Wert hat, welche Punkte auch nicht isoliert liegen, sondern sogar ein Gebiet ausfüllen.

Damit ist bewiesen: es ist gleichmässig für $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{P_n(x)} = 1$$

oder, es lässt sich ein $n = n(\delta)$ so angeben, dass für $n \geq n(\delta)$ und $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$:

$$|P_n(x)| \leq (1 + \delta)^n$$

ist, und ebenso:

$$|P_{n+1}(x)| \leq (1 + \delta)^{n+1}$$

also:

$$|a_{n+1} \cdot x^{n+1}| = |P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq 2 \cdot (1 + \delta)^{n+1}.$$

Es sei $\delta = \frac{\varepsilon}{4R}$ gewählt und $|x| = R + \frac{\varepsilon}{2}$, was möglich ist, dann ist für alle $n \geq n(\delta) = n(\varepsilon)$:

$$|a_{n+1}| \cdot \left(R + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+1} \leq 2\left(1 + \frac{\varepsilon}{4R}\right)^{n+1}.$$

Folglich:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \leq \frac{1 + \frac{\varepsilon}{4R}}{R + \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Es ist aber:

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\ \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R};$$

die Bedingung

$$\frac{1}{R} \leq \frac{1 + \frac{\varepsilon}{4R}}{R + \frac{\varepsilon}{2}}$$

oder:

$$1 + \frac{\varepsilon}{2R} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{4R}$$

ist aber bei endlichem R für kein $\varepsilon > 0$ erfüllt, so dass wir zu einem Widerspruch gelangt sind.

Der letzte Schritt des Beweisverfahrens entspricht, wie man leicht sieht, folgender allgemeinen Aussage: in keinem Punkte ausserhalb des Konvergenzkreises ist der lim. sup. der Folge $|P_1(x)|$, $\sqrt{|P_2(x)|}, \ldots \sqrt[n]{|P_n(x)|}, \ldots$ kleiner oder gleich 1.

§ 2.

Ergänzungen und Anwendungen.

Mit Vorstehendem ist der Beweis des Hauptsatzes erledigt. Man kann ihm noch folgende Formen geben:

1. Aus den Abschnitten $P_1, \ldots P_n, \ldots$ lässt sich stets eine (unendliche) Folge herausheben, so dass alle diese Abschnitte in beliebig vorgeschriebener Nähe einer vorgeschriebenen Stelle des Konvergenzkreises eine Nullstelle haben.

2. Zeichnet man die Nullstellen sämtlicher Abschnitte $P_n(x)$ in der Ebene auf und bestimmt zu dieser Menge M die Menge M' ihrer Häufungspunkte, so liegen in jedem Kreise $|x| \leq R - \varepsilon$ nur endlich viele Punkte von M', in jedem Kreise $|x| \leq R + \varepsilon$ unendlich viele; nämlich die ganze Peripherie $|x| = R$.

Diese zweite Aussage vervollständigen wir durch nachstehende Betrachtung. Mit $\Phi(n)$ bezeichne man die Anzahl der Nullstellen von $P_n(x)$ innerhalb des Kreises $|x| = R + \varepsilon$, dann gilt:

Satz 2. Es ist für beliebig kleines ε $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\Phi(n)}{n} = 1$, oder es gibt unendlich viele Abschnitte $P_n(x)$, welche mehr als $n(1-\delta)$ von ihren n Wurzeln in dem Kreise $|x| \leq R + \varepsilon$ haben, wobei δ eine beliebig kleine positive Grösse ist.

Beweis. In dem Kreise $|x| = R - \varepsilon_0$ hat $f(x)$ nur endlich viele Wurzeln, da $f(x)$ eine für $|x| < R$ reguläre Funktion ist. Wir bezeichnen diese mit $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, so dass:

$$0 < |x_1| \leqq |x_2| \leqq \cdots \leqq |x_\nu|$$

ist. In dem Kreise $|x| \leqq R - \varepsilon_0$ konvergiert die Potenzreihe gleichmässig gegen $f(x)$, es lässt sich also ein Index $n(\delta)$ so bestimmen, dass für $n \geqq n(\delta)$ die Wurzeln $x_{1,n}, \ldots x_{\nu,n}$ von $P_n(x)$ um weniger als δ von $x_1, \ldots x_\nu$ abweichen, und $|x_{\nu+1,n}| \geqq R - \varepsilon_0 - \delta$ ist. Es ist daher:

$$\left|\frac{a_0}{a_n}\right| = |x_{1,n} \cdots x_{n,n}| > \big||x_1| - \delta\big|^\nu \cdot (R - \varepsilon_0 - \delta)^{\Phi(n) - \nu} \cdot (R + \varepsilon)^{n - \Phi(n)}$$

denn $\Phi(n)$ von den Wurzeln von $P_n(x)$ sind kleiner als $R + \varepsilon$, von denen ν um weniger als δ von $|x_1|, \ldots |x_\nu|$ abweichen, also grösser sind als $\big||x_1| - \delta\big|$, der Rest ist grösser als $R - \varepsilon_0 - \delta$. Wählen wir δ kleiner als $\frac{|x_1|}{2}$, so ist mithin:

$$\left|\frac{a_0}{a_n}\right| > \left|\frac{x_1}{2}\right|^\nu \cdot (R - \varepsilon_0 - \delta)^{\Phi(n) - \nu} \cdot (R + \varepsilon)^{n - \Phi(n)}$$

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < |a_0|^{\frac{1}{n}} \cdot \left|\frac{2}{x_1}\right|^{\frac{\nu}{n}} \cdot \frac{(R + \varepsilon)^{\frac{\Phi(n)}{n} - 1}}{(R - \varepsilon_0 - \delta)^{\frac{\Phi(n)}{n} - \frac{\nu}{n}}}.$$

Da ν eine endliche Zahl ist für jedes positive ε_0, so ist mithin:

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{R + \varepsilon} \cdot \overline{\lim_{n=\infty}} \left(\frac{R + \varepsilon}{R - \varepsilon_0 - \delta}\right)^{\frac{\Phi(n)}{n}},$$

oder, wenn wir noch $\varepsilon_0 + \delta = \delta_1$ setzen und bedenken, dass es möglich sei, ebenso wie ε_0 und δ einzeln, auch $\varepsilon_0 + \delta$ beliebig klein zu machen:

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{R + \varepsilon} \cdot \left(\frac{R + \varepsilon}{R - \delta_1}\right)^{\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\Phi(n)}{n}}.$$

Ist also $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\Phi(n)}{n} = \alpha < 1$, so wäre:

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \leqq \frac{1}{R + \varepsilon} \cdot \left(\frac{R + \varepsilon}{R - \delta_1}\right)^\alpha$$

für alle beliebig kleinen δ_1, also auch, da links eine von δ_1 unabhängige Grösse steht:

$$\frac{1}{R} \leqq \frac{1}{R + \varepsilon} \cdot \frac{(R + \varepsilon)^\alpha}{R^\alpha}$$

oder:

$$\frac{1}{R^{1-\alpha}} < \frac{1}{(R+\varepsilon)^{1-\alpha}},$$

was für $\varepsilon > 0, \alpha < 1$ einen Widerspruch enthält. Daher ist für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\Phi(n)}{n} = 1, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Eine unmittelbare Folgerung dieses Satzes lautet: Häufungsstellen der ersten, der zweiten, ... der ν-ten, ... Nullstellen von $P_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ liegen innerhalb jedes Kreises $|x| = R + \varepsilon$, also auf der Peripherie des Konvergenzkreises oder innerhalb desselben. Als ν-te Nullstelle von $P_n(x)$ ist hierbei $x_{\nu, n}$ bezeichnet, wenn man die Nullstellen von $P_n(x)$ in eine Reihe nach wachsendem absoluten Betrag geordnet hat. Denn hätten nur die ν-ten Nullstellen einen Häufungspunkt der angegebenen Lage, aber nicht mehr die $(\nu + 1)$-ten, so wäre von einem gewissen n ab: $\Phi(n) \leq \nu$, also $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\Phi(n)}{n} = \overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\nu}{n} = 0$, was dem bewiesenen Satze widerspricht. Herr F. LUKÁCS[1] hatte, auf entsprechendem Wege, nur gefunden $\Phi(n) \geq 1$, von einem gewissen n ab, statt des genauen Satzes $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\Phi(n)}{n} = 1$. Dies ist nämlich das genaueste hier zu erzielende Resultat, denn es lassen sich Reihen angeben, für welche $\underline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\Phi(n)}{n} = 0$. Dazu betrachte man etwa zunächst die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} x^{\nu!}$. Die Abschnitte:

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^6 + x^{24} + \cdots + x^{\nu!}$$

wo $\nu! < n < (\nu + 1)!$ ist, haben im Endlichen $\nu!$ Wurzeln, so dass etwa für die Abschnitte $P_{\nu!-1}$ $\Phi(n) \leq (\nu - 1)!$ ist, also $\underline{\lim} \frac{\Phi(n)}{n} = \lim\limits_{\nu=\infty} \frac{(\nu-1)!}{\nu! - 1} = 0$. Es ist leicht, wegen der Stetigkeit der Wurzeln algebraischer Gleichungen, Reihen zu konstruieren, deren Koeffizienten sämtlich nicht verschwinden, und die die gleiche Eigentümlichkeit zeigen.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass statt der Nullstellen der $P_n(x)$ auch die Nullstellen von $P_n(x) - a$ zugrunde gelegt werden können; oder da $f(x)$ und $f'(x)$ im selben Kreise um 0 regulär sind, auch die Nullstellen von $P'_n(x)$ usw.

Anwendungen der vorstehenden Sätze ergeben sich leicht, wenn man spezielle Fälle betrachtet. Es gelten z. B. folgende Sätze:

[1] l. c.

1. Sind die Nullstellen der Abschnitte einer Potenzreihe von einem gewissen n ab sämtlich reel, so konvergiert die Potenzreihe entweder nirgends oder in der ganzen Ebene,[1] denn die Menge M' besteht hier nur aus Punkten auf der Achse des Reellen, erfüllt also keinen im Endlichen gelegenen Kreis. Dieser Satz steht in Beziehung zu einem Theorem von LAGUERRE und ist von Herrn PÉTROVITCH (im Falle positiver Wurzeln) besonders hervorgehoben worden.

2. Liegen die Nullstellen der Abschnitte sämtlich in einer Halbebene, so konvergiert die Potenzreihe nirgends oder in der ganzen Ebene, und ähnliche Sätze mehr.

Es genügt auch, diese Voraussetzung nur für unendlich viele Abschnitte zu machen; wie durch eine algebraische Betrachtung dieser Fall auf den folgenden zurückgeführt werden könne, kann man aus den Andeutungen am Ende von Kapitel III dieser Arbeit entnehmen; doch ist zu bemerken, dass, um das Resultat zu erlangen, die Anwendung des Satzes von PÓLYA und LINDWART natürlich rascher zum Ziel führt (siehe unten).

3. Genügen die Nullstellen der Abschnitte einer Bedingung der Form $\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left|\frac{1}{x_{\nu,n}}\right|^p < M$ für alle n und feste positive Grössen p und M, so konvergiert die Potenzreihe nirgends oder in der ganzen Ebene.

Denn in jedem Kreise $|x| \leq R$ hat $P_n(x)$ höchstens $\nu = M \cdot R^p$ Nullstellen. Es wäre also $\lim_{n=\infty}\frac{\Phi(n)}{n} = 0$, wenn $\Phi(n)$ für den Kreis $|x| = R$ gebildet wird, so dass der Konvergenzradius grösser als R sein müsste.

Dass in den gennanten Fällen die dargestellten ganzen transzendenten Funktionen, falls wir $R = 0$ ausschliessen, von endlichem Geschlecht sind, und die Bestimmung desselben hat Herr PÓLYA zuerst, in Verallgemeinerung LAGUERRE'scher Untersuchungen, für Fall 2. sowie allgemeinere Fälle ausgeführt. Diese Tatsachen sind bei weitem in seinen Sätzen über Polynomfolgen enthalten, wenn man sie speziell auf die Abschnitte der Potenzreihen bezieht (vgl. auch unten). Es darf hier vielleicht bemerkt werden, dass die Arbeiten von PÓLYA mir die Veranlassung zur Beschäftigung mit den hier behandelten Fragen gaben.[2]

[1] LAGUERRE, Sur les fonctions du genre zéro et du genre un. Oeuvres I. p. 174—177.

[2] Vgl. zu diesen ganzen Anwendungen folgende Arbeiten, die sich allerdings zumeist nur, bzw. auch, auf Polynomreihen beziehen: PÓLYA, Über Annäherung durch Polynome, deren sämtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen. Gött. Nachr. 1913; derselbe, Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln. Rend. Palermo T. 36, 1913; PÓLYA und LINDWART, Über einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln, Rend. Pal. T. 37, 1914; JENTZSCH, Sur l'extension d'un théorème de LAGUERRE, Comptes Rendus 1914, t. 158; E. LINDWART, Über eine Methode von LAGUERRE zur Bestimmung des Geschlechts einer ganzen Funktion. Göttingen 1914.

§ 3.

Betrachtung eines speziellen Falles.

Wir betrachten noch einen speziellen Fall, in dem die Funktion $\Phi(n)$ sich genauer bestimmen lässt, nämlich den Fall, dass nur ein einfacher Pol auf dem Konvergenzkreise $|x| = R$ liegt. Es kann dann gesetzt werden: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots + \frac{\alpha}{1 - \frac{x}{x_1}}$, wo $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$ einen grösseren Konvergenzradius R_1 als $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ hat. Es ist dann:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

$$+ \alpha\left(1 + \frac{x}{x_1} + \cdots + \frac{x^n}{x_1^n}\right) = Q_n(x) + R_n(x)$$

$$= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \alpha \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{x}{x_1}}.$$

Es sei $R_1 > R + 2\varepsilon$. Dann ist in dem Kreise $|x| \leq R + 2\varepsilon$ die durch $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$ dargestellte Funktion regulär, es gibt daher eine obere Schranke M für jeden Abschnitt $\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu$ von $\sum_0^\infty b_\nu x^\nu$, falls man x auf den Kreis $|x| \leq R + \varepsilon$ beschränkt. Daher ist für $|x| = R + \varepsilon$:

$$\left|\sum_0^n b_\nu x^\nu\right| \leq M.$$

Es ist aber für gehörig grosses n:

$$\left|\frac{\left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x}{x_1} - 1}\right| > \frac{\left(\frac{R+\varepsilon}{R}\right)^{n+1} - 1}{\frac{R+\varepsilon}{R} + 1} = \frac{\left(\frac{R+\varepsilon}{R}\right)^{n+1} - 1}{2 + \frac{\varepsilon}{R}}$$

beliebig gross, so dass von einem gewissen n ab:

$$M < |a| \cdot \left| \frac{\left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x}{x_1} - 1} \right|,$$

also auch:

$$|Q_n(x)| = \left| \sum_0^n b_\nu x^\nu \right| < |R_n(x)|$$

ist.

Daher hat nach einem allgemeinen Satz der Funktionentheorie $Q_n(x) + R_n(x) = P_n(x)$ ebenso viele Nullstellen innerhalb $|x| \leq R + \varepsilon$ wie $R_n(x)$. $R_n(x)$ hat aber n Nullstellen, so dass von einem gewissen n ab für $|x| \leq R + \varepsilon$: $\Phi(n) = n$ ist. Damit ist bewiesen:

Satz 3. Liegt auf dem Konvergenzkreise einer Potenzreihe nur ein einfacher Pol der durch die Reihe dargestellten Funktion, so hat jeder Abschnitt der Reihe von einem gewissen Index an alle seine Wurzeln innerhalb des Kreises $|x| = R + \varepsilon$. (ε beliebig klein, positiv.)

Dies gilt schon für den Fall zweier einfachen Pole auf dem Konvergenzkreise nicht mehr, wie das Beispiel $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_0^\infty x^{2\nu}$ lehrt, denn hier ist $\Phi(2n) = 2n$, aber $\Phi(2n-1) = 2n-2$.

Es hat im Allgemeinen keineswegs jede unendliche Folge von Abschnitten an der ganzen Peripherie des Konvergenzkreises Häufungsstellen von Nullstellen. Es lassen sich z. B., wie ich an anderer Stelle zeigen werde, Potenzreihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ mit dem Konvergenzradius 1 konstruieren, von denen bestimmte Abschnittsfolgen in jedem endlichen inneren Gebiete der Halbebene $R(x) \geq -1$ gleichmässig konvergieren, sonach am ganzen Konvergenzkreis nur vereinzelte Häufungsstellen von Nullstellen haben können, nämlich die Nullstellen der durch die Potenzreihe für $|x| < 1$ dargestellten, durch die Abschnittsfolge für $R(x) > -1$ fortgesetzten analytischen Funktion (ausser $x = -1$). Diese Tatsache verdient vielleicht deswegen hervorgehoben zu werden, weil, wie nach dem in der Einleitung dieser Arbeit angegebenen Beweise leicht ersichtlich ist, die von Hurwitz bemerkte Tatsache auch gültig bleibt, wenn man nicht alle, sondern nur unendlich viele Abschnitte der Potenzreihe in Betracht zieht.

DRITTES KAPITEL.

Über Folgen von analytischen Funktionen.

§ 1.

Einige spezielle Folgen.

Die in Kapitel II § 1 für Potenzreihen werwendete Beweismethode lässt sich auf einige Typen von Reihen ausdehnen, von denen hier zwei besonders wichtige erwähnt seien:

1. Die Entwickelungen nach FABER'schen Polynomen. Diese bilden die natürliche, aus der Theorie der konformen Abbildung hervorgehenden Verallgemeinerungen der Potenzreihen. Jedem einfach zusammenhängenden, von einer analytischen Kurve berandeten Gebiete G lässt sich nach FABER eine Folge von Polynomen $P_1(x), \ldots P_n(x), \ldots$ so zuordnen, dass jede in G reguläre analytische Funktion $F(x)$ sich auf eine bestimmte Weise in eine in jedem inneren Teilgebiete von G gleichmässig konvergente Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)$ entwickeln lässt, die nirgends ausserhalb G konvergiert. Dann gilt folgender Satz: die Nullstellen der Polynome $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu(x) = Q_n(x)$ haben zu Häufungsstellen im Innern von G alle Nullstellen von $F(x)$ und nur diese, sowie den ganzen Rand von G. Der Beweis und gewisse Verschärfungen des Satzes sind, wenn man die FABER'schen Formeln zugrunde legt, wie vorhin auszuführen.

2. Die DIRICHLET'schen Reihen. Betrachtet man etwa eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^s}$ und sei σ_0 die Abszisse der Konvergenzgeraden derselben, so liegen auf dieser Geraden die Nullstellen der Abschnitte $\sum_{1}^{n} \frac{a_\nu}{\nu^s} = Q_n(s)$ überall dicht. Der Beweis ergibt sich nach denselben Prinzipien wie der in Kapitel II § 1 geführte unter Benutzung der Funktionen $\frac{\log Q_n(s)}{\log n}$ an Stelle der dort benutzten $\sqrt[n]{P_n(x)}$. Dieses zweite Resultat hat mir Herr K. KNOPP, dem ich meinen Beweis für Potenzreihen vorgetragen hatte, gütigst mitgeteilt.

§ 2.

Allgemeine Betrachtungen über Funktionenfolgen.

In dem allgemeinen Falle der Folgen analytischer Funktionen liegt alles viel komplizierter als bei den Potenzreihen. Denn:

1. braucht das Gebiet gleichmässiger Konvergenz kein Kreis zu sein,
2. kann es aus mehreren getrennten Stücken bestehen,
3. braucht auf dem Rande eines Gebietes gleichmässiger Konvergenz kein singulärer Punkt der Grenzfunktion f zu liegen.

Jedoch sind die einzelnen Gebiete gleichmässiger Konvergenz einfach zusammenhängend.[1] Daher sind hier dem Beweise des Hauptsatzes einige elementarere Betrachtungen vorauszuschicken.

Es sei:

$$f_\nu(x) = a_{0,\nu} + a_{1,\nu}x + \cdots + a_{n,\nu}x^n + \cdots$$

und $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(x) = f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ gleichmässig für $|x| \leq R - \varepsilon$ (ε beliebig klein), aber nicht für einen Kreis $|x| \leq R + \varepsilon$ (ε beliebig klein), $\varepsilon > 0$. In diesem Falle bezeichnen wir den Kreis $|x| = R$ als den grössten Kreis gleichmässiger Konvergenz K um 0 der Folge $f_\nu(x)$, wobei natürlich die Regularität der Funktionen f_ν für $|x| < R$ vorausgesetzt ist. Der Konvergenzradius der Reihe für $f_\nu(x)$: $\sum\limits_{\varkappa=0}^{\infty} a_{\varkappa,\nu} x^\varkappa$ sei ϱ_ν; es soll also sein:

$$\varrho_\nu \geq R.$$

ϱ' sei die untere Grenze der ϱ_ν. ϱ sei der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu$. Nach den gemachten Voraussetzungen ist jedenfalls auch $\varrho \geq R$. Es sind dann folgende Fälle möglich:

1. $\varrho' > R$; $\varrho > R$. Beispiel:

$$f_\nu(x) = \frac{x^\nu}{1 - x} + 2^\nu x^\nu = (1 + 2^\nu)x^\nu + x^{\nu+1} + x^{\nu+2} + \cdots$$

$$f(x) = 0$$

$$\varrho' = 1\,,\ \varrho = \infty\,,\ R = \frac{1}{2}.$$

[1] Vgl. Montel, Leçons sur les séries de polynômes. Paris 1910.

2. $\varrho' = R$; $\varrho > R$. Bespiel:

$$f_\nu(x) = x^\nu \cdot \frac{1}{1-x} = x^\nu + x^{\nu+1} + \cdots.$$

$$f(x) = 0.$$

$$\varrho' = 1, \; \varrho = \infty, \; R = 1.$$

3. $\varrho' = R$; $\varrho = R$. Beispiel:

$$f_\nu(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu-1} + 2x^\nu + 2x^{\nu+1} + \cdots = \frac{x^\nu + 1}{1-x}$$

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu-1} + x^\nu + \cdots \qquad = \frac{1}{1-x}$$

$$\varrho' = 1, \; \varrho = 1, \; R = 1.$$

4. $\varrho' > R$; $\varrho = R$. Beispiel:

$$f_\nu(x) = 1 + x + \cdots + x^\nu = \frac{1 - x^{\nu+1}}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\varrho' = \infty, \; \varrho = 1, \; R = 1.$$

Diese verschiedenen Fälle treten mithin schon bei den trivialsten Beispielen auf. Sei also $|x| = R$ der grösste Kreis gleichmässiger Konvergenz der Folge $f_\nu(x)$, so lässt sich ein $\nu = \nu(\delta)$ angeben, so dass:

$$|f(x) - f_\nu(x)| \leqq \delta \text{ ist für } \nu \geqq \nu(\delta) \text{ und } |x| \leqq R - \varepsilon_1,$$

oder:

$$|a_n - a_{n,\nu}| \leqq \frac{\delta}{(R-\varepsilon_1)^n}.$$

Ist es umgekehrt möglich, ein $\nu = \nu(\delta)$ für jedes δ zu bestimmen, so dass:

$$|a_n - a_{n,\nu}| \leqq \frac{\delta}{(R+\varepsilon_1)^n} \text{ ist für } \nu \geqq \nu(\delta),$$

so ist, falls $f(x)$ und $f_\nu(x)$ alle für $|x| < R + \varepsilon_1$ regulär sind:

$$|f(x) - f_\nu(x)| \leq \sum_0^\infty |a_n - a_{n,\nu}| \cdot |x|^n \leq \delta \cdot \sum_0^\infty \frac{|x|^n}{(R+\varepsilon_1)^n}$$

$$\leq \delta \cdot \frac{1}{1 - \frac{|x|}{R+\varepsilon_1}} \quad \text{für } \nu \geq \nu(\delta);\ |x| \leq R + \varepsilon_2 < R + \varepsilon_1,$$

also die Folge der $f_\nu(x)$ für $|x| < R + \varepsilon_2$ (ε_2 beliebig $< \varepsilon_1$) gleichmässig konvergent.

Mit jeder Folge von Funktionen $f_\nu(x)$ sind nun unendlich viele andere Folgen verbunden, von denen wir besonders die Polynomfolgen hervorheben. Wir bilden:

$$P_\nu^\varkappa(x) = a_{0,\nu} + a_{1,\nu}x + \cdots + a_{\varkappa,\nu}x^\varkappa.$$

Jeder Folge von Zahlenpaaren $(\nu_1, \varkappa_1), (\nu_2, \varkappa_2), \ldots (\nu_n, \varkappa_n), \ldots$, wo $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$ und $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \cdots$, ordnen wir dann die »$(\nu, \varkappa)$-Folge» $P_{\nu_1}^{\varkappa_1}, P_{\nu_2}^{\varkappa_2}, \ldots$ zu. Wir beweisen dann folgenden Satz:

Jede $(\nu, \varkappa)$-Folge konvergiert mindestens für $|x| \leq R - \varepsilon$ (ε beliebig, $\varepsilon > 0$) gleichmässig, und es gibt mindestens eine $(\nu, \varkappa)$-Folge, die für kein Gebiet $|x| \leq R + \varepsilon$ gleichmässig konvergiert (und damit auch unendlich viele).

Es ist klar, dass, wenn eine $(\nu, \varkappa)$-Folge gleichmässig für ein beliebig kleines Gebiet um 0 konvergiert, ihr limes wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{n,\nu} = a_n$ mit $f(x)$ daselbst übereinstimmt.

Beweis. 1. Es ist für $\nu \geq \nu_1(\delta)$:

$$|a_n - a_{n,\nu}| \leq \frac{\delta}{\left(R - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n}$$

daher

$$f(x) - P_\nu^\varkappa(x) = \sum_0^\varkappa (a_n - a_{n,\nu})x^n + \sum_{\lambda=\varkappa+1}^\infty a_\lambda x^\lambda; \quad |x| < R$$

leicht abzuschätzen. Da $f(x)$ für $|x| < R$ regulär ist, ist es möglich, ein $n(\delta)$ so zu wählen, dass:

$$\left| f(x) - \sum_0^m a_\nu x^\nu \right| \leq \delta \text{ für } |x| \leq R - \varepsilon \text{ und } m \geq n(\delta)$$

ist, für ein bestimmtes von 0 verschiedenes ε.

Wegen $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \cdots$ kann man den Index λ von $\varkappa_\lambda$ so gross wählen, dass $\varkappa_\lambda \geqq n(\delta)$ wird für $\nu \geqq \nu_2(\delta)$. Für $\nu \geqq \nu_1(\delta)$; $\nu_2(\delta)$ ist daher:

$$|f(x) - P_\nu^{\varkappa}| \leqq \sum_0^{\varkappa} \frac{\delta}{\left(R - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n} \cdot (R - \varepsilon)^n + \delta < \delta + 2\delta \cdot \frac{R - \frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon}.$$

Damit ist aber die gleichmässige Konvergenz in $|x| \leqq R - \varepsilon$ gewährleistet.

2. Ist $\varrho = R$, so braucht der zweite Teil des Satzes keinen längeren Beweis, da dann offenbar keine $(\nu, \varkappa)$-Folge in einem Kreise $|x| \leqq R + \varepsilon$ gleichmässig konvergiert.

Im allgemeinen verfährt man so. Nach der Bestimmung von R kann man zu jedem ε für gewisse δ unendlich viele ν finden, $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$, für die die Bedingung:

$$(1)' \qquad |a_n - a_{n,\nu}| \geqq \frac{\delta}{(R + \varepsilon)^n} \qquad \nu = \nu_1, \nu_2, \ldots \quad \delta < \delta(\varepsilon)$$

für je mindestens ein n erfüllt ist. Es gibt also Folgen:

$$(\nu_1, n_1), (\nu_2, n_2), \ldots \qquad (\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots)$$

für die

$$|a_{n_\alpha} - a_{n_\alpha, \nu_\alpha}| \geqq \frac{\delta}{(R + \varepsilon)^{n_\alpha}}$$

ist. $\delta < \delta(\varepsilon)$, für jedes $\varepsilon > 0$, das man vorher gewählt hat.

Dies folgt aus den früheren Bemerkungen. Es müssen hier aber unendlich viele verschiedene n vorkommen, denn sonst wäre für unendlich viele ν und ein festgehaltenes n:

$$|a_n - a_{n,\nu_\alpha}| \geqq \frac{\delta}{(R + \varepsilon)^n},$$

während doch $\lim\limits_{\alpha = \infty} |a_n - a_{n,\nu_\alpha}| = 0$ ist.

Daher kann man aus der Folge der Paare (ν_α, n_α) eine andere auswählen, $(\nu_\alpha, \varkappa_\alpha)$, so dass $\nu_{\alpha+1} > \nu_\alpha$; $\varkappa_{\alpha+1} > \varkappa_\alpha$ ist. Wir behaupten, dass die zugehörige $(\nu, \varkappa)$-Folge nicht gleichmässig für $|x| \leqq R + \varepsilon$ gegen die in $|x| < R + \varepsilon_1 (\varepsilon_1 > \varepsilon)$ reguläre Funktion $f(x)$ konvergiert. Denn dann wäre:

$$\left| f(x) - P_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha}(x) \right| < \frac{\delta}{2} \text{ für } \nu > \nu(\delta) \text{ und } |x| < R + \varepsilon; \text{ also:}$$

$$\left| a_n - a_{n,\nu_\alpha} \right| \leqq \frac{\frac{\delta}{2}}{(R+\varepsilon)^{n_\alpha}} \text{ für } \nu \geqq \nu(\delta), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa_\alpha = n_\alpha$$

also speziell

$$\left| a_{n_\alpha} - a_{n_\alpha,\nu_\alpha} \right| \leqq \frac{\frac{\delta}{2}}{(R+\varepsilon)^{n_\alpha}}$$

was der vorhin getroffenen Bestimmung der n_α, ν_α widerspricht.

Damit ist aber nur folgendes bewiesen: Ist $R_{\nu,\varkappa}$ der zu einer $(\nu, \varkappa)$-Folge gehörige Radius des grössten Kreises gleichmässiger Konvergenz, so gibt es $(\nu, \varkappa)$-Folgen für jedes $\varepsilon > 0$, so dass $R_{\nu,\varkappa} < R + \varepsilon$ ist; denn die Auswahl der $(\nu, \varkappa)$-Folge hing von ε ab. Jetzt wähle man, um den Beweis zu vollenden, eine Folge gegen 0 abnehmender ε: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \cdots \lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ und bestimme zu jedem von ihnen eine $(\nu, \varkappa)$-Folge, für die $R^{(n)}_{\nu,\varkappa} < R + \varepsilon_n$ ist. Durch ein passendes Ineinanderordnen dieser Folgen kann man dann eine solche erhalten für die $R_{\nu,\varkappa} \leqq R^{(n)}_{\nu,\varkappa}$ ist für jedes n, also $\leqq R$, da aber nach 1. $R_{\nu,\varkappa} \geqq R$ ist, ist für diese Folge:

$$R_{\nu,\varkappa} = R.$$

Da ein ähnlicher Einordnungsprozess später nochmals auftritt (§ 3, Ende), sei hier dessen Ausführung übergangen.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Es ist gezeigt: Für jede $(\nu, \varkappa)$-Folge ist:

$$1. \quad R_{\nu,\varkappa} \geqq R$$

und es gibt eine Folge,

2. für die $R_{\nu,\varkappa} = R$ ist.

Betrachten wir etwa die Folge $f_\nu(x)$, wo: $f_\nu(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu + 2^{\nu+1} \cdot x^{\nu+1} + 2^{\nu+2} \cdot x^{\nu+2} + \cdots$, so ist $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(x) = f(x) = \frac{1}{1-x}$ für $|x| \leqq \frac{1}{2}$, also $R = \frac{1}{2}$; während z. B. für die Folge (ν, ν):

$$P^\nu_\nu(x) = 1 + x + \cdots + x^\nu, \; R_{\nu,\nu} = 1$$

ist, jedoch für die Folge $(\nu, 2\nu)$:

$$P^{2\nu}_\nu(x) = 1 + x + \cdots + x^\nu + 2^{\nu+1} \cdot x^{\nu+1} + \cdots + 2^{2\nu} \cdot x^{2\nu}, \; R_{\nu,2\nu} = \frac{1}{2} = R \text{ ist.}$$

Es seien noch folgende Bemerkungen über die Konvergenzbedingungen beigefügt. Der Konvergenzradius von $f_\nu(x)$ ist gegeben durch:

$$\frac{1}{\varrho_\nu} = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_{n,\nu}|},$$

der von $f(x)$ durch:

$$\frac{1}{\varrho} = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|};$$

es ist ferner:

$$\varrho' = \lim_{\nu=\infty} \varrho_\nu$$

Sind also die Gleichungen $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{n,\nu} = a_n$ bekannt, d. h. konvergieren im Punkte o die Folgen $f_\nu(0)$; $f'_\nu(0)$; $\cdots$ gegen endliche Zahlen, so sind die Bedingungen $\varrho > 0$, $\varrho' > 0$ notwendig, jedoch nicht hinreichend für die gleichmässige Konvergenz in einem noch so kleinen Gebiete um o. Dies lehrt folgendes Beispiel: $f_\nu(x) = (\nu \cdot x)^\nu$; $f(x) = 0$. Hier ist $\varrho_\nu = \infty$, $\varrho' = \infty$, $\varrho = \infty$, aber $R = 0$. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen also dafür, dass ein Punkt o, in dem $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu^{(\varkappa)} (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$ sämtlich existieren, Mittelpunkt eines Kreises gleichmässiger Konvergenz sei, lauten:

1. $\varrho' > 0$, $\varrho > 0$.

2. Es gibt eine Grösse R derart, dass $|a_n - a_{n,\nu}| \leqq \frac{\delta}{R^n}$ ist, für $\nu \geqq \nu(\delta)$, für jedes n und beliebig vorgegebenes δ. Umgekehrt ist ein Punkt o, für dem $\lim a_{n,\nu} = a_n$ vorhanden ist, $\varrho' > 0$, $\varrho > 0$ ist, dann und nur dann nicht Mittelpunkt eines Kreises gleichmässiger Konvergenz, wenn es zu jedem $R \neq 0$ Werte δ gibt derart, dass:

$$|a_n - a_{n,\nu}| > \frac{\delta}{R^n}$$

ist, für unendlich viele Paare (n, ν), unter denen solche mit beliebig grossem ν (und folglich n)[1] vorkommen. Aus dieser Bedingung lässt sich noch das δ wegschaffen. Denn sei für ein $R \neq 0 (R < \varrho', R < \varrho)$ und alle n, und alle $\nu \geqq \nu_0$:

$$|a_n - a_{n,\nu}| \leqq \frac{1}{R^n},$$

[1] Vgl. S. 240 unten.

so ist:

$$|f(x) - f_\nu(x)| \leq \sum_0^m |a_n - a_{n,\nu}| \cdot |x|^n + |x|^m \cdot \frac{1}{1 - \frac{|x|}{R}} \cdot \frac{1}{R^m} \text{ für } |x| < R$$

$$< \sum_0^m |a_n - a_{n,\nu}| \cdot |x|^n + \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot 2 \text{ für } |x| < \frac{R}{2}.$$

Wählen wir also m so gross, dass $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} < \frac{\delta}{2}$ wird, darauf ν so gross, dass:

$$\left(\frac{1}{2} R\right)^n |a_n - a_{n,\nu}| < \frac{\delta}{2(m+1)}$$

wird für $n = 0, 1, 2, \ldots m$, so wird für $\nu \geqq \nu(m) = \nu(\delta)$ und

$$\nu \geqq \nu_0 \text{ und } |x| < \frac{1}{2} R;$$

$$|f(x) - f_\nu(x)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

so dass man folgenden Satz aussprechen darf: Ist $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{n,\nu} = a_n$, $\varrho' > 0$, $\varrho > 0$, so ist 0 dann und nur dann kein Mittelpunkt eines Kreises gleichmässiger Konvergenz, wenn es unendlich viele Paare (n, ν), $\lim n = \infty$, $\lim \nu = \infty$ für jedes $R > 0$ gibt, so dass für diese:

$$|a_n - a_{n,\nu}| > \frac{1}{R^n}$$

ist. Man kann offenbar diese Betrachtungen benutzen, um Bedingungen für die Grösse des R abzuleiten, dies sei hier übergangen, da sich weiter unten ein deutlicheres Kriterium für R ergibt. Diese ganz elementaren Überlegungen sollten vor allem den Zusammenhang der Konvergenz einer Funktionenfolge mit der Konvergenz der durch sie bestimmten Polynomfolgen erläutern.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

Ist R der Konvergenzradius gleichmässiger Konvergenz, so ist es nicht nötig, dass die Nullstellen von $f_\nu(x)$ auf dem Kreise $|x| = R$ auch nur eine

Häufungsstelle haben; auch auf dem ganzen Rande des um o gelegenen Gebietes G gleichmässiger Konvergenz braucht keine solche zu liegen. Dies geht schon aus dem Beispiel $x, x^2, x^3, \ldots$ hervor; freilich ist hier $f(x) = 0$; jedoch lässt sich diese Erscheinung auch an Beispielen, wo $f(x) \neq$ const. ist, nachweisen. Es sei:

$$f_\nu(x) = e^{x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu}},$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Hier ist $\varrho_\nu = \infty$, $\varrho' = \infty$, $\varrho = 1$, $R = 1$. (Fall 4, oben.) Hier hat keine der Funktionen f_ν überhaupt eine Nullstelle, von einer Häufung derselben auf dem Rande des Konvergenzgebietes (gleichmässiger Konvergenz) $|x| = 1$ kann also keine Rede sein. Es ist leicht, hieraus auch Beispiele von Polynomfolgen mit nicht konstanter Grenzfunktion zu konstruieren, bei denen gleichfalls nicht am Rande von G, geschweige denn auf $|x| = R$, eine Häufungsstelle von Nullstellen der Polynome liegt.

Dagegen beweisen wir folgenden Satz:

Mindestens eine $(\nu, \varkappa)$-Folge hat jeden Punkt von $|x| = R$ als Häufungsstelle ihrer Nullstellen, und dann auch unendlich viele; — sofern sich die Grenzfunktion nicht auf o reduziert.

Beweis. Entweder ist $\varrho = R$ oder $\varrho > R$. 1. Im ersten Falle gibt es nach dem Haupsatze des Kapitels II eine Folge von Abschnitten von $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, deren Nullstellen jeden Punkt von $|x| = R$ zur Häufungsstelle haben. Diese Abschnitte sind sicher unter sämtlichen enthalten. Wir wählen jetzt ν_2 so gross, dass sich die Wurzel von $P^2 = a_0 + a_1 x$ von der Wurzel von $P^2_{\nu_2} = a_{0,\nu_2} + a_{1,\nu_2} x$ um höchstens 1 unterscheidet; sodann $\nu_3 > \nu_2$ so gross, dass die beiden Wurzeln von $P^3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ sich von denen von $P^3_{\nu_3} = a_{0,\nu_3} + a_{1,\nu_3} x + a_{2,\nu_3} x^2$ um höchstens $\frac{1}{2}$ dem absoluten Betrage nach unterscheiden usw. Man kann so verfahren, da $\lim_{\nu = \infty} a_{n,\nu} = a_n$ ist, es sich jedesmal nur um endlich viele Koeffizienten handelt und unter Benutzung des Satzes, dass die Wurzeln einer algebraischen Gleichung stetig von den Koeffizienten abhängen. Es ist dann klar, dass sich die Nullstellen von $P^\alpha_{\nu_\alpha}$ an denselben Stellen häufen werden wie die von P^α, d. h. längs des ganzen Kreises $|x| = R$. Damit ist der erste Fall erledigt. 2. Ist $\varrho > R$, aber $\varrho' = R$, so kann man noch ähnlich einfach verfahren. Die Abschnitte von

$f_\nu(x)$ haben als Häufungspunkte ihrer Nullstellen alle Punkte der Peripherie $|x| = \varrho_\nu$. Wir wählen einen Abschnitt von $f_1(x)$: $P_1^{\varkappa_1}(x)$, der eine Nullstelle hat, die sich von $x = \varrho_1$ um weniger als 1 unterscheidet, sodann $P_1^{\varkappa_2}(x)$, der eine Nullstelle hat, die sich von $x = \varrho_2$ um weniger als $\frac{1}{2}$ unterscheidet ($\varkappa_2 > \varkappa_1$), sodann $P_3^{\varkappa_3}$ mit einer Nullstelle in der Nähe $\frac{1}{3}$ von $\varkappa = -\varrho_3$, $P_4^{\varkappa_1}$ mit einer Nullstelle in der Nähe $\frac{1}{4}$ von $x = \varrho_4 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $P_5^{\varkappa_5}$ mit einer Nullstelle in der Nähe $\frac{1}{5}$ von $x = \varrho_5 \cdot e^{\frac{4\pi i}{3}}$ usw.; immer höhere Einheitswurzeln werden benutzt und dabei die Regel $\varkappa_{\nu+1} > \varkappa_\nu$ beachtet. Man sieht leicht ein, dass man auch hier wegen $\lim_{\nu=\infty} \varrho_\nu = R$, und weil die Einheitswurzeln auf der Kreisperipherie überall dicht liegen, eine Polynomfolge der gewünschten Art erhält.

3. Es bleibt der Fall $\varrho' > R$, $\varrho > R$ zu erledigen, der anders zu behandeln ist. In diesem Falle gibt es nicht für jedes δ ein $\nu(\delta)$, so dass für alle $\nu > \nu(\delta)$ und alle n:

$$|a_n - a_{n,\nu}| < \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^n}$$

ist, für ein beliebiges, aber fest gewähltes ε. Es gibt also für jedes ε nach § 2 unendlich viele Paare

$(n_1, \nu_1), (n_2, \nu_2), \ldots, n_1 < n_2 < n_3 < \cdots, \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$, für die:

$$|a_n - a_{n,\nu}| > \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^n}$$

ist, $\delta \leq \delta(\varepsilon)$, ε beliebig klein, aber fest.

Wählen wir also die Folge $(\varkappa_a, \nu_a) \equiv (n_a, \nu_a)$, so ist für diese:

$$|a_{\varkappa_a} - a_{\varkappa_a, \nu_a}| > \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_a}} \tag{1}$$

Nun soll $\varrho > R$ sein, es ist also möglich von vornherein $\varepsilon = \frac{\varrho - R}{2}$, $\varrho = R + 2\varepsilon$ zu setzen. Nun folgt

$$|a_{\varkappa_a, \nu_a}| > \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_a}} - |a_{\varkappa_a}|.$$

Es ist aber $\overline{\lim_{\varkappa=\infty}} \sqrt[\varkappa]{|a_\varkappa|} = \frac{1}{\varrho}$, also von einem gewissen $\varkappa$ ab:

$$|a_\varkappa|\varrho^\varkappa < \left(1+\frac{\varepsilon}{2(R+\varepsilon)}\right)^\varkappa; \quad \varkappa \geqq \varkappa(\varepsilon).$$

Mithin:

$$|a_{\varkappa_a,\nu_a}| > \frac{\delta}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_a}} - \frac{1}{(R+2\varepsilon)^{\varkappa_a}}\left(1+\frac{\varepsilon}{2(R+\varepsilon)}\right)^{\varkappa_a}$$

$$= \frac{1}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_a}}\left\{\delta - \left(\frac{1+\frac{\varepsilon}{2(R+\varepsilon)}}{1+\frac{\varepsilon}{R+\varepsilon}}\right)^{\varkappa_a}\right\}$$

demnach für $\varkappa_a > \varkappa(\delta)$, d. h. α gehörig gross gewählt:

$$|a_{\varkappa_a,\nu_a}| > \frac{\delta}{2}\cdot\frac{1}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_a}}$$

oder auch

$$\left|\frac{a_{0,\nu_a}}{a_{\varkappa_a,\varkappa_a}}\right| < |a_{0,\nu_a}|\,\frac{2\,(R+\varepsilon)^{\varkappa_a}}{\delta}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite stellt das Produkt dar aller Wurzeln von

$$a_{0,\nu_a} + a_{1,\nu_a}x + \cdots + a_{\varkappa_a,\nu_a}\cdot x^{\varkappa_a} = f_{\nu_a}^{\varkappa_a}(x).$$

Die Zahl derselben innerhalb $|x| = R+2\varepsilon$ bezeichnen wir mit $\Phi(\nu_a,\varkappa_a)$; die kleinste mit x_{ν_a,ν_a}. Es ist dann (vgl. Kap. II § 2):

$$\left|\frac{a_{0,\nu_a}}{a_{\varkappa_a,\nu_a}}\right| > |x_{\nu_a,\varkappa_a}|^{\Phi(\nu_a,\varkappa_a)}\cdot(R+2\varepsilon)^{\varkappa_a-\Phi(\nu_a,\varkappa_a)}$$

daher:

$$|x_{\nu_a,\varkappa_a}|^{\frac{\Phi(\nu_a,\varkappa_a)}{\varkappa_a}}\cdot(R+2\varepsilon)^{1-\frac{\Phi(\nu_a,\varkappa_a)}{\varkappa_a}} < |a_{0,\nu_a}|^{\frac{1}{\varkappa_a}}\cdot\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{\varkappa_a}}\cdot(R+\varepsilon).$$

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass $a_0 \neq 0$ sei, so folgt hieraus ohne weiteres, dass $\lim\limits_{a=\infty}\frac{\Phi(\nu_a,\varkappa_a)}{\varkappa_a} \neq 0$ sein kann; denn dann ergäbe sich links $R+2\varepsilon$, rechts $R+\varepsilon$ als limes.

Damit ist bewiesen: im Falle $\varrho' > R$, $\varrho > R$ lässt sich für jedes $\varepsilon > 0$ eine

Folge $(\nu_a, \varkappa_a)$ angeben, so dass, wenn $\Phi(\nu_a, \varkappa_a)$ die Anzahl der Nullstellen von $f_{\nu_a}^{\varkappa_a}$ innerhalb $|x| = R + \varepsilon$ bedeutet, $\lim\limits_{a=\infty} \frac{\Phi(\nu_a, \varkappa_a)}{\varkappa_a} \neq 0$ ist.

Dass sogar $\overline{\lim\limits_{a=\infty}} \frac{\Phi(\nu_a, \varkappa_a)}{\varkappa_a} = 1$ ist, erwähnen wir ohne Beweis; es ergibt sich ähnlich wie oben Kap. II § 2 ohne neue Schwierigkeit.

Dieser Satz enthält natürlich noch nicht den Hauptsatz für $\varrho' > R$, $\varrho > R$, er gewährleistet nur eine Häufungsstelle auf dem Kreise. Dagegen ist zu bemerken, dass zum Beweise desselben nur $\varrho > R$, nicht $\varrho' > R$ benutzt worden ist, und wenn wir die Betrachtungen für $\varrho = R$ oben mit denen von Kap. II § 2 kombinieren, so ergibt sich der allgemeine Satz:

Ist $|x| = R$ der grösste Kreis gleichmässiger Konvergenz um 0 einer Folge $f_\nu(x)$, und ε eine beliebig kleine positive Grösse, so lässt sich eine $(\nu, \varkappa)$-Folge angeben, für die $\overline{\lim\limits_{a=\infty}} \frac{\Phi(\nu_a, \varkappa_a)}{\varkappa_a} = 1$ ist, wobei Φ sich auf den Kreis $|x| = R + \varepsilon$ bezieht.

Dieser Satz ist für die Anwendungen wichtig.[1] Speziell besagt er: Es gibt eine $(\nu, \varkappa)$-Folge, dass sowohl die ersten wie die zweiten usw. Wurzeln von $f_{\nu_a}^{\varkappa_a}$, wenn man die Wurzeln der Grösse nach ordnet, auf $|x| = R$ eine Häufungsstelle besitzen.

Um den Beweis des Hauptsatzes zu Ende zu führen, verfahren wir wie folgt. Es sei $x_0 = R e^{i\vartheta_0}$ ein Punkt auf $|x| = R$, der für keine $(\nu, \varkappa)$-Folge ein Häufungspunkt von Nullstellen sei. Dann lässt sich um ihn ein Kreis K beschreiben, so dass innerhalb keine der Funktionen $f_\nu^\varkappa$ von gewissen ν_0 und $\varkappa_0$ ab Nullstellen besitzen. Es gibt aber eine $(\nu, \varkappa)$-Folge, für die:

$$\left| a_{\varkappa_a} - a_{\varkappa_a, \nu_a} \right| > \frac{\delta}{(R + \varepsilon)^{\varkappa_a}}$$

ist, bei festem δ und ε. Dies ε denken wir uns so gewählt, dass ein Stück von

[1] In der vorstehenden Überlegung ist folgender Satz enthalten: Bestimmt man für jede $\nu, \varkappa$)-Folge den $\overline{\lim\limits_{a=\infty}} \sqrt[\varkappa_a]{|a_{\varkappa_a, \nu_a}|} = \frac{1}{\rho_{\varkappa,\nu}}$ und ist ρ'' die untere Grenze aller $\rho_{\varkappa,\nu}$, so ist R gleich der kleinsten unter den drei Zahlen ρ, ρ', ρ''. Man kann diesem Satz eine allgemeinere Form geben, wenn man beachtet, dass $a_{\varkappa_a, \nu_a} \cdot \nu_a!$ der Wert der $\varkappa_a$-ten Ableitung von f_{ν_a} im Punkte 0 ist, und statt des Kreises $|x| = R$ um den Nullpunkt den entsprechenden um einen beliebigen Punkt ξ der Ebene aus $\nu_a! \left(\frac{\partial^{\varkappa_a} f_{\nu_a}}{\partial x^{\varkappa_a}}\right)_{x=\xi}$ bestimmt; es ist damit die Verallgemeinerung der CAUCHY'schen Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe für allgemeine Funktionenfolgen geleistet.

dem Kreise $|x| = R + 3\varepsilon$ noch im Innern von K verläuft, und $\varrho \geqq R + 3\varepsilon$ ist. Nun ist es, ähnlich wie in Kap. II § 1, möglich, für jede der Funktionen $\sqrt[\varkappa]{f_\nu^\varkappa}$, $\varkappa \geqq \varkappa_0$, $\nu \geqq \nu_0$ einen Zweig so zu bestimmen, dass auf diese dann der Satz von Stieltjes Anwendung findet; es folgt dann, wie a. a. O., dass jede Folge von diesen Funktionen $\sqrt[\varkappa]{f_\nu^\varkappa}$, $\varkappa \geqq \varkappa_0$, $\nu \geqq \nu_0$, die einer $(\nu, \varkappa)$-Folge entspricht, in jedem ganz im Innern von K gelegenen Gebiete gleichmässig gegen 1 konvergiert. Wir fassen speziell die Folgen $(\varkappa_\alpha, \nu_\alpha)$ und $(\varkappa_\alpha - 1, \nu_\alpha)$ ins Auge; es ist dann, wie eben gezeigt:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[\varkappa_\alpha]{\left|f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha}\right|} < 1 + \varepsilon_0 \\ \sqrt[\varkappa_\alpha - 1]{\left|f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha - 1}\right|} < 1 + \varepsilon_0 \end{array}\right| \text{ für } \alpha > \alpha(\varepsilon_0)$$

und zwar in jedem ganz im Innern von K gelegenen Gebiete, also auch für Punkte vom absoluten Betrage $R + 3\varepsilon$. Dann ist auch:

$$\left|f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha} - f_{\nu_\alpha}^{\varkappa_\alpha - 1}\right| = \left|a_{\varkappa_\alpha, \nu_\alpha} \cdot x^{\varkappa_\alpha}\right| < 2\,(1 + \varepsilon_0)^{\varkappa_\alpha} \quad \text{für } \alpha > \alpha(\varepsilon_0), \ x \text{ in } K.$$

Es ist aber $\lim\limits_{\alpha = \infty} \sqrt[\varkappa_\alpha]{|a_{\varkappa_\alpha}|} \leqq \frac{1}{\varrho}$, also für $\alpha \geqq \alpha(\delta_0)$:

$$|a_{\varkappa_\alpha}|\,\varrho^{\varkappa_\alpha} \leqq (1 + \delta_0)^{\varkappa_\alpha}$$

oder:

$$|a_{\varkappa_\alpha}| \leqq \frac{(1 + \delta_0)^{\varkappa_\alpha}}{\varrho^{\varkappa_\alpha}} \leqq \frac{(1 + 3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}{(R + 3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}.$$

Andrerseits ist:

$$|a_{\varkappa_\alpha, \nu_\alpha}| \leqq 2 \cdot (1 + \varepsilon_0)^{\varkappa_\alpha} \frac{1}{(R + 3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}$$

$$|a_{\varkappa_\alpha} - a_{\varkappa_\alpha, \nu_\alpha}| < \frac{1}{(R + 3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}} \{(1 + \delta_0)^{\varkappa_\alpha} + 2(1 + \varepsilon)^{\varkappa_\alpha})\}$$

für $\alpha \geqq \alpha(\delta_0)$

$\alpha \geqq \alpha(\varepsilon_0)$.

Da nun aber

$$|a_{\varkappa_\alpha} - a_{\varkappa_\alpha, \nu_\alpha}| > \frac{\delta}{(R + \varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}$$

ist, bei festem δ und ε, so müsste sein:

$$\frac{\delta}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}} < \frac{1}{(R+3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}\{(1+\delta_0)^{\varkappa_\alpha}+2(1+\varepsilon_0)^{\varkappa_\alpha}\}.$$

Wir wählen nun etwa

$$\varepsilon_0 = \delta_0 = \varepsilon\cdot\frac{1}{R+\varepsilon},$$

so ergäbe sich:

$$\delta < \frac{(R+\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}{(R+3\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}\cdot 3\cdot(R+2\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}\cdot\frac{1}{(R+\varepsilon)^{\varkappa_\alpha}}$$

oder:

$$\delta < 3\cdot\left(\frac{R+2\varepsilon}{R+3\varepsilon}\right)^{\varkappa_\alpha} \text{ für } \begin{matrix}\alpha \geq \alpha(\delta_0)\\ \alpha \geq \alpha(\varepsilon_0)\end{matrix};\ \delta,\ \varepsilon \text{ fest.}$$

Das ist aber ausgeschlossen.

Damit ist bewiesen: Für jeden Punkt des Kreises $|x| = R$ lässt sich eine $(\nu, \varkappa)$-Folge finden, deren Nullstellen ihn zum Häufungspunkt haben.

Jetzt beachte man, dass, um eine Folge der im Hauptsatz vorgesehenen Beschaffenheit zu erhalten, es offenbar genügt, nur zu verlangen, dass ihre Nullstellen alle Punkte $x = R\cdot\varepsilon_n$ zu Häufungspunkten hätten, wo ε_n eine beliebige Einheitswurzel sei. Diese aber sind abzählbar, sie seien, irgendwie mit (1), (2), ... (n), ... bezeichnet. Es gibt nun nach dem Bewiesenen eine $(\nu, \varkappa)$-Folge $(\nu, \varkappa)_1$, die unter ihrer Nullstellen beliebig nahe bei (1) belegene besitzt usw. Diese $(\nu, \varkappa)_\alpha$-Folgen denke man sich nun so ausgewählt, dass auch jede unendliche Teilfolge von $(\nu, \varkappa)_\alpha$ den Punkt (α) als Häufungsstelle ihrer Nullstellen besitzt. Dann bilde man eine neue Folge aus allen diesen zusammen, welche mit jeder von ihnen eine unendliche Teilfolge gemeinsam hat. Das geschieht etwa nach folgender Regel. Man nehme 1. $(\nu_1, \varkappa_1)_1$; 2. aus $(\nu, \varkappa)_2$ das erste Indexpaar für das $\nu > \nu_{1,1}$, $\varkappa > \varkappa_{1,1}$ ist; 3. aus $(\nu, \varkappa)_1$ das nächste nunmehr mögliche, das also genügend grosse Indices besitzt; 4. wieder das nächstpassende aus $(\nu, \varkappa)_2$; 5. aus $(\nu, \varkappa)_3$; 6. aus $(\nu, \varkappa)_1$; 7. aus $(\nu, \varkappa)_2$; 8. aus $(\nu, \varkappa)_3$; 9. aus $(\nu, \varkappa)_4$ usw. Man wendet also ein ähnliches Verfahren an wie G. Cantor beim Nachweise transzendenter Zahlen. Diese neue Folge hat dann alle gewünschten Eigenschaften, w. z. b. w.

§ 4.

Anwendungen.

In diesem allgemeineren Falle ist der Hauptsatz nicht von so unmittelbarer Anwendbarkeit wie im zweiten Kapitel. Er deckt jedoch den Grund auf, warum eine Folge wie

$$f_n = e^{x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}} = 1 + x + \cdots + x^n + c_{n+1}x^{n+1} + \cdots$$

nur im Einheitskreise konvergiert, als in der Verteilung der Nullstellen der Abschnitte gegeben und erledigt somit theoretisch vollständig die gestellte Frage. Für die Anwendung kommt er jedoch vor allem deshalb nicht leicht in Betracht, weil über die Nullstellen der Abschnitte einer Funktion, z. B. einer ganzen transzendenten Funktion oder auch eines Polynoms wenig bekannt ist. Nur die einfachsten Fälle lassen sich sofort erledigen. So, wenn eine Folge der von Herrn Pétrovitch betrachteten ganzen transzendenten Funktionen, deren Abschnitte lauter positive (oder reelle) Wurzeln haben, in einem beliebig kleinen Kreise konvergiert, so konvergiert diese Folge immer; und eben dasselbe gilt für Funktionen, deren Abschnitte lauter Wurzeln in einer Halbebene haben, wie sie Herr Pólya behandelt hat und in ähnlichen Fällen.

Dagegen ist der Satz, den die Herren Pólya und Lindwart, und sodann, unabhängig von ihnen, Verfasser über Polynomreihen aufgestellt haben,[1] nicht ohne weiteres den vorstehenden Betrachtungen zugänglich. Dieser Satz lautet: Ist für eine Folge von Polynomen gleichzeitig die Summe $\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left|\frac{1}{x_{\nu,n}}\right|^p < M$, wo p und M feste positive Zahlen sind und $x_{\nu,n}$ die Wurzeln von $P_n(x)$ bedeuten und konvergiert diese Reihe in einem beliebig kleinen Gebiete, so konvergiert sie immer (und stellt eine Funktion von endlichem Geschlecht $\varrho \leqq p$ dar). Die Voraussetzung über die Konvergenz in einem beliebig kleinen Gebiete kann (nach Vitali) durch die andere ersetzt werden, dass Konvergenz in unendlich vielen Punkten mit einem Häufungspunkt im Endlichen statthabe. Um diesen Satz, dessen direkter Beweis nicht sonderlich umständlich ist, mit dem in Vorstehenden entwickelten Tatsachen in Zusammenhang zu bringen, bedarf es einer längeren Überlegung, deren Resultat zwar eigentlich ins Gebiet der Algebra gehört, aber wie es scheint (ausser im Falle $p = 1$) durch die Methoden der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen, allerdings die einfachsten, leichter gewonnen

[1] Vgl. die S. 233 angegebenen Arbeiten.

wird.[1] Die dazu nötigen Hilfsmittel sind sämtlich in der Dissertation des Herrn Lindwart enthalten, der sie jedoch unter einem ganz anderen Gesichtspunkte verwendet. Es möge genügen, den wichtigsten hierhergehörigen Satz ohne Beweis anzuführen, der den erwähnten Satz mit den hier entwickelten verknüpft.

Ist $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_n x^n = 0$ eine algebraische Gleichung mit den Wurzeln $x_1, x_2, \cdots x_n$, und für diese $\sum_1^n \left|\frac{1}{x_i}\right|^p < M$, so sind für alle Abschnitte

$$P_{p+\nu} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_{p+\nu-1} x^{p+\nu-1}$$
$$\nu = 2, 3, \ldots n + 1 - p$$

(und überhaupt für alle Abschnitte), die Summen $\sum_{\nu=1}^{\nu=a} \left|\frac{1}{x_{\nu,a}}\right|^{p+\varepsilon}$, wo $x_{\nu,a}$ die Wurzeln von $P_a(x) = 0$ bedeuten, unterhalb einer nur von $\varepsilon, a_0, \ldots a_{p-1}, M$ (nicht von $a_p, \ldots a_n, n$) abhängigen Grösse A gelegen, für jedes $\varepsilon > 0$.

[1] Vgl. namentlich Kapitel III der Dissertation von Lindwart; in § 2 wird daselbst auch ein algebraischer Beweis des wichtigsten hier in Betracht kommenden Hilfssatzes gegeben.

Inhaltsverzeichnis.

FORTGESETZTE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE ABSCHNITTE VON POTENZREIHEN.

Von

ROBERT JENTZSCH

in Berlin.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

In meiner Inaugural-Dissertation: »Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen«[1] habe ich folgenden Satz ausgesprochen und bewiesen:

Jeder Punkt des Konvergenzkreises einer Potenzreihe ist Häufungspunkt für Nullstellen ihrer Abschnitte.

Liegen daher die Nullstellen der Abschnitte einer Potenzreihe $\sum_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ sämtlich auf einer im Endlichen verlaufenden, den Anfangspunkt 0 einfach umschliessenden Kurve C, so erfüllen sie entweder die Kurve nicht dicht; dann reduziert sich die Potenzreihe auf ein Polynom; oder jeder Punkt der Kurve ist Häufungs-

[1] Berlin 1914.

punkt der Nullstellen und dann ist die Kurve ein Kreis, der Konvergenzkreis der Reihe.

Im ersten Falle hat nämlich nach dem erwähnten Satze die Reihe zunächst den Konvergenzradius ∞, und die durch sie dargestellte ganze Funktion $f(x)$ nur endlich viele Nullstellen x_ν auf C; die Nullstellen der Abschnitte mithin nur endlich viele Häufungsstellen, nämlich diese Nullstellen von $f(x)$, deren Zahl, unter Berücksichtigung der Vielfachheit N sei. Wäre daher $f(x)$ kein Polynom, so hätten in der Nähe mindestens eines Punktes x_ν unendlich viele Abschnitte mehr als N Wurzeln, $f(x)$ müsste daher von höherer als N-ter Ordnung verschwinden.

Im zweiten Falle hat die Reihe endlichen Konvergenzradius R und $|x| = R$ ist ganz von Nullstellen der Abschnitte, bezw. deren Häufungsstellen bedeckt, dieser Kreis muss also ein Teil von C sein; weil C aber den Nullpunkt einfach umschlingt, muss C mit diesem Kreise identisch sein.

Es ergibt sich die Aufgabe, alle Potenzreihen zu bestimmen, deren Abschnitte sämtliche Wurzeln auf dem Konvergenzkreise haben. Wählen wir $R = 1$, so zeigt sich, dass im wesentlichen die Reihe

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

die einzige ist, die sich dieser Eigenschaft erfreut; lässt man Nullstellen der Abschnitte ausser auf $|x| = 1$ auch im Unendlichen zu, so wird man, im wesentlichen, auf die Reihen:

$$1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{\nu k} + \cdots \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet, geführt. Wir zeigen dies in § 1 durch eine elementare algebraische Betrachtung.

Ausser in den bezeichneten Fällen gibt es also Nullstellen, die nicht auf dem Konvergenzkreis liegen. Es kann vorkommen, dass sie sämtlich innerhalb oder sämtlich ausserhalb desselben liegen; im allgemeinen werden sie sich auch im Unendlichen häufen (§ 1 Ende).

Nun sind durch jede Potenzreihe unendlich viele Abschnittsfolgen gegeben, deren jede gleichfalls innerhalb des Konvergenzkreises gleichmässig konvergiert. Es ist von Interesse, auch die Nullstellen der Abschnitte einer bestimmten unendlichen Folge ins Auge zu fassen. Es kann aber vorkommen, dass die Nullstellen einer solchen Folge sich nur im Unendlichen häufen, während die Potenzreihe einen endlichen Konvergenzradius hat. Trotzdem lassen sich manche Beziehungen angeben zwischen den Nullstellen der Abschnitte einer Folge und denen gewisser anderen unendlichen Folgen. Betrachten wir etwa einen Winkelraum aus o:

$$x = r e^{i\Phi} \qquad 0 < \Phi < 2\alpha$$

und liegen die Häufungspunkte der in ihm belegenen Nullstellen der Folge $(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots)$ im Unendlichen, so gilt dasselbe für alle »vorangehenden« Folgen $(\nu_1 - m, \nu_2 - m, \ldots \nu_k - m, \ldots)$, wo m eine ganze Zahl bedeutet. Diese und ähnliche Sätze enthält § 2.

Man könnte nun vermuten, dass wenigstens die 0 und 1 Stellen der Abschnitte jeder unendlichen Folge auf dem ganzen Konvergenzkreis dicht gelegene Häufungsstellen haben, das trifft aber aus dem folgenden merkwürdigen Grunde nicht zu: Es kann vorkommen, dass gewisse unendliche Abschnittsfolgen auch ausserhalb des Konvergenzkreises noch gleichmässig konvergieren, — und so die analytische Fortsetzung der durch die Reihe dargestellten Funktion ausserhalb des Kreises liefern. Diese, wie es scheint, bisher gar nicht beachtete Tatsache, wird im II. Abschnitt § 2, 3 durch Beispiele deutlich gemacht, die wir auf ganz elementarem Wege, allerdings mit Benutzung des VITALI'schen Satzes, gewinnen.

Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 0, von denen gewisse unendliche Abschnittsfolgen in einem den Nullpunkt nicht enthaltenen Gebiete konvergieren, hat unlängst Herr KAKEYA[1] konstruiert; wir stellen seine Methode, ein wenig kürzer, in II, § 1, dar, und gewinnen durch eine leichte Verallgemeinerung folgenden Satz, der aufs deutlichste zeigt, dass es sich bei diesen Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 0 und bei den sodann behandelten mit endlichem Konvergenzkreis um wesentlich verschiedene Verhältnisse handelt.

Sind endlich oder abzählbar unendlich viele, den Nullpunkt nicht enthaltende Gebiete $G_1, G_2, \ldots$ und in diesen je endlich (oder abzählbar unendlich viele) reguläre Funktionen $f_{11} \ldots f_{1k_1}, f_{21} \ldots f_{2k_2}, \ldots$ gegeben, so lassen sich Potenzreihen (mit im allgemeinen verschwindendem Konvergenzradius) angeben, von denen gewisse unendliche Abschnittsfolgen in G_ν (gleichmässig in jedem in G_ν gelegenen inneren Gebiete) gegen $f_{\nu,k}$ konvergieren ($\nu = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots \nu_k$).

I. Abschnitt: Über die Nullstellen der Abschnitte von Potenzreihen.

§ 1. *Elementare algebraische Betrachtungen.*

Die Potenzreihe $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ hat die Eigentümlichkeit, dass die Nullstellen ihrer sämtlichen Abschnitte auf dem Einheitskreise liegen; es fragt

[1] KAKEYA, On some applications of a Theorem about polynomial sequences. The Tôhóku Mathematical Journal, Vol. 5, Nr 1, 2. Cf. die im selben Heft enthaltene Note von J. PÁL. (1914.)

sich, ob noch andere Potenzreihen ausser den durch eine Substitution $x' = e^{i\vartheta} x$ aus der angegebenen hervorgehenden dieselbe Eigenschaft besitzen. Um nachzuweisen, dass diese Frage zu verneinen ist, kann man sich einer ganz elementaren algebraischen Betrachtung bedienen, die vielleicht auch sonst nicht ganz ohne Interesse ist.

Sei $P(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^n$ ein Polynom n-ten Grades, so lässt sich dessen absoluter Betrag auf dem Einheitskreise bekanntlich schreiben:

$$
\begin{aligned}
|P_n(x)|^2 &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\left(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \frac{1}{x} + \cdots + \bar{a}_n \frac{1}{x^n}\right) \\
&= P_n(x) \,.\, \bar{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) \\
(1) \qquad &= \frac{1}{x^n}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)(\bar{a}_0 x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n) \\
&= \frac{1}{x^n} P_n(x) \,.\, Q_n(x) = \frac{1}{x^n} R_{2n}(x).
\end{aligned}
$$

Wenn nun die Nullstelle x_1 einer Gleichung:

$$(2) \qquad P_n(x) = \alpha$$

auf dem Einheitskreise liegt, so hat die Gleichung $2n$-ten Grades:

$$(3) \qquad R_{2n}(x) - |\alpha|^2 x^n = 0$$

ebenfalls die Wurzel x_1 in mindestens demselben Vielfachheitsgrade auf dem Einheitskreise.

Daraus folgt: Falls sich (3) nicht auf eine Identität reduziert, gibt es höchstens $2n$ Punkte auf dem Einheitskreise, für die das Polynom $P_n(x)$ gleichen absoluten Betrag hat. (3) ist aber nur dann eine Identität, wenn $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ ist; $P_n(x)$ also aus dem einen Gliede $a_n x^n$; $|a_n| = |\alpha|$ besteht.

Es ist auch klar, wie sich diese (bekannten) Überlegungen, statt für den Einheitskreis für Kurven durchführen lassen, die durch eine Gleichung $\bar{x} = Q(x)$ oder, wenn man die einfachsten Sätze über Elimination benutzt, durch eine Gleichung $Q(x, \bar{x}) = 0$ gegeben sind, wo die Q rationale Funktionen bedeuten.

Aus dem Vorstehenden folgt speziell, dass es höchstens 2 Zahlen α, β von gleichem absolutem Betrage geben kann, sodass $P_n(x) - \alpha$ und $P_n(x) - \beta$ sämtliche Nullstellen auf den Einheitskreise haben. Es soll gezeigt werden, dass es im allgemeinen auch nicht zwei derartige Zahlen geben kann; es soll also bewie-

sen werden: Hat eine Gleichung $P_n(x) = \alpha$ alle Wurzeln auf dem Einheitskreise, so hat jede andere Gleichung $P_n(x) = \beta$; $\alpha \neq \beta$, $|\alpha| = |\beta|$ mindestens eine Wurzel, die nicht auf dem Einheitskreise liegt, sofern nicht $P_n(x)$ sich auf $a_n x^n$ reduziert, $|a_n| = |\alpha| = |\beta|$.

Auch dieser Satz ist fast trivial; gibt es nämlich 2 Zahlen α; β; $\alpha \neq \beta$, $|\alpha| = |\beta|$, sodass $(P_n(x) - \alpha)(P_n(x) - \beta) = 0$ alle Wurzeln auf dem Einheitskreise hat, so ist:

$$|a_0 - \alpha| = |a_0 - \beta| = |a_n|$$

und

$$|P_n(x) - a_0|^2 = (a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)\left(\bar{a}_1 \frac{1}{x} + \bar{a}_2 \frac{1}{x^2} + \cdots + \bar{a}_n \frac{1}{x^n}\right)$$

$$= (a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1})(\bar{a}_1 x^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n) \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$$

für $|x| = 1$, und daher hätte die Gleichung $(2n-2)$-ten Grades

$$(a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1})(\bar{a}_1 x^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1} x + \bar{a}_n) - |a_n|^2 x^{n-1} = 0$$

$2n$ Wurzeln auf dem Einheitskreise, was ausgeschlossen ist, sofern sie sich nicht auf die Identität reduziert. Damit ist der Beweis fertig.

Anwendungen. Es sei eine Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

vorgelegt, deren sämtliche Abschnitte all ihre Nullstellen auf dem Einheitskreise haben; man darf annehmen $a_0 = a_1 = 1$. Es soll gezeigt werden, dass dann auch $a_n = 1$ ist. Dies sei für $n \leq \nu$ bewiesen, die Gleichung:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu + a_{\nu+1} x^{\nu+1} = 0$$

hat dann all ihre Nullstellen auf dem Einheitskreise, ebenso:

$$x^{\nu+1} + x^\nu + \cdots + x + a_{\nu+1} = 0$$

aber auch:

$$x^{\nu+1} + x^\nu + \cdots + x + 1 = 0.$$

Da $|a_{\nu+1}| = 1$ ist, genügt die Anwendung des zuletzt ausgesprochenen Satzes, um einzusehen, dass $a_{\nu+1} = 1$ sein muss.

Etwas allgemeiner ist folgende Frage: Welche Potenzreihen haben als Nullstellen ihrer Abschnitte nur auf dem Einheitskreis und im Unendlichen gelegene Punkte? Es sei:

$$1 + x^{\nu} + a_{\nu+1} x^{\nu+1} + \cdots$$

eine solche; wir behaupten, es ist dann $a_n = 0$ für $n \neq k \cdot \nu$; $a_{k \cdot \nu} = 1$, wo k eine beliebige positive Zahl bedeute. Dies sei bewiesen für $k \leq m$, die Potenzreihe laute also:

$$1 + x^{\nu} + x^{2\nu} + \cdots + x^{m\nu} + a_{\lambda} x^{\lambda} + \cdots$$

Der Abschnitt: $1 + x^{\nu} + x^{2\nu} + \cdots + x^{m\nu} + a_{\lambda} x^{\lambda}$ hat alle Nullstellen auf dem Einheitskreis, ebenso das Polynom:

$$x^{\lambda} + x^{\lambda-\nu} + x^{\lambda-2\nu} + \cdots + x^{\lambda-m\nu} + a_{\lambda} = P_{\lambda}(x) + a_{\lambda}.$$

Daher ist $|a_{\lambda}| = 1$ und a_{λ} reell, da sonst das Polynom $P_{\lambda}(x) + \bar{a}_{\lambda}$ ebenfalls alle Nullstellen auf dem Einheitskreise, P_{λ} also in 2λ Punkten auf dem Einheitskreise den gleichen absoluten Betrag 1 hätte.

Es sei jetzt ϱ eine primitive ν-te Einheitswurzel; seien $x_1, x_2, \ldots$ die Wurzeln von $P_{\lambda}(x) = -a_{\lambda}$, so sind $\varrho x_1, \varrho x_2, \ldots$ die Wurzeln von $P_{\lambda}(x) = -a_{\lambda} \varrho^{\lambda}$, also Stellen, wo $P_{\lambda}(x)$ gleichfalls den absoluten Betrag 1 hat, die sämtlich auf dem Einheitskreise liegen. Nach unserem Hilfssatz muss also sein: $a_{\lambda} = a_{\lambda} \cdot \varrho^{\lambda}$

$$\varrho^{\lambda} = 1;$$

es ist also λ durch ν teilbar, $\lambda = n\nu$.

Das Polynom: $1 + x + x^2 + \cdots + x^m + a_{\lambda} x^n = P(x)$, wo $a_{\lambda} = \pm 1$, hat gleichfalls alle Nullstellen auf dem Einheitskreise, mit x_{ν} ist auch $\bar{x}_{\nu} = \frac{1}{x_{\nu}}$ Nullstelle von gleichem Vielfachheitsgrad. $P(1)$ verschwindet nicht, $P(-1)$ höchstens von erster Ordnung, denn sonst müsste $P(1) = 0$ sein, was für $n > m$ ausgeschlossen ist. Mithin ist $P(x)$ eine reziproke Gleichung $n = m + 1$; $a_{\lambda} = 1$. W. z. b. w.

Herr Prof. Frobenius hat erheblich einfachere Beweise der beiden eben dargelegten Sätze bemerkt, welche ich, mit seiner gütigen Erlaubnis, hier einfüge. Prof. Frobenius schliesst folgendermassen: liegen die Nullstellen von $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ alle auf dem Einheitskreise, so ist:

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

$$\overline{P}(x) = \bar{a}_0 (1 - x x_1)(1 - x x_2) \ldots (1 - x x_n), \text{ weil } \bar{x}_{\nu} = \frac{1}{x_{\nu}} \text{ ist,}$$

mithin: $$\frac{P(x)}{\bar{a}_0} = \frac{1}{a_n} x^n P\left(\frac{1}{x}\right),$$

folglich: $$\frac{a_{\mu}}{\bar{a}_0} = \frac{1}{a_n} \cdot a_{n-\mu}.$$

Hat also eine Gleichung $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + a_n x^n = 0$ alle Wurzeln auf dem Einheitskreise, so folgt sofort $a_n \neq 0$ und dann $a_n = 1$. Hat ferner eine Gleichung $1 + x^\nu + x^{2\nu} + \cdots + x^{n\nu} + a_k x^k = 0$ alle Wurzeln auf dem Einheitskreise, so folgt entsprechend

$$a_{k-1} = a_{k-2} = \cdots = a_{k-\nu+1} = 0$$

$$a_{k-\nu} \quad 0$$

und daher ist $k = (n + 1)\nu$. Ferner ist:

$$\frac{a_\nu}{a_0} = \frac{1}{a_k} a_{k-\nu}$$

also, weil $\bar{a}_0 = \bar{a}_\nu = a_{k-\nu} = 1$ ist, $a_k = 1$. W. z. b. w.

Hat die durch die Reihe dargestellte Funktion auf dem Einheitskreise nur einen Pol, so liegen keine Häufungsstellen der Nullstellen ausserhalb des Einheitskreises. (Diss. S. 21—23.)[1]

Es ist aber auch leicht, weitergehende Klassen von Reihen anzugeben, bei denen alle Nullstellen der Abschnitte innerhalb (bezw. ausserhalb) des Konvergenzkreises liegen.

Nach einem bekannten algebraischen Satze von Kakeya liegen nämlich die Nullstellen eines Polynoms:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

dessen Koeffizienten sämtlich reell sind und der Bedingung:

$$0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$$

genügen, sämtlich innerhalb des Einheitskreises. Eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1 hat also alle Nullstellen ihrer Abschnitte innerhalb, bezw. ausserhalb des Konvergenzkreises, wenn ihrer Koeffizienten alle positiv sind und der Bedingung $a_{n-1} < a_n$ bezw. $a_{n-1} > a_n$ genügen.[2] Hierher gehört z. B. die Potenzentwickelung von $-\log(1 - x)$.

[1] Der dort angegebene Beweis lässt sich leicht auf folgende Behauptung ausdehnen: Hat $f(x) = \Sigma a_\nu x^\nu$ auf dem Einheitskreise nur Pole, ist also $f(x) = R(x) + \Sigma b_\nu x^\nu$, wo $R(x)$ eine rationale Funktion ist und $\Sigma b_\nu x^\nu$ einen grösseren Konvergenzradius hat wie $\Sigma a_\nu x^\nu$, so hat für gehörig grosse n der n-ten Abschnitt der Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ in jedem Kreis $|x| = R + \varepsilon$ (ε bel. klein) ebenso viele Wurzeln wie der entsprechende Abschnitt der Entwickelung von $R(x)$.

[2] Es sind das diejenigen speziellen Reihen, für die die Herren Pólya und Lindwart den eingangs erwähnten allgemeinen Satz meiner Diss. zuerst bewiesen haben.

Aus einem Satze des folgenden § 2 geht hervor, dass die Nullstellen einer unendlichen Folge von Abschnitten für sich die ganze Peripherie $|x| = 1$ mit Häufungspunkten erfüllen, wenn die Nullstellen alle innerhalb des Einheitskreises liegen, also speziell bei den zuletzt erwähnten Reihen.

§ 2. *Über die Nullstellen der Abschnittsfolgen.*

Es lassen sich immer ganze transzendente Funktionen ohne Nullstellen angeben, deren Potenzreihe beliebig vorgegebene Anfangskoeffizienten hat. Denn es seien etwa in $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ $a_0, a_1, \dots a_n$, $|a_0| \neq 0$, vorgegeben, gesucht wird eine ganze Funktion $g(x) = \sum_0^\infty b_\nu x^\nu$, sodass $e^{g(x)} = \sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ wird. Die Koeffizienten $b_0, b_1, \dots b_n$, sind dann durch die Gleichungen

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
e^{b_0} &= a_0, \\
b_1 e^{b_0} &= a_1, \\
&\dots \\
b_n e^{b_0} + \Phi(b_0, \dots b_{n-1}) &= a_n
\end{aligned}
$$

bestimmt; $b_{n+1}, \dots$ bleiben willkürlich. Sei danach ein Polynom n_1-ten Grades $P_{n_1}(x)$ gegeben, das keine Nullstellen ≤ 1 hat, so lässt sich demnach eine ganze Funktion ohne Nullstellen mit den Anfangsgliedern $P_{n_1}(x) + x^{n_1+1}$ bilden; daher auch ein Polynom $P_{n_2} (n_2 > n_1 + 1)$, das für $|x| \leq 2$ keine Nullstellen hat; dann benutzt man $P_{n_2} + x^{n_2+1}$ und bildet fortlaufend entsprechende ganze Funktionen und Polynome. Die so erhaltene Potenzreihe, deren Abschnitte $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots$ keine Häufungsstelle von Nullstellen im Endlichen besitzen, hat jedenfalls einen Konvergenzradius < 1, der aber vielleicht 0 ist.

Um das zu vermeiden, verfahren wir etwa folgendermassen. Die Form der Gleichungen (1) zeigt, dass bei positiven b_ν die dann gleichfalls positiven a_ν monoton mit den b_ν wachsen. Betrachtet man nun etwa $e^{x+\frac{x^2}{2}}$, so sind die Koeffizienten der entsprechenden Potenzreihe sämtlich positiv und ≤ 1, denn es ist:

$$e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad \text{für } |x| < 1,$$

man gehe bis zu $a_{n_2} x^{n_2}$, so dass $1 + x + x^2 + \cdots + a_{n_2} x^{n_2}$ keine Nullstellen < 2 hat. In der Entwickelung der Funktion $e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^{n_2+1}}{n_2+1}}$ gilt über die Koeffizienten

das Gleiche, aber der Koeffizient von x^{n_2+1} ist grösser als $\frac{1}{n_2+1}$, während die Koeffizienten bis $a_{n_2}x^{n_2}$ dieselben bleiben. Man sieht, wie die Methode weiter verläuft. Man kann schrittweise eine Indexfolge $n_2, n_3, \ldots$ konstruieren, sodass in der Entwickelung der Funktion $e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^{n_2+1}}{n_2+1}+\frac{x^{n_3+1}}{n_3+1}+\cdots}$ Abschnitte auftreten, deren Nullstellen bezw. ausserhalb der Kreise $|x|=2, 3, \ldots$ um den Nullpunkt liegen, und der Konvergenzradius dieser Reihe ist 1.[1]

Es sei nun eine beliebige Potenzreihe gegeben:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1).$$

Eine unendliche Folge ihrer Abschnitte bezeichnen wir mit $(\nu_1, \nu_2, \ldots)$, verstehen darunter also die Folge der Abschnitte:

$$P_{\nu_k}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{\nu_k} x^{\nu_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Durch das eben beregte Beispiel ist also gezeigt: die Nullstellen einer Abschnittsfolge brauchen keinen Häufungspunkt im Endlichen zu haben, auch wenn der Konvergenzkreis ein endlicher ist.

Dennoch bestehen zwischen den verschiedenen unendlichen Folgen (die im Innern des Konvergenzkreises sämtlich gleichmässig gegen dieselbe Funktion konvergieren) jedenfalls gewisse Zusammenhänge. Einige davon, die sich auf Funktionen von endlichem Geschlecht beziehen, gehen aus den Sätzen von PÓLYA über Polynomreihen, sowie aus den am Schluss meiner Dissertation angedeuteten algebraischen Sätzen hervor, sie sind aber sehr speziell.

Nehmen wir nun an, dass die Folge $(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots)$ in dem unendlichen Winkelraum: $x = re^{i\Phi}$ $0 \leq r < \infty$, $0 < \Phi < 2\alpha$ keine Häufungsstelle von Nullstellen, die im Endlichen gelegen ist, habe, so lassen sich unter dieser Voraussetzung folgende Sätze beweisen:

1. Es ist $\lim \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|} = 0$.

2. Auch jede der Folgen $(\nu_1 - l, \nu_2 - l, \nu_3 - l, \ldots \nu_k - l, \ldots)$, wo l eine ganze Zahl bedeutet, hat dieselbe Eigenschaft.

---

[1] Die Funktionen $f_\nu(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^\nu}{\nu}}$, $\lim_{\nu=\infty} f_\nu(x) = \frac{1}{1-x}$ habe ich schon Diss. S. 32 in ähnlichem Zusammenhange betrachtet, bin aber damals nicht bis zu diesem Resultat gelangt. Man kann es einrichten, dass $|x|=1$ natürliche Grenze wird, indem man noch $n_\nu > n_{\nu-1} + \nu$ wählt dann wird nämlich $\lim_{\nu=\infty} n_\nu - n_{\nu-1} = \infty$ (Satz von HADAMARD—FABRY).

Zum Beweise benutzen wir folgenden Hilfssatz der Diss. (S. 14—16).[1] Falls $P_{\nu_1}, P_{\nu_2}, \ldots P_{\nu_k}, \ldots$ auf einem Bogen des Konvergenzkreises keine Häufungsstellen von Nullstellen haben, ist $\lim\limits_{k=\infty} \sqrt[\nu_k]{P_{\nu_k}(x)}$ bei passender Fixierung der Funktionszweige, gleichmässig in jedem Gebiete gleich 1, das mit einem endlichen Stück an diesen Bogen stösst und in dem keine Häufungspunkte von Nullstellen dieser Abschnitte im Innern oder auf dem Rande liegen. Daraus folgt in unserem Falle:

Es ist: $\lim\limits_{k=\infty} \sqrt[\nu_k]{P_{\nu_k}(x)} = 1$ gleichmässig für jedes endliche im Winkelraum gelegene innere Gebiet. Für $x = r e^{i\alpha}$ ist aber:

$$P_{\nu_k}(x) = a_{\nu_k}(x - x_{\nu_k, 1})(x - x_{\nu_k, 2}) \cdots (x - x_{\nu_k, \nu_k}),$$

$$|P_{\nu_k}(x)| \geqq |a_{\nu_k}| (r \sin \alpha)^{\nu_k},$$

$$\sqrt[\nu_k]{|P_{\nu_k}(x)|} \geqq r \sin \alpha \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|}.$$

Da α endlich $\neq 0$ ist, r aber beliebig gross gewählt werden darf, der $\lim\limits_{k=\infty} \sqrt[\nu_k]{P_{\nu_k}(x)}$ jedoch 1 ist, folgt die Behauptung 1. Beh. 2. ist eine Folge der gleichmässigen Konvergenz. Habe nämlich die Folge $(\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \ldots \nu_k - 1, \ldots)$ eine Häufungsstelle ξ von Nullpunkten innerhalb des Winkelraumes, und seien die entsprechenden Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k, \ldots$ so ist auch:

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[\nu_k]{P_{\nu_k}(\xi_k)} = 1$$

oder

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|}\, |\xi_k| = 1,$$

$$|\xi| . \lim_{k=\infty} \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|} = 1,$$

was nach 1 ausgeschlossen ist. Durch Fortsetzung dieses Schlusses folgt 2.

Betrachtet man jetzt eine unendliche Folge, die Häufungsstellen von Nullstellen in dem Winkelraum im Endlichen besitzt: $(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \ldots)$, und solche gibt es, so geht aus 2. hervor, dass auch für die »nach rechts benachbarten« Folgen $(\mu_1 + l, \mu_2 + l, \ldots)$ (l ganz, positiv) dasselbe zutrifft. Betrachtet man die rechte benachbarte Folge einer ν-Folge, so hat diese in dem Winkelraum nur

[1] Er ist dort nicht besonders formuliert, doch ist sein Beweis dort vollständig entwickelt.

Häufungspunkte ξ von Nullstellen, die der Bedingung $\lim \sqrt[\nu'_k+1]{|a_{\nu'_k+1}|}\,|\xi| = 1$ genügen,[1] und ähnlicher Sätze liessen sich noch mehrere anführen.

Bei alledem ist durchaus massgebend, dass in der Menge der (nicht abzählbar unendlich vielen) Folgen durch die Beziehung: eine Folge soll vor einer anderen vorangehen, wenn für sie selbst oder die durch Wiederholung von Abschnitten aus ihr hervorgehenden Folgen der Grad des k-ten Abschnitts der ersten kleiner ist als der des k-ten Abschnitts der zweiten die Menge nicht geordnet wird.

Nun liegt es nahe, gemäss dem nach den Untersuchungen von Landau und Carathéodory[2] gültigen Satz, die 0- und 1-Stellen der Abschnitte einer Folge zu betrachten. Hier aber stösst man auf die merkwürdige Tatsache, dass dieser Satz hier nicht anwendbar ist, weil gewisse Abschnittsfolgen auch ausserhalb des Konvergenzkreises konvergieren können.

Im zweiten Abschnitt dieser Arbeit behandeln wir diese Erscheinung, indem wir sehr weit reichende Beispiele direkt konstruieren. Der Weg, etwa Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 1 zu bilden, von denen unendlich viele Abschnitte etwa für $R(x) > 0$ keine 0- und 1-Stellen haben, unter Benutzung der Bedingungen für den Variabilitätsbereich der Koeffizienten solcher Abschnitte, scheint schwer gangbar zu sein; andererseits werfen unsere Beispiele ein gewisses Licht auf diese Ungleichheitsbedingungen.[3]

II. Abschnitt: Über die Konvergenz der Abschnittsfolgen von Potenzreihen.

§ 1. *Über die Abschnitte von Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 0.*

Wir schicken der hier eigentlich wichtigen Frage über Potenzreihen mit endlichem Konvergenzradius Einiges über solche mit dem Konvergenzradius 0 vorauf, da dieser unlängst Gegenstand einer interessanten Arbeit von S. Kakeya gewesen sind, deren Inhalt wir, ihn verallgemeinernd, kurz, wie folgt, darlegen.

Es sei ein den Nullpunkt nicht enthaltendes, endliches, ganz in $|x| \leq R$ gelegenes Gebiet G gegeben und in ihm eine analytische Funktion $f(x)$; G werde

[1] $(\nu'_k + 1)$ sei die Teilfolge von $(\nu_k + 1)$, die den betreffenden Punkt liefert.

[2] Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen. S. B. Berlin 1911. P. 587—613.

[3] Vergl. dafür ausser den Arbeiten von Carathéodory, Toeplitz, J. Schur und Frobenius besonders die unlängst erschienene Arbeit von G. Pick: Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden. Math. Ann. Bd. 77. (1915).

durch $G_1, G_2, \ldots$ so approximiert, dass G_{n+1} G_n enthält, und jeder Punkt von G in einem G_ν vorkommt. Es sei P_{n_1} ein Polynom, so dass:

$$|f(z) - P_{n_1}(z)| < 1 \text{ für } G_1 \text{ ist.}$$

Ferner:

$$\left| \frac{f(z) - P_{n_1}(z)}{z^{n_1+1}} - P_{n_2} \right| < \frac{1}{2 R^{n_1+1}} \text{ für } G_2,$$

$$\left| \frac{f(z) - P_{n_1}(z) - P_{n_2}(z) z^{n_1+1}}{z^{n_1+n_2+2}} - P_{n_3} \right| < \frac{1}{3 R^{n_1+n_2+2}} \text{ für } G_3$$

usw. Solche Polynome gibt es, da $z = 0$ nicht in G liegt. Die Potenzreihe $P_{n_1} + z^{n_1+1} P_{n_2} + z^{n_1+n_2+2} P_{n_3} + \cdots$ hat dann die Eigenschaft, dass eine gewisse ihrer Abschnittsfolgen für jedes innere Gebiet von G gleichmässig gegen $f(z)$ konvergiert. Es ist nämlich z. B. für G_1:

$$|f - P_{n_1}| < 1,$$

$$|f - P_{n_1} - z^{n_1+1} P_{n_2}| < \frac{1}{2},$$

$$|f - P_{n_1} - z^{n_1+1} P_{n_2} - z^{n_1+n_2+2} P_{n_3}| < \frac{1}{3} \text{ u. s. f.}$$

Augenscheinlich kommt man bei dieser Konstruktion auf Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 0, falls man annimmt, dass der Nullpunkt auf der Grenze von G liegt und ein singulärer Punkt für f ist. In anderen Fällen wird man nichts über den Konvergenzradius aussagen können.[1]

Es seien jetzt abzählbar unendlich viele im Endlichen liegende, den Nullpunkt nicht enthaltende Gebiete und Funktionen darin gegeben[2]

$$G_1\colon f_{11}, f_{12}, \ldots f_{1\nu_1}, \ldots, g_1 \text{ ganz in } |x| \leq R_1 \text{ gelegen,}$$
$$G_2\colon f_{21}, f_{22}, \ldots f_{2\nu_2}, \ldots, g_2 \text{ ganz in } |x| \leq R_2 \text{ gelegen}$$

usw. Man sucht P_{n_1} so, dass:

$$|f_{11} - P_{n_1}| < 1 \text{ ist in } G_1,$$

sodann $P_{n_2}, P_{n_3}, \ldots$ dass:

$$\left| \frac{f_{12} - P_{n_1}}{z^{n_1+1}} - P_{n_2} \right| < \frac{1}{2 R_1^{n_1+1}} \text{ ist in } G_1,$$

[1] Die Konstruktion bei Kakeya ist ein klein wenig anders, sodass er immer den Konvergenzradius 0 erhält.

[2] Die Funktionen seien auch auf den Rändern noch regulär, sonst müsste man die Gebiete auch erst, wie oben, approximieren.

$$\left| \frac{f_{21} - P_{n_1} - z^{n_1+1} P_{n_2}}{z^{n_1+n_2+2}} - P_{n_3} \right| < \frac{1}{3} \frac{1}{R_2^{n_1+n_2+1}} \text{ in } g_2,$$

$$\left| \frac{f_{11} - P_{n_1} - z^{n_1+1} P_{n_2} - z^{n_1+n_2+2} P_{n_3}}{z^{n_1+n_2+n_3+3}} - P_{n_4} \right| < \frac{1}{4} \frac{1}{R_1^{n_1+n_2+n_3+3}} \text{ in } g_1$$

usw.; nach dem bekannten Diagonalverfahren Gebiete und Funktionen abwechseln lassend und immer wieder von vorne beginnend erhält man eine Potenzreihe, die jede der Funktionen in dem entsprechenden Gebiet mit einen bestimmten Abschnittsfolge gleichmässig approximiert. Damit ist der Satz, der am Ende der Einleitung angegeben ist, bewiesen.[1]

§ 2. *Über die Konvergenz von Abschnittsfolgen von Potenzreihen mit endlichem Konvergenzkreise ausserhalb desselben.*

Wir gehen nunmehr dazu über, die angekündigten Beispiele zu entwickeln. Sie sind so gehalten, dass selbst eine zahlenmässige Konstruktion solcher Reihen möglich wäre.

Die absoluten Beträge der Funktionen

$$f_\nu(x) = x^\nu \cdot e^{-\nu(x+1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

liegen in dem aus dem Halbkreis $|x| \leq 1$, $\Re(x) < 0$ und dem Streifen $\Re(x) \geq 0$, $|\Im(x)| \leq 1$ zusammengesetzten Gebiete G_1 unterhalb 1. Wird $x = u + iv$ gesetzt, so ist nämlich zunächst für $|x| \leq 1$:

$$|f_\nu(x)| < e^{-\nu(u+1)} \leq 1, \text{ da } u > -1 \text{ ist},$$

für $|v| \leq 1$, $u \geq 0$ ist

$$|f_\nu(x)| = (u^2 + v^2)^{\frac{\nu}{2}} e^{-\nu(u+1)} < (u^2 + 1)^{\frac{\nu}{2}} e^{-\nu(u+1)}$$

$$< (u + 1)^\nu e^{-\nu(u+1)} < 1.$$

Setzt man:

$$f_\nu(x) = e^{-\nu} x^\nu + a_{\nu+1}^{(\nu)} x^{\nu+1} + a_{\nu+2}^{(\nu)} x^{\nu+2} + \cdots \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

so sind alle Koeffizienten dieser Potenzreihe kleiner als 1.

Ich betrachte jetzt ein Gebiet G, gebildet aus dem erwähnten Halbkreis und einem endlichen Stücke des Streifens, etwa den Rechteck $0 \leq \Re(x) \leq 10$,

[1] Vgl. P. Montel, Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, Paris 1910, für eine ähnliche Verallgemeinerung.

$|\mathfrak{Z}(x)| \leq 1$. Es sei P_{ν_1} ein Abschnitt der Potenzreihe für $f_1(x)$ von der Beschaffenheit, dass:

$$|f_1 - P_{\nu_1}| < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

sei in G. Ebenda ist dann, da G ein Teil von G_1 ist:

$$|P_{\nu_1}| < 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

P_{ν_1} habe den Grad ν_1; da die f_ν ganze transzendente Funktionen sind, ist die Bestimmung der P_{ν_1} usw. möglich, ein wie grosser Teil des Streifens auch gewählt werde. Ferner sei P_{ν_2} so bestimmt, dass:

$$\left|\left(\frac{1}{\nu_1}\right)^2 f_{\nu_1+1} - P_{\nu_2}\right| < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ ist in } G.$$

Dann ist ebenda:

$$|P_{\nu_2}| < \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu_1}\right)^2,$$

ν_2 sei der Grad von P_{ν_2}. Dann sucht man P_{ν_3} so, dass:

$$\left|\left(\frac{1}{\nu_2}\right)^2 f_{\nu_2+1} - P_{\nu_3}\right| < \left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{ ist in } G, \text{ usw.}$$

Betrachtet man jetzt die Reihe $P_{\nu_1} + P_{\nu_2} + P_{\nu_3} + \cdots$, so ist das eine Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu x^\nu$, denn es ist $\nu_2 \geq \nu_1 + 1$ gemäss dem Vorhergehenden, da die Entwickelung von f_{ν_1+1} mit der Potenz x^{ν_1+1} erst beginnt.

Die Koeffizienten dieser Reihe $\sum_1^{\infty} b_\nu x^\nu$ sind dem absoluten Betrage nach alle kleiner als 1; der Konvergenzradius also mindestens 1. Ferner ist der Koeffizient von x: e^{-1}, der von x^{ν_1+1}: $\left(\frac{1}{\nu_1}\right)^2 e^{-(\nu_1+1)}$, der von x^{ν_2+1}: $\left(\frac{1}{\nu_2}\right)^2 e^{-(\nu_2+1)}$, allgemein:

$$b_{\nu_k+1} = e^{-(\nu_k+1)} \frac{1}{\nu_k^2},$$

$$\lim_{k=\infty} |b_{\nu_k+1}|^{\frac{1}{\nu_k+1}} = e^{-1} \lim_{k=\infty} \left(\frac{1}{\nu_k^2}\right)^{\frac{1}{\nu_k+1}} = \frac{1}{e}.$$

Also $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} \geq \frac{1}{e}$; der Konvergenzradius ist also höchstens e, er liegt zwischen 1 und e. Das Gebiet G reicht also sicher über den Konvergenzkreis hinaus. Aber in G ist:

$$|P_{\nu_1}| < 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$|P_{\nu_1} + P_{\nu_2}| < 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu_1}\right)^2,$$

$$|P_{\nu_1} + P_{\nu_2} + P_{\nu_3}| < 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu_2}\right)^2.$$

Daher allgemein:

$$|P_{\nu_1} + P_{\nu_2} + \cdots + P_{\nu_k}| < 2\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots\right) < 2\frac{\pi^2}{6}$$

für jedes k; die Folge der Abschnitte P_{ν_1}, P_{ν_2}, P_{ν_3}, ... der Potenzreihe ist demnach in G gleichmässig konvergent. Denn die absoluten Beträge aller dieser Abschnitte liegen in G unterhalb einer gemeinsamen Schranke und die Folge konvergiert ferner in dem Teile von G, der zum Konvergenzkreise gehört, sodass der Satz von STIELTJES—VITALI zur Anwendung kommen kann.

§ 3. *Ein weiteres Beispiel.*

Noch weiter führt eine etwas andere Methode. Man kann darnach nämlich Potenzreihen mit endlichem, von 0 verschiedenen Konvergenzradius herstellen, von denen eine bestimmte Folge von Abschnitten in jedem beschränkten inneren Teile eines bis ins Unendliche reichenden Gebietes, etwa einer Halbebene, gleichmässig konvergiert.

Die ganze transzendente Funktion:

$$f_1(x) = \frac{1 - e^{-x}}{(1 + e)^2}$$

bleibt für $\Re(x) > -1$ dem absoluten Werte nach unter $\frac{1}{e+1}$. Ihre Potenzentwickelung sei:

$$f_1(x) = \frac{x}{(e+1)^2} + a_2^{(1)} x^2 + a_3^{(1)} x^3 + \cdots + a_\nu^{(1)} x^\nu + \cdots$$

Die ganze Funktion:

$$f_n(x) = f_1(x) + [1 - a_n^{(1)}(e+1)^{2n}](f_1(x))^n$$

hat die Potenzentwickelung:

$$f_n(x) = \frac{x}{(e+1)^2} + a_2^{(1)} x^2 + \cdots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1}$$

$$+ \frac{x^n}{(e+1)^{2n}} + a_{n+1}^{(n)} x^{n+1} + \cdots,$$

sie stimmt also in den ersten n Koeffizienten mit der von $f_1(x)$ überein, während sich der von x^n leicht angeben lässt.

Es sei nun eine Folge von positiven ganzen Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ so gewählt, dass $b_0 = \frac{1}{e+1}$, $b_1 = 2\, b_0^{r_1}$, $b_2 = 2\,(b_0 + b_1)^{r_2}$, $\ldots$ $b_k = 2\,(b_0 + b_1 + \cdots + b_{k+1})^{r_k}$ gesetzt, die unendliche Reihe $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$ konvergiert und ihre Summe kleiner als 1 ist. Eine solche Wahl ist augenscheinlich auf unendlich viele Arten möglich.

Ferner werden in der Ebene der Variabelen $x = u + iv$ die Gebiete

$$G_1: \quad -1 \leq u \leq 1; \quad -1 \leq v \leq +1$$

$$G_2: \quad -1 \leq u \leq 2; \quad -2 \leq v \leq +2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$G_n: \quad -1 \leqq u \leq n; \quad -n \leq v \leqq +n$$

betrachtet; jeder Punkt der Halbebene $u > -1$ ist, von einem gewissen n_0 ab, in allen Gebieten $G_n\,(n > n_0)$ enthalten; G_r enthält G_k, falls $r > k$ ist.

Da $f_1(x)$ eine ganze Funktion ist, kann man ein $n \geqq r_1$ so bestimmen, dass

1) $$|a_n^{(1)}| \leqq \frac{1}{(e+1)^{2n}} \text{ ist und}$$

2) $$\left| f_1(x) - \frac{x}{(e+1)^2} - a_2^{(1)} x^2 - \cdots - a_{n-1}^{(1)} x^{n-1} \right| < b_1 \text{ ist in } G_1.$$

Für dieses n ist dann:

1) $$|f_n(x)| = |f_1(x)| + [1 - a_n^{(1)}(e+1)^{2n}]\,|f_1(x)|^n <$$

$$< \frac{1}{e+1} + 2\left(\frac{1}{e+1}\right)^n \leqq \frac{1}{e+1} + 2\left(\frac{1}{e+1}\right)^{r_1} = b_0 + b_1$$

für $\Re(x) \leq 1$.

2) $$\left| \frac{x}{(e+1)^2} + a_2^{(1)} x^2 + \cdots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1} \right| < b_0 + b_1 \text{ in } G_1.$$

Jetzt geht man von $f_n(x)$ aus, bestimmt n' so, dass $n' > r_2$ ist und ferner:

$$|a_{n'}^{(n)}| \geq \frac{1}{(e+1)^{2n}}$$

sowie

$$\left| f_n(x) - \frac{x}{(e+1)^2} - \cdots - a_{n-1}^{(1)} x^{n-1} - \frac{x^n}{(e+1)^{2n}} - \cdots - a_{n'-1}^{(n)} x^{n'-1} \right| < b_2$$

ist in G_2.

Wir haben dann:

1) $$|f_{n'}^{(1)}(x)| = |f_n(x) + [1 - a_{n'}^{(n)} (e+1)^{2n'}] (f_n(x))^{n'}| < b_0 + b_1 + b_2$$

in der Halbebene $\Re(x) \geq -1$,

2) $$\left| \frac{x}{(e+1)^2} + a_2^{(1)} x^2 + \cdots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1} + \frac{x^n}{(e+1)^{2n}} + \cdots + a_{n'-1}^{(n)} x^{n'-1} \right| < b_0 + b_1 + b_2$$

in G_2.

Der Koeffizient von $x^{n'}$ in der Potenzentwickelung der ganzen Funktion $f_{n'}^{(1)}(x)$ ist $\left(\frac{1}{e+1}\right)^{2n}$.

In dieser Weise fahren wir fort und gelangen zu einer Potenzreihe:

$$\frac{1}{(e+1)^2} + a_2^{(1)} x^2 + \cdots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1}$$
$$+ \frac{x^n}{(e+1)^{2n}} + a_{n+1}^{(n)} x^{n+1} + \cdots + a_{n'-1}^{(n)} x^{n'-1}$$
$$+ \frac{x^{n'}}{(e+1)^{2n'}} + \cdot$$

deren Konvergenzradius höchstens $(e+1)^2$ und mindestens 1 ist. Das Letztere folgt daraus, dass alle Koeffizienten absolut kleiner als 1 sind, da die Funktionen, deren Entwickelung sie entstammen, in der Halbebene $\Re(x) \geq -1$, also auch im Einheitskreise, dem absoluten Betrage nach unter 1 liegen.

Ferner liegen die absoluten Beträge der Abschnitte $P_{n-1} = \frac{x}{(e+1)^2} + \cdots + a_{n-1}^{(1)} x^{n-1}$; $P_{n'-1}$, $P_{n''-1}$, ... unterhalb 1 und zwar bezw. in den Gebieten G_1, G_2, G_3, ... Nach dem Stieltjes—Vitali'schen Satze ist dadurch die Konvergenz der Abschnittsfolge P_{n-1}, $P_{n'-1}$, ... in der ganzen Halbebene, in jedem der Gebiete G_ν gleichmässig gesichert.

Fügt man (etwa) noch das Glied $3 \cdot x^0 = 3$ zu der Potenzreihe hinzu, so bleiben die Verhältnisse im allgemeinen ungeändert; keiner der Abschnitte P_ν ($\nu = n - 1$, $n' - 1$, $n'' - 1, \ldots$) hat aber in dem entsprechenden Gebiete G_ν eine Null- oder Einsstelle. Die Null- und Einsstellen der Abschnitte dieser Folge häufen sich also nirgends in der Halbebene $\Re(x) \geq -1$. Es liegen jedoch unendlich viele von den Nullstellen der betrachteten Abschnittsfolge in der Halbebene, denn sonst lägen sie, bis auf endlich viele in der Halbebene $\Re(x) \leq -1$, sodass nach einem Satze über Polynomreihen[1] die Folge in der ganzen Ebene konvergierte, d. h. eine ganze transzendente Funktion vorliegen müsste.

[1] Vgl. Pólya, Über Annäherung durch Polynome, deren sämtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen. Gött. Nachr. 1913.

ÜBER EINIGE LÖSUNGEN DER FUNKTIONALGLEICHUNG

$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy)$.

Von

ALEXANDER OSTROWSKI

in Marburg a. d. L.

1. *Einleitung.* In dieser Abhandlung sollen die Lösungen der Funktionalgleichung

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) \tag{I}$$

mit der Nebenbedingung

$$\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) \tag{II}$$

untersucht werden, wo die Funktion φ nur reeller Werte fähig ist, die Argumente $x, y, \ldots$ aber sämtliche Elemente eines beliebig vorgegebenen Körpers[1] durchlaufen.

Untersucht man zuerst das System (I), (II) im Körper R der rationalen Zahlen, so können sämtliche Lösungen des Systems leicht hingeschrieben werden. Es ist dann, abgesehen von einigen trivialen Lösungen, entweder

$$\varphi(x) = |x|^{\varrho},$$

wo der Parameter ϱ sich in den Grenzen $0 < \varrho \leq 1$ ändern kann, oder

$$\varphi(x) = C^{a(p,x)}$$

wo der Parameter C eine beliebige positive Zahl < 1 ist, $a(p,x)$ aber die *Ordnung* der rationalen Zahl x in bezug auf eine beliebige aber feste Primzahl p ist, d. h. die ganze Zahl von der Eigenschaft, dass $\frac{x}{p^{a(p,x)}}$ in der reduzierten Form weder im Zähler noch im Nenner p enthält.

[1] Zum Körperbegriff vgl. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Crelles Journal, B. 137.

Im Falle aber, wo die Argumente von φ alle Elemente eines *beliebigen* Körpers K durchlaufen, werden wir besonders auf den *archimedischen* Fall eingehen. Dieser Fall ist dadurch charakterisiert, dass für wenigstens eine in K enthaltene ganze rationale Zahl a $\varphi(a) > 1$ ist. In diesem Fall ist K einem Unterkörper des Körpers aller gewöhnlicher komplexer Zahlen isomorph. Entspricht bei dieser isomorphen Beziehung jedem Element x von K eine Zahl x', so gibt es dann eine solche positive Zahl $\varrho \leq 1$, dass allgemein

$$\varphi(x) = |x'|^{\varrho}$$

ist. Durch diese Angaben ist der archimedische Fall vollständig erledigt. Für den dann allein noch übrig bleibenden *unarchimedischen* Fall gilt anstatt der Ungleichung (II) die schärfere

$$\varphi(x+y) \leq \text{Max}\,(\varphi(x),\ \varphi(y)),$$

durch welche die Aufstellung sämtlicher unarchimedischer Lösungen von (I) und (II) auf die Aufstellung sämtlicher *Primdivisoren* in beliebigen Körpern zurückgeführt ist. Da die Durchführung dieser letzten Aufgabe ganz verschiedene Hilfsmittel erfordert und um die vorliegende Abhandlung nicht zu gross werden zu lassen, werden wir auf die bezüglichen Untersuchungen bei einer anderen Gelegenheit eingehen.

Das System (I), (II) hat zum ersten Mal Herr KÜRSCHÁK[1] behandelt. Die Frage nach sämtlichen Lösungen dieses Systems hat er jedoch nicht berührt. Seine Arbeit beschäftigt sich mit dem Nachweis der Existenz gewisser Lösungen von (I), (II) in speziellen (besonders algebraischen) Erweiterungen vorgegebener Körper, worauf wir später (in den Nummern 5, 6) eingehen.

2. *Vorbemerkungen.* Von den trivialen Fällen, in welchen $\varphi(x)$ für alle x durchweg 0 oder durchweg 1 ist, sehen wir in der Folge ab. Dann folgt aus (I), dass stets $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) \neq 0$ für $a \neq 0$ ist.

Der Fall, wo $\varphi(x)$ negativer Werte fähig ist, ist leicht zu erledigen. Ist für ein a $\varphi(a) < 0$, so folgt aus (II) und (I)

$$\varphi(x+y) = \varphi(a)\,\varphi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{a}\right) \geq \varphi(a)\,\varphi\left(\frac{x}{a}\right) + \varphi(a)\,\varphi\left(\frac{y}{a}\right) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Durch Vergleichung mit (II) folgt, dass in (II) in diesem Fall stets das Gleichheitszeichen gilt. Dann wird aber durch (I) und (II) eine isomorphe Beziehung des Körpers K, dessen Elemente die Argumente $x, y, \ldots$ durchlaufen, auf einen Teilkörper Ω des Körpers aller reeller Zahlen hergestellt. Wir erhalten den Satz:

[1] Crelles Journal, B. 142, S. 211—253.

Lässt sich jedem Element a eines Körpers K eine reelle Zahl $\varphi(a)$ so zuordnen, dass

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \quad \text{(I)} \qquad\qquad \varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b) \quad \text{(II)}$$

ist, und ist $\varphi(a)$ für wenigstens ein a negativ, so ist K mit einem Unterkörper des Körpers der gewöhnlichen reellen Zahlen isomorph und diese isomorphe Beziehung wird durch die Funktion $\varphi(a)$ vermittelt. In (II) gilt dann stets das Gleichheitszeichen.

Wir nehmen daher in der Folge immer an, dass $\varphi(x)$ negativer Werte *nicht* fähig ist. Wir werden dann $\varphi(a)$ einfacher durch $|a|$ bezeichnen und die *Bewertungsfunktion* nennen. Es ist nach (I) offenbar stets $|-a| = |a|$. Die einfachste Bewertungsfunktion ist diejenige, für welche $|0| = 0$, $|a| = 1$ für alle $a \neq 0$. Sieht man vorläufig von dieser ab, so ist $|a|$ für wenigstens ein a von 0 und 1 verschieden. In diesem Falle sprechen wir mit Herrn KÜRSCHÁK von einer *Bewertung*. Ordnen wir in diesem Falle jedem Element a von K die Zahl $|a|$ zu, so soll diese Zahl die *Bewertung* von a heissen, diese Zuordnung eine *Bewertung des Körpers K*, der Körper K, wenn seine Elemente als mit ihren Bewertungen behaftet betrachtet werden, ein *bewerteter* Körper.[1] Da der Fall, wo $|a|$ nur die Werte 0 und 1 haben kann, sich als Grenzfall anderer erweisen wird, werden wir in diesem Falle von *halbbewerteten* Körpern sprechen. Endliche Körper[2] können nur halbbewertet, nicht aber bewertet sein, da alle ihre Elemente gewissen Gleichungen von der Form $x^{p^r} - x = 0$ genügen.

3. *Unarchimedische Bewertungen.* Hat die Bewertungsfunktion anstatt (II) die schärfere Eigenschaft

$$|a+b| \leq \operatorname{Max}(|a|, |b|), \tag{II'}$$

so nennen wir sowohl die so bewerteten Körper als auch diese Bewertung selbst *unarchimedisch.* Aus (II') folgt für jede ganze rationale Zahl n, wenn man sie als die Summe ihrer Einheiten ansieht, $|n| \leq 1$. Diese Eigenschaft ist für den unarchimedischen Fall *charakteristisch.* Es gilt der Satz: *Ist bei irgend einer Bewertung des Körpers K für jede ganze rationale Zahl n $|n| \leq 1$, so ist diese Bewertung unarchimedisch.* In der Tat folgt aus $0 < |b| \leq |a|$ unter der obigen Annahme die Abschätzung:

$$|a+b|^n = |(a+b)^n| \leq |a|^n + |n| \cdot |a|^{n-1}|b| + \ldots + |b|^n \leq (n+1)|a|^n \tag{1}$$

Wäre nun $|a+b| > |a|$, so würde aus (1) folgen, wenn man beide Seiten durch $|a+b|^n$ dividiert und n ins Unendliche wachsen lässt:

$$1 < \lim_{n=\infty}\left[(n+1)\left(\frac{|a|}{|a+b|}\right)^n\right] = 0.$$

[1] KÜRSCHÁK, a. a. O., S. 211—212.

[2] Darunter verstehen wir Körper mit endlich vielen Elementen. S. STEINER, a. a. O., S. 245 ff.

Die Relation (II') kann noch weiter verschärft werden. Ist $|a| > |b|$, so ist $|a+b| = |a|$. Denn aus (II') folgt $|a| = |(a+b)-b| < \mathrm{Max}\,(|a+b|, |b|)$.

Die unarchimedischen Bewertungen des Körpers R aller rationaler Zahlen lassen sich nun leicht aufstellen. Es ist offenbar für wenigstens eine Primzahl p $|p| = c < 1$. Wäre nun auch für eine andere Primzahl q $|q| < 1$, so wäre es möglich für jedes positive ganze n solche ganze Zahlen a_n, b_n zu finden, dass

$$a_n p^n + b_n q^n = 1$$

ist. Gehen wir jedoch hier zu den Bewertungen über und lassen n unendlich werden, so kommt

$$1 < \mathrm{Max}\,(|a_n|\cdot|p|^n, |b_n|\cdot|q|^n) < |a_n|\cdot|p|^n + |b_n|\cdot|q|^n \leq \lim_{n=\infty}(|p|^n + |q|^n) = 0.$$

Also ist die Bewertung jeder zu p teilerfremden ganzen Zahl gleich 1. Daraus folgt weiter, wenn wir unter der Ordnung einer rationalen Zahl a in bezug auf eine Primzahl p die Zahl ϱ von der Eigenschaft verstehen, dass $\frac{a}{p^\varrho}$ in der reduzierten Form weder im Zähler noch im Nenner p enthält:

$$|a| = |p|^\varrho = c^\varrho,$$

wo ϱ die Ordnung von a in bezug auf p ist.

Die Wahl der positiven Zahl $c < 1$ ist offenbar ganz belanglos. Jeder Primzahl p entspricht ein besonderer Typus unarchimedischer Bewertungen von R.

Auch allgemeiner kann man jeder unarchimedischen Bewertung eines beliebigen Körpers K einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ zuordnen, indem man festsetzt, dass ein Element a von K genau durch die Potenz von $\mathfrak{p}$ mit dem Exponenten $\lg|a|$ teilbar ist. Dann ist, nach (I) und (II'), wenn a und b durch die α-te bzw. β-te Potenz von $\mathfrak{p}$ genau teilbar sind, ab genau durch die Potenz $\alpha+\beta$ teilbar, $a+b$ wenigstens durch die α-te, wenn $\alpha \leq \beta$ ist, *genau* durch die α-te, wenn $\alpha < \beta$ ist. Die so definierten Divisoren lassen sich nun ebenso behandeln, wie die Primdivisoren in der HENSEL'schen Idealtheorie; es lassen sich auf sie nicht nur die HENSEL-schen Resultate übertragen, was in einem gewissen Masse bereits in den allgemeinen KÜRSCHÁK'schen Ergebnissen enthalten ist, sondern auch die wichtigen Sätze von G. DUMAS[1] über die Anwendungen des NEWTON'schen Diagramms.

4. *Archimedische Bewertungen von R.* Wir wenden uns nun zu den archimedischen Bewertungen von R, dem Körper der rationalen Zahlen. Sie sind damit

[1] G. DUMAS, Sur quelques cas de réductibilité etc., Journal de Liouville, (6) 2, 1906; Sur les fonctions à charactère algébrique etc., Thèse, Paris, 1904.

charakterisiert, dass für wenigstens eine ganze Zahl n $|n| > 1$ ist. Ist uns nun eine bestimmte archimedische Bewertung von R gegeben, so nennen wir für jede ganze rationale von 0 verschiedene Zahl a die reelle aus der Gleichung

$$\|a\| = |a|^{\varrho(a)} \qquad (2)$$

bestimmte Zahl $\varrho(a)$ den *Exponent* von a. Da für jede ganze Zahl $\|a\| \leq |a|$ ist, so ist $\varrho(a) \leq 1$. Für diejenige ganze Zahl n, deren Bewertung > 1 ist, ist $\varrho(n)$ positiv. Es ist endlich leicht einzusehen, dass für zwei beliebige von 0 verschiedene ganze rationale Zahlen a und b stets

$$\varrho(a) < \varrho(ab) < \varrho(b) \text{ für } \varrho(a) < \varrho(b); \; \varrho(a) = \varrho(ab) = \varrho(b) \text{ für } \varrho(a) = \varrho(b) \qquad (3)$$

ist. Daraus folgt für jedes ganze p $\varrho(p) = \varrho(p^2) = \ldots$

Es sei nun ϱ die gewiss positive obere Grenze der Zahlen $\varrho(a)$. Wir behaupten, dass *für jedes ganze rationale a stets $\varrho(a) = \varrho$ ist.*

In der Tat lässt sich ϱ jedenfalls als Grenzwert einer nicht abnehmenden Folge von Zahlen

$$\varrho(a_1), \; \varrho(a_2), \ldots \qquad (4)$$

darstellen. Aus (3) sieht man, dass die Zahlen a_i als Primzahlen oder Primzahlpotenzen angenommen werden können. Wir können weiter annehmen, dass für jedes i $\varrho(a_i)$ nicht kleiner ist, als die Exponenten sämtlicher positiver ganzer Zahlen, die kleiner als a_i sind, denn sonst können wir nach (3) a_i durch eine geeignete Primzahl oder Primzahlpotenz ersetzen und, indem wir dieselbe Operation bei allen a_i sukzessive vornehmen, die Folge (4) in gewünschter Weise umformen. Indem wir aus (4) gewisse a_i ganz fortlassen, können wir noch erreichen, dass auch die Zahlen a_i eine wachsende Folge bilden. Dieses Verfahren führt nur dann nicht immer zum Ziel, wenn es eine Primzahl p gibt, für welche $\varrho(p) = \varrho$ ist. In diesem letzten Fall können wir jedoch für (4) direkt die Reihe

$$\varrho(p), \; \varrho(p^2), \; \varrho(p^3), \ldots$$

nehmen.

Es genügt offenbar zu beweisen, dass für jede Primzahl q $\varrho(q) = \varrho$ ist. Nehmen wir nun an, dass für eine Primzahl q $\varrho(q) < \varrho$ ist. Wir können dann voraussetzen, dass in (4) alle $\varrho(a_i) > \varrho(q)$ sind, indem wir alle a_i, die dieser Bedingung nicht genügen, fortlassen. Dann sind, unseren Voraussetzungen über die Folge (4) zufolge, sämtliche a_i zu q relativ prim.

Wir bezeichnen jetzt den kleinsten positiven Rest von a_i modulo q durch

k_i, den ganzzahligen Quotienten $\frac{a_i - k_i}{q}$ durch A_i, den Exponenten $\varrho(a_i)$ durch ϱ_i, $\varrho_i - \varrho(q)$ durch δ_i, $\varrho - \varrho(q) = \operatorname{Lim}_{i=\infty} \delta_i$ durch Δ. Aus (I) und (II) folgt nun

$$q \cdot A_i = a_i - k_i \geq a_i - k_i > a_i - q, \tag{5}$$

da $k_i < |k_i| < q$ ist. Nun folgt aus $A_i < a_i$ nach unseren Annahmen über (4), dass $\varrho(A_i) < \varrho_i$, d. h. $A_i \leq A_i^{\varrho_i}$ ist. Setzen wir dies und $q = q^{\varrho_i - \delta_i}$ in (5) ein, so kommt, nach Multiplikation mit q^{δ_i}:

$$a_i^{\varrho_i} > (a_i - k_i)^{\varrho_i} = q^{\varrho_i} A_i^{\varrho_i} > (a_i - q)\, q^{\delta_i} = (a_i^{\varrho_i} - q)\, q^{\delta_i}.$$

Lassen wir hier i nach Division durch $a_i^{\varrho_i}$ unendlich werden, so kommt

$$1 \geq \operatorname{Lim}_{i=\infty} \left(1 - \frac{q}{a_i^{\varrho_i}}\right) q^{\delta_i}.$$

Nun ist $\operatorname{Lim}_{i=\infty} a_i = \infty$, $\operatorname{Lim}_{i=\infty} \varrho_i$ die positive Zahl ϱ, $\operatorname{Lim}_{i=\infty} \delta_i = \Delta$. Setzen wir dies ein, so kommt:

$$1 > q^{\Delta}.$$

Dies steht aber damit im Widerspruch, dass $\Delta = \varrho - \varrho(q)$ nach unserer Annahme positiv ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Jetzt sieht man aber leicht, dass auch für jede *rationale* Zahl a $a = |a|^{\varrho}$ ist. Die Zahl ϱ werden wir den *Index* der archimedischen Bewertung von R nennen. Ist umgekehrt eine positive Zahl $\varrho \leq 1$ willkürlich gewählt, so kann die Funktion $|a|^{\varrho}$ als Bewertungsfunktion von R genommen werden und führt auf eine archimedische Bewertung von R. — Setzen wir aber ϱ gleich 0, so erhalten wir den halbbewerteten Körper R, der sich also als ein Grenzfall des archimedisch bewerteten Körpers R erweist.

Fassen wir nun die bisherigen Ergebnisse, sofern sie sich auf R beziehen, zusammen, so kommen wir zu dem Satz:

Das System der Funktionalbedingungen

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(xy) \quad \text{(I)} \qquad\qquad \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{(II)},$$

wo die Argumente x, y sämtliche rationale Zahlen durchlaufen, die Funktion $\varphi(x)$ aber nur reelle Werte annimmt, hat nur folgende Lösungen

1) a) $\varphi(x) \equiv 0$; b) $\varphi(x) \equiv 1$; c) $\varphi(0) = 0$; $\varphi(x) = 1$, $(x \gtrless 0)$;

2) $\varphi(x) \equiv x$,

3) $$\varphi(x) = |x|^{\varrho},$$

wo der positive Parameter ϱ nicht grösser als 1, sonst aber beliebig ist:

4) $$\varphi(x) = c^{a(p,x)},$$

wo der positive Parameter c kleiner als 1 ist, $a(p,x)$ aber die Ordnung von x in bezug auf eine beliebige Primzahl p bezeichnet. Jeder Wahl von c und p entspricht eine Funktion $\varphi(x)$ vom Typus 4.

5. *Perfekte Körper.* Jeder archimedisch bewertete Körper K besitzt den mit irgend einem Index ϱ archimedisch bewerteten Körper R aller rationaler Zahlen als Unterkörper. Um nun zu einer Charakteriserung aller archimedisch bewerteter Körper zu gelangen, müssen wir zuerst auf einige KÜRSCHÁK'schen Sätze über besondere Erweiterungen bewerteter Körper eingehen.

Wir nennen ein Element A eines bewerteten Körpers K den *Limes* einer Folge a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ der Elemente von K, wenn $\operatorname{Lim}_{n=\infty} \| a_n - A \| = 0$ ist. Eine Folge a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ der Elemente von K nennen wir eine *Fundamentalreihe*, wenn $\operatorname{Lim}_{n=\infty} \| a_{n+t} - a_n \| = 0$ ist bei frei veränderlichem, ganze positive Werte durchlaufendem t. Besitzt eine Folge a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ den Limes A (was wir durch $\operatorname{Lim}_{n=\infty} a_n = A$ ausdrücken), so ist diese Folge, wie aus (II) leicht folgt, eine Fundamentalreihe. Und zwar kann, wie sich ebenfalls aus (II) leicht ergibt, eine Fundamentalreihe nur einen einzigen Limes haben. Man sieht endlich leicht ein, dass aus $\operatorname{Lim}_{i=\infty} a_i = A$ auch $\operatorname{Lim}_{i=\infty} \| a_i \| = \| A \|$ folgt.

Ist in K der Limes jeder aus K entnommenen Fundamentalreihe enthalten, so heisst K *perfekt.* Wie schon das Beispiel des Körpers aller rationaler Zahlen bei seiner gewöhnlichen Bewertung durch absolute Beträge zeigt, ist nicht jeder bewertete Körper perfekt.

Fassen wir nun die Gesamtheit aller K entnommenen Fundamentalreihen ins Auge und nennen wir zwei solche Reihen $A = (\ldots, a_i, \ldots)$ und $B = (\ldots, b_i, \ldots)$ äquivalent, wenn $\operatorname{Lim}_{i=\infty} \| a_i - b_i \| = 0$ ist, so bildet diese Gesamtheit einen Körper K, wenn wir zwei äquivalente Fundamentalreihen als *gleich* ansehen und unter der Summe bzw. dem Produkt von $A = (\ldots, a_i, \ldots)$ und $A' = (\ldots, a'_i, \ldots)$ die Fundamentalreihe $(\ldots, a_i + a'_i, \ldots)$ bzw. $(\ldots, a_i a'_i, \ldots)$ verstehen. Bewerten wir noch jede Fundamentalreihe $A = (\ldots, a_i, \ldots)$ durch $\| A \| = \operatorname{Lim}_{i=\infty} \| a_i \|$ (dass die letzte Folge konvergiert, folgt leicht aus (II)), so wird dann K ein bewerteter Körper, von dem man nun leicht beweisen kann, dass er *perfekt* ist. K heisst der *derivierte Körper* von K.

Nennen wir zwei isomorphe bewertete Körper *analytisch isomorph,* wenn die entsprechenden Elemente dieselben Bewertungen haben, so können wir weiter den Satz aussprechen, dass K einen mit K analytisch isomorphen Unterkörper besitzt. Und zwar besteht dieser Unterkörper aus allen Fundamentalreihen von der Form $(a, a, a, a, \ldots)$ und allen mit ihnen äquivalenten Fundamentalreihen, wo a sämtliche Elemente von K durchläuft. Weiter folgt aus der Bildungsweise von K, dass wenn der *bewertete* Körper K ein Unterkörper eines *perfekten* Körpers K ist, K eine Eweiterung von K als Unterkörper besitzt, die mit dem derivierten Körper K von K analytisch isomorph ist. — In diesem Sinne kann man den derivierten Körper K von K als die *kleinste* perfekte Erweiterung von K betrachten.

Ist der bewertete Körper K ein Unterkörper eines bewerteten Körpers K', so ist offenbar der derivierte Körper K von K ein Unterkörper des derivierten Körpers K' von K'.[1]

6. *Erweiterungen 2-ten Grades.* Wir werden in der Folge noch den Hilfssatz brauchen:

Es sei W ein perfekter bewerteter Körper und Z eine derartige Erweiterung von W, dass jedes in Z aber nicht in W vorhandene Element α einer in W irreduziblen Gleichung 2-ten Grades mit Koeffizienten aus W

$$x^2 + b\,x + c = 0 \tag{6}$$

genügt. Ordnet man jedem solchen Element α die positive Zahl $\sqrt{|c|}$ und jedem in W enthaltenen Element von Z seine ursprüngliche Bewertung zu, so erhält man eine Bewertung des Körpers Z.

Diese Bewertung ist die einzige Bewertung von Z, bei der die Elemente von W ihre ursprünglichen Bewertungen behalten.

Dass die definierte Zuordnung die Forderung (I) erfüllt, folgt aus den einfachsten algebraischen Tatsachen ohne Weiteres. Schwieriger ist der Nachweis, das die Ungleichung (II) oder die damit äquivalente

$$|1+\alpha| \leq 1+|\alpha| \tag{7}$$

erfüllt ist. Es genügt anzunehmen, dass α der in W irreduziblen Gleichung (6) genügt. Dann ist (7) mit $|1-b+c|^{1/2} \leq 1+|c|^{1/2}$ oder $|1-b+c| \leq 1+2|c|^{1/2}+|c|$ äquivalent. Da aber die letzte Ungleichung nach (II) aus $|b| \leq 2|c|^{1/2}$ folgt, so brauchen wir nur zu beweisen, dass, wenn $|b|^2-4|c|>0$ ist, die Gleichung (6) in W eine Wurzel besitzt, also nicht irreduzibel ist.

[1] Für die ausführlichere Darstellung des Inhalts dieser Nummer vergleiche man Kürschák, a. a. O., S. 214—216, 222—228

Definieren wir unter der Annahme $\|b\|^2 > 4\|c\|$ die unendliche Folge der Elemente v_n aus $W: v_0 = 2,\ v_1 = -b, \ldots$ durch die Rekursionsformel

$$v_n = -b\,v_{n-1} - c\,v_{n-2}, \tag{8}$$

so lässt sich dann für jedes $n > 0$ die Relation nachweisen

$$2\|v_n\| \geq \|b\| \cdot \|v_{n-1}\|. \tag{9}$$

Da sie für $n = 1$ gilt, wegen $2\|v_1\| = 2\|b\| \geq \|2\| \cdot \|b\|$ (da ja $\|2\| \leq 2$ ist), so kann man sie für $n-1$ als bewiesen annehmen. Dann folgt aus (8) wegen $\|b\|^2 \geq 4\|c\|$:

$$2\|v_n\| \geq 2\|bv_{n-1}\| - 2\|c\| \cdot \|v_{n-2}\| = \|bv_{n-1}\| + \frac{\|b\|}{2}\Big\{2\|v_{n-1}\| -$$

$$- 4\left\|\frac{c}{b^2}\right\| \cdot \|b\| \cdot \|v_{n-2}\|\Big\} \geq \|b\| \cdot \|v_{n-1}\|,$$

d. h. (9). Aus (9) kann nun gefolgert werden, dass die Folge der Elemente aus W

$$\ldots, w_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}, \ldots\ (n = 2, 3, \ldots) \tag{10}$$

eine Fundamentalreihe ist. — Die Voraussetzung, unter welcher (10) gebildet werden kann, nämlich dass für $n > 0$ kein $v_n = 0$ ist, ist immer für $\|b\| > 0$ erfüllt, denn nach (9) folgt aus $v_n = 0$, dass auch alle vorhergehende v verschwinden, dies ist aber für $v_1 = -b$ nicht der Fall. Ist aber $\|b\| = 0$, so ist wegen $\|b\|^2 \geq 4\|c\|$ auch $\|c\| = 0$, dann reduziert sich aber (6) auf $x^2 = 0$, ist also jedenfalls reduzibel. — Aus (8) und (9) folgt

$$\|w_n\| = \left\|\frac{v_n}{v_{n-1}}\right\| < \|b\| + \|c\| \left\|\frac{v_{n-2}}{v_{n-1}}\right\| \leq \|b\| + \frac{2\|c\|}{\|b\|} < \frac{M}{2}, \tag{11}$$

wo M eine feste positive Zahl ist. Weiter folgt aus (8) da alle w von 0 verschieden sind,

$$w_{n+t} - w_n = -c\left(\frac{1}{w_{n+t-1}} - \frac{1}{w_{n-1}}\right), \quad \|w_{n+t} - w_n\| = \|c\| \frac{\|w_{n+t-1} - w_{n-1}\|}{\|w_{n+t-1}\| \cdot \|w_{n-1}\|}$$

oder, wenn wir die positive Zahl $\frac{4\|c\|}{\|b\|^2} < 1$ durch q bezeichnen,

$$\|w_{n+t} - w_n\| = q \cdot \frac{\|b\|}{2\|w_{n+t-1}\|} \cdot \frac{\|b\|}{2\|w_{n-1}\|} \cdot \|w_{n+t-1} - w_{n-1}\|,$$

oder, wenn wir (9) und (11) berücksichtigen,

$$|w_{n+t} - w_n| < q\,|w_{n+t-1} - w_{n-1}| < q^2\,|w_{n+t-2} - w_{n-2}| < \cdots < q^n\,|w_t - w_0| < q^n(|w_t| + |w_0|) < q^n M.$$

Lassen wir hier nun n unendlich werden, so folgt aus $q < 1$

$$\lim_{n=\infty} |w_{n+t} - w_n| = 0,$$

w. z. b. w. Der im *perfekten* Körper W enthaltene Limes von (10) ist aber wegen (8) und (10) eine Wurzel von (6), und (6) ist in W reduzibel. Damit ist der erste Teil unseres Hilfssatzes bewiesen. — Dieser Teil ist ein spezieller Fall des allgemeinen KÜRSCHÁK'schen Satzes über algebraische Erweiterungen perfekter Körper. Auch der hier gegebene Beweis steht mit dem KÜRSCHÁK'schen insofern im Zusammenhang, als die vom Herrn KÜRSCHÁK benutzte HADAMARD'sche Untersuchung eine Verallgemeinerung des BERNOULLI'schen Wurzelapproximationsverfahrens ist, während unser Beweis eine Ausbildung desselben Verfahrens darstellt. Es wird sich übrigens weiter ergeben, dass die in unserem Hilfssatz betrachteten algebraischen Erweiterungen perfekter Körper die einzig möglichen im *archimedischen* Fall sind, so dass damit in diesem Fall auch der allgemeine KÜRSCHÁK'sche Satz erledigt ist. Im unarchimedischen Fall aber lassen sich zum Beweise des KÜRSCHÁK'schen Satzes viel elementarere, von HENSEL herrührende Methoden anwenden [1].

Um den zweiten Teil [2] unseres Hilfssatzes zu beweisen, nehmen wir an, es sei bei einer der in Frage kommenden Bewertungen von Z $|\alpha| \geqq |c|^{1/2}$, wo α eine Wurzel der in W irreduzibeln Gleichung (6). Ist dann $\bar{\alpha}$ die andere Wurzel, so ist $|\alpha| \geqq |\bar{\alpha}|$ wegen $|\alpha| \cdot |\bar{\alpha}| = |c|$. Es sei etwa $|\alpha| > |\bar{\alpha}|$. Dann hat die Folge der in W enthaltenen Elemente

$$\frac{\alpha^n + \bar{\alpha}^n}{\alpha^{n-1} + \bar{\alpha}^{n-1}} = \alpha \frac{1 + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)^n}{1 + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)^{n-1}}$$

für $n = \infty$ α zum Limes, α wäre also im *perfekten* Körper W enthalten, während die Gleichung (6) ja als irreduzibel angenommen ist.

7. *Der Vollständigkeitssatz.* Ist der Körper R aller rationaler Zahlen archimedisch mit dem Index ϱ bewertet, und ist $a_i (i = 1, 2 \ldots)$ irgend eine ihm entnommene Fundamentalreihe, so bleibt $a_i (i = 1, 2 \ldots)$ auch dann eine Fundamentalreihe, wenn

[1] Vgl. KÜRSCHÁK, a. a. O., S. 218.

[2] der sich auch auf den allgemeinen von KÜRSCHÁK a. a. O. behandelten Fall ausdehnen lässt. Vgl. A. OSTROWSKI, Über sogenannte perfekte Körper, Crelles Journal, B. 147.

R mit irgend einem anderen zulässigen Wert von ϱ archimedisch bewertet wird, denn aus $\lim\limits_{n=\infty}|a_{n+t}-a_n|^\varrho=0$ folgt $\lim\limits_{n=\infty}|a_{n+t}-a_n|^{\varrho'}=0$ und umgekehrt ($0<\varrho<1$; $0<\varrho'\leq 1$). Betrachten wir also den Körper W aller reeller Zahlen, der den derivierten Körper von R bei $\varrho=1$ darstellt, und ordnen wir jeder Zahl a von W die positive Zahl $|a|^\varrho$ zu, so wird der sich so ergebende bewertete Körper W_ϱ als der derivierte Körper von R bei der Bewertung mit dem Index ϱ betrachtet werden können. Im Körper W gibt es nur irreduzible Funktionen *zweiten Grades* von einer Unbestimmten und es genügt eine Wurzel einer von ihnen, etwa von x^2+1, zu adjungieren, um den Körper Z aller komplexen Zahlen zu erhalten, in dem es schon keine nichtlineare irreduzible Funktionen von einer Unbestimmten mehr gibt. Ordnet man jeder Zahl α von Z die positive Zahl $|\alpha|^\varrho$ zu, so stellt der so entstehende bewertete Körper Z_ϱ zugleich einen perfekten Körper dar, weil Z_1 es ist. Von Z_ϱ gilt nun der wichtige Satz: *der Vollständigkeitssatz. Es gibt keinen archimedisch bewerteten Körper K, der einen Körper Z_ϱ zum Unterkörper hat, ohne mit ihm identisch zu sein.*

Nehmen wir in der Tat an, es gebe eine bewertete Erweiterung K von Z_ϱ, und es sei x ein in K aber nicht in Z_ϱ enthaltenes Element. Es sei die untere Grenze der Zahlen $\|x-\alpha\|$, wo α alle Grössen von Z_ϱ durchläuft, gleich m. Dann gibt es eine Grösse A aus Z_ϱ, so dass $\|x-A\|=m$ ist. Denn sonst müsste es eine Folge der komplexen Zahlen α_i ($i=1, 2, \ldots$) geben, so dass $\lim\limits_{n=\infty}\|x-\alpha_n\|=m$ ist. Die komplexen Zahlen α_i müssten aber dann eine Häufungsstelle A haben mit $\|x-A\|=m$, denn die absoluten Beträge der Zahlen α_i sind begrenzt, wegen $\|\alpha_i\|\leq\|x\|+\|x-\alpha_i\|$. Das Element $x-A$ von K, das wir durch y bezeichnen, hat dann die Eigenschaft, dass für alle Grössen α aus Z_ϱ $\|y-\alpha\|\geq\|y\|=m$ ist.

Wir schalten nun den Beweis folgender Tatsache ein: *Hat ein nicht in Z_ϱ enthaltenes Element z von K die Eigenschaft, dass für alle Elemente α von Z_ϱ $\|z-\alpha\|\geq\|z\|$ ist, so ist $\|z-\alpha\|=\|z\|$ für alle Elemente α von Z_ϱ, für welche $\|\alpha\|<\|z\|$ ist.* Denn es sei a ein Element von Z_ϱ mit $\|a\|<\|z\|$ und $\varepsilon_1=1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ die sämtlichen n-ten Einheitswurzeln für eine beliebige natürliche Zahl n. Durch Multiplikation der Relationen $\|z-\varepsilon_i a\|\geq\|z\|$ ($i=2, 3, \ldots, n$) erhalten wir

$$\left\|\frac{z^n-a^n}{z-a}\right\|\geq\|z\|^{n-1}.$$

Daraus folgt

$$\|z-a\|\,.\,\|z\|^{n-1}\leq\|z^n-a^n\|<\|z\|^n+\|a\|^n$$

Dies ergibt aber nach Division durch $\|z\|^n$ für $n=\infty$

$$\left|\frac{z-a}{z}\right| < \lim_{n=\infty}\left[1+\left|\frac{a}{z}\right|^n\right] = 1.$$

Aus $|z-a| \leq |z|$ und $|z-a| \geq |z|$ folgt aber $|z-a| = |z|$, w. z. b. w.

Ist also für ein Element α von Z_0 $0 < |\alpha| < m = |y|$, so ist $|y-\alpha| = |y|$. Andererseits besitzt auch $y-\alpha$ die Eigenschaft, dass für kein Element a von Z_0 $|y-\alpha-a| < |y-\alpha| = m$ sein kann. Also ist, immer wegen $|\alpha| < m$, $|y-\alpha-\alpha| = |y|$, $|y-2\alpha| = |y|$. Daher besitzt auch $y-2\alpha$ jene Eigenschaft, dass für kein Element a von Z_0 $|y-2\alpha-a| < |y-2\alpha| = m$ sein kann. Daraus folgt wieder $|y-3\alpha| = m$ u. s. w. So kommen wir zum Resultat, dass für jede natürliche Zahl n $|y-n\alpha| = |y| = m$ ist. Dies ist aber unmöglich. Denn aus (II) folgt dann

$$2m = |y-n\alpha| + |y| \geq |n\alpha| = n^\varrho |\alpha|,$$

wo die rechte Seite mit n unendlich gross wird, während $2m$ konstant ist, w. z. b. w.

8. *Beliebige archimedische Bewertungen.* Es sei nun K ein beliebiger archimedisch bewerteter Körper und ϱ der Index der Bewertung des in ihm enthaltenen bewerteten Körpers R. Dann enthält der derivierte Körper K von K den bewerteten Körper W_ϱ (oder einen zu ihm analytisch isomorphen). Enthält nun K eine Wurzel i der Gleichung $x^2+1=0$, so ist in K eine bewertete algebraische Erweiterung von W_ϱ (oder von einem zu W_ϱ analytisch isomorphen Unterkörper von K) enthalten, welche nach dem zweiten Teil des Hilfssatzes in 6. mit Z_ϱ analytisch isomorph ist. Ist aber x^2+1 in K irreduzibel, so adjungieren wir zu K eine Wurzel von x^2+1 und bewerten den so entstandenen Körper $\overline{\mathsf{K}}$ nach dem Hilfssatz von 6. Dann muss $\overline{\mathsf{K}}$ einen mit Z_ϱ analytisch isomorphen Unterkörper $\overline{Z}_\varrho$ enthalten. Nach dem Vollständigkeitssatz fällt aber $\overline{\mathsf{K}}$ mit $\overline{Z}_\varrho$ zusammen. Denn sonst könnten wir aus $\overline{\mathsf{K}}$, indem wir in ihm alle Elemente von $\overline{Z}_\varrho$ durch die entsprechenden von Z_ϱ ersetzen und eine entsprechende Modifikation in seinen Kompositionsgleichungen ausführen, eine bewertete Erweiterung von Z_ϱ erhalten. Also *ist K mit einem Unterkörper von Z_ϱ analytisch isomorph.* Ist umgekehrt K mit einem Unterkörper von Z isomorph, und ordnen wir jedem Element von K die Bewertung zu, die das ihm entsprechende Element in Z_ϱ hat, so entsteht eine archimedische Bewertung von K. Wir wollen auf diesen Zusammenhang zwischen den archimedischen Bewertungen von K und den isomorphen Beziehungen von K und den Unterkörpern von Z näher eingehen. Eine isomorphe Beziehung ψ zwischen K und einem Unterkörper von Z sei eine *Permutation* von K in Z genannt. Das dabei einem Element a von K entsprechende Element $\psi(a)$ von Z sei das *Bild von a* genannt. Zwei Permutationen ψ und $\overline{\psi}$ von K in Z seien *konjugiert komplex* genannt, wenn die Bilder $\psi(a)$ und $\overline{\psi}(a)$

für jedes a aus K konjugiert komplex sind. Endlich nennen wir eine Permutation ψ von K in Z reell, wenn die Bilder sämtlicher Elemente von K reell sind.

Aus jeder Permutation ψ von K in Z kann man nun nach dem Obigen eine archimedische Bewertung von K herleiten durch die Festsetzung $|a| = |\psi(a)|^{\varrho}$. Ergeben auf diese Weise zwei Permutationen ψ und ψ' von K in Z eine und dieselbe Bewertung von K, so muss für alle a aus K $|\psi(a)|^{\varrho} = |\psi'(a)|^{\varrho}$, $|\psi(a)| = |\psi'(a)|$ sein. Sind hier ψ und ψ' zwei werschiedene Permutationen, und ist etwa für ein a aus K $\psi(a) = \alpha + \beta i$, $\psi'(a) = \gamma + \delta i \neq \alpha + \beta i$, so muss für jede rationale Zahl m $|m + \alpha + \beta i| = |m + \gamma + \delta i|$ sein, woraus $\alpha = \gamma$, $\beta = -\delta$ folgt. Ist für ein beliebiges anderes Element b von K $\psi(b) = w + b i$, $\psi'(b) = r + \vartheta i$, so folgt für zwei beliebige rationale Zahlen m und n $|m \psi(a) + n \psi(b)| = |m \psi'(a) + n \psi'(b)|$, $(m\alpha + nw)^2 + (m\beta + nb)^2 = (ma + nr)^2 + (-m\beta + n\vartheta)^2$. Berücksichtigen wir noch, dass jedenfalls $w = r$, $b = \pm \vartheta$ und dass wegen $\psi(a) \neq \psi'(a)$ $\beta \gtrless 0$ ist, so folgt endlich $b = -\vartheta$, d. h. die Permutationen ψ und ψ' sind konjugiert komplex.

Zusammenfassend erhalten wir folgende Sätze, durch welche die Theorie der archimedischen Bewertungen erledigt wird:

Jede archimedische Bewertung eines Körpers K, bei welcher der in K enthaltene Unterkörper R aller reeller Zahlen mit einem Index ϱ bewertet wird, entsteht aus einer Permutation ψ von K in den Körper Z aller komplexer Zahlen, indem für jedes Element a von K festgesetzt wird:

$$|a| = |\psi(a)|^{\varrho},$$

und umgekehrt entsteht auf diese Weise aus jeder Permutation von K in Z eine archimedische Bewertung von K. Zwei verschiedene Permutationen von K in Z ergeben dann und nur dann eine und dieselbe Bewertung von K, wenn sie konjugiert komplex sind. Die Anzahl (bzw. die Mächtigkeit) aller solcher Bewertungen von K ist gleich der Anzahl (bzw. der Mächtigkeit) seiner reellen und der Paare seiner konjugiert komplexen Permutationen in Z.

Ist z. B. $K = R(\alpha)$, wo α eine algebraische Zahl ist, so ist die Anzahl aller einem bestimmten Index ϱ entsprechenden Bewertungen von K der Anzahl der reellen und der Paare konjugiert komplexer Wurzeln der in R irreduziblen Gleichung, der α genügt, gleich. Jeder archimedischen Bewertung von K entspricht eine mit jener irreduziblen Gleichung verträgliche Festsetzung des absoluten Betrages von α und von allen aus α rational ableitbaren Zahlen.

Die spezielle Wahl von ϱ ist offenbar unwesentlich, denn jede algebraische und Limes-Relation zwischen den Elementen von K, die für irgend ein ϱ gilt, bleibt gültig auch für jedes andere zulässige ϱ. Aus unseren Resultaten ergibt sich daher die Folgerung:

Jeder archimedisch bewertete Körper lässt sich auf einen Unterkörper des Körpers aller komplexen Zahlen so abbilden, dass dabei sowohl alle algebraischen als auch alle Limesrelationen bestehen bleiben.

Nennen wir nach STEINITZ einen Körper *algebraisch abgeschlossen*, wenn in ihm jede algebraische Gleichung mit einer Unbekannten eine Lösung hat, so folgt insbesondere aus dem Vollständigkeitssatz:

Jeder archimedisch bewertete perfekte und algebraisch abgeschlossene Körper lässt sich auf den Körper aller komplexer Zahlen so abbilden, dass dabei sowohl alle algebraischen als auch alle Limesrelationen bestehen bleiben.

Damit ist eine merkwürdige Charakterisierung des Körpers aller komplexer Zahlen gewonnen.

Marburg a. d. L. April 1916.

ESSAI SUR LES FONCTIONS Θ DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Par

PAUL APPELL

à Paris.

Deuxième partie.

XIV. *Sur un problème préliminaire d'algèbre.* Dans la première partie de ce travail, j'ai considéré des fonctions du type général suivant. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des variables complexes et ω une constante donnée dont la partie réelle est négative. Les fonctions considérées sont des fonctions uniformes F, holomorphes ou méromorphes, de $x_1, x_2, \ldots x_n$, qui admettent, par rapport à chaque variable, la période $2\pi i$ et qui vérifient, en outre, la relation

$$(35)\qquad F(x_1 + \omega,\ x_2 + x_1,\ x_3 + x_2, \ldots, x_n + x_{n-1}) = e^{-ax_n} F(x_1,\ x_2, \ldots, x_n),$$

où a est un entier positif, négatif ou nul. En ajoutant une variable de plus x_{n+1}, on peut toujours ramener le cas général au cas où a est nul; il suffit en effet de poser

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = e^{ax_{n+1}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pour que cette fonction admette la période $2\pi i$ aussi par rapport à x_{n+1} et vérifie la relation

$$(36)\qquad \Phi(x_1 + \omega, x_2 + x_1, \ldots, x_{n+1} + x_n) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

Pour le développement de cette théorie et en particulier pour l'étude de la transformation, il importe de résoudre la question suivante, dans laquelle ω est une constante quelconque différente de zéro:

Former toutes les fonctions uniformes f de n variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant la relation unique

$$(37)\qquad f(x_1 + \omega, x_2 + x_1, x_3 + x_2, \ldots, x_n + x_{n-1}) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Nous résoudrons cette question à l'aide d'un changement de variables. Posons, pour abréger,

$$X_1 = \frac{x_1}{\omega}, \qquad X_2 = \frac{x_1(x_1 - \omega)}{1.2.\omega^2}, \qquad \ldots,$$

$$X_n = \frac{x_1(x_1 - \omega)(x_1 - 2\omega)\ldots[x_1 - (n-1)\omega]}{1.2.\ldots n.\omega^n}.$$

Si l'on désigne en général par la notation

$$\Delta\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

la différence

$$\varphi(x_1 + \omega, x_2 + x_1, \ldots, x_n + x_{n-1}) - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

les fonctions X_p sont des fonctions de x_1 telles que

$$1 = \Delta X_1, \qquad X_1 = \Delta X_2, \qquad \ldots, \qquad X_p = \Delta X_{p+1}.$$

Conservons alors la variable x_1 et introduisons, à la place de $x_2, x_3, \ldots, x_n$, d'autres variables $y_2, y_3, \ldots, y_n$ définies par les relations

$$(38) \qquad \begin{cases} x_1 = \omega X_1, \\ x_2 = y_2 + \omega X_2, \\ x_3 = y_3 + y_2 X_1 + \omega X_3, \\ x_4 = y_4 + y_3 X_1 + y_2 X_2 + \omega X_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = y_n + y_{n-1} X_1 + y_{n-2} X_2 + \ldots + y_{n-p} X_p + \ldots + y_2 X_{n-2} + \omega X_n. \end{cases}$$

On obtient les nouvelles variables, en fonction des anciennes, en résolvant ces équations par rapport à $y_2, y_3, \ldots, y_n$. On peut alors calculer $\Delta y_2, \Delta y_3, \ldots, \Delta y_n$; toutes ces quantités sont *nulles*; c'est ce que nous allons vérifier directement sur les équations (38). En effet, la deuxième des relations (38) donne

$$\Delta x_2 = \Delta y_2 + \omega \Delta X_2;$$

mais on a

$$\Delta x_2 = x_1, \qquad \Delta X_2 = X_1,$$

on a donc, d'après la première des relations (38),

$$\Delta y_2 = 0.$$

La troisième des relations (38) donne alors

$$\Delta x_3 = \Delta y_3 + y_2 \Delta X_1 + \omega \Delta X_3;$$

mais on a

$$\Delta x_3 = x_2, \qquad \Delta X_1 = 1, \qquad \Delta X_3 = X_2;$$

on a donc

$$x_2 = \Delta y_3 + y_2 + \omega X_2,$$

ce qui, d'après la relation précédente [deuxième des relations (38)], donne

$$\Delta y_3 = 0.$$

La quatrième des relations (38), traitée de la même façon, donne, en vertu de la précédente,

$$\Delta y_4 = 0.$$

En général, ayant établi que $\Delta y_2, \ldots, \Delta y_{p-1}$ sont nuls, on tire de la $p^{\text{ième}}$ des relations (38),

$$\Delta x_p = \Delta y_p + y_{p-1} \Delta X_1 + y_{p-2} \Delta X_2 + \ldots + y_2 \Delta X_{p-2} + \omega \Delta X_p;$$

mais on a

$$\Delta x_p = x_{p-1}, \quad \Delta X_1 = 1, \quad \Delta X_2 = X_1, \quad \ldots, \quad \Delta X_{p-2} = X_{p-3}, \quad \Delta X_p = X_{p-1};$$

on a donc

$$x_{p-1} = \Delta y_p + y_{p-1} + y_{p-2} X_1 + \ldots + y_2 X_{p-3} + \omega X_{p-1},$$

ce qui, d'après la $(p-1)^{\text{ième}}$ des relations (38) montre que $\Delta y_p = 0$. On arrive ainsi, de proche en proche, à $\Delta y_n = 0$.

En résumé, la substitution qui remplace

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

par

$$x_1 + \omega, \quad x_2 + x_1, \quad \ldots, \quad x_n + x_{n-1}$$

laisse *invariables* les quantités

$$y_2, \quad y_3, \quad \ldots, \quad y_n.$$

Soit alors

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{39}$$

une fonction uniforme de x_1, x_2, ..., x_n. Par l'effet du changement de variables (38), elle devient une fonction uniforme

$$f[x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n] \tag{40}$$

de x_1, $y_2, \ldots, y_n$, et la relation (37) devient

$$f[x_1 + \omega, y_2, y_3, \ldots, y_n] = f[x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n]. \tag{41}$$

La fonction (40) admet donc, par rapport à x_1, la période ω. Inversement, si l'on prend une fonction uniforme (40) de $x_1, y_2, \ldots, y_n$, admettant, par rapport à x_1, la période ω, cette fonction exprimée en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ devient une fonction uniforme qui vérifie la relation (37).

En particulier, pour qu'un fonction entière de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifie la relation (37), il faut et il suffit que, dans le système des variables $x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, elle devienne une fonction entière admettant, par rapport à x_1, la période ω.

Comme application, cherchons à déterminer le *polynôme*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

le plus général en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, vérifiant la relation (37). Par le changement de variables (38) ce polynôme devient un polynôme

$$P[x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n] \tag{42}$$

en $x_1, y_2, \ldots, y_n$ admettant la periode ω par rapport à x_1:

$$P[x_1 + \omega] = P[x_1].$$

Mais, pour qu'un polynôme $P[x_1]$ vérifie une telle relation, il faut et il suffit qu'il ne renferme pas x_1. Donc le polynôme (42) est indépendant de x_1, et l'expression la plus générale des polynômes cherchés est

$$P[y_2, y_3, \ldots, y_n],$$

c'est-à-dire un polynôme arbitraire en $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

En résolvant les équations (38) par rapport aux y, on trouve $(n-1)$ polynômes particuliers vérifiant la relation (37):

$$y_2 = P_2(x_1, x_2),$$
$$y_3 = P_3(x_1, x_2, x_3),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$y_n = P_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Le polynôme le plus général vérifiant la relation (37) est alors un polynôme quelconque composé avec ces polynômes fondamentaux. On peut remarquer que le polynôme P_p est du degré p en x_1 et du premier degré par rapport aux autres variables $x_2, x_3, \dots, x_p$. Les équations (38) étant homogènes en ω, x_1, x_2, $\dots$, x_n, $y_2, y_3, \dots, y_n$, les polynômes P_p réduits au même dénominateur sont rationnels en ω et ont pour dénominateur ω^{p-1}.

On voit par un raisonnement analogue que toute fonction rationnelle $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vérifiant la relation (37) est une fonction rationnelle de $y_2, y_3, \dots, y_n$ et inversement.

Dans le cas particulier $n=4$, en appelant x, y, z, t les quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4, on trouve, tout calcul fait, les expressions suivantes de y_2, y_3, y_4 par trois polynômes fondamentaux:

$$y_2 = P_2(x, y) \qquad = y - \frac{x(x-\omega)}{2\omega},$$

$$y_3 = P_3(x, y, z) \quad = z - y\frac{x}{\omega} + \frac{(x+\omega)x(x-\omega)}{3\omega^2},$$

$$y_4 = P_4(x, y, z, t) = t - z\frac{x}{\omega} + y\frac{(x+\omega)x}{2\omega^2} - \frac{(x+2\omega)(x+\omega)x(x-\omega)}{8\omega^3}.$$

Le polynôme le plus général $P(x, y, z, t)$ vérifiant la relation

$$P(x+\omega, y+x, z+y, t+z) = P(x, y, z, t)$$

est un polynôme arbitraire en P_2, P_3 et P_4.

Remarque. Les polynômes précédents sont entiers en $x_1, x_2, \dots, x_n$ et seulement rationnels en ω. Mais il est évident que pour obtenir le polynôme le plus général entier en $\omega, x_1, x_2, \dots, x_n$ et ne changeant pas quand on ajoute chacune de ces lettres à la précédente, il suffit de prendre le polynôme le plus général en $\omega, \omega y_2, \omega^2 y_3, \dots, \omega^{n-1} y_n$.

XV. *Première application: dérivées partielles des fonctions F.* Soit une fonction $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ possédant, par rapport à chaque variable, la période $2\pi i$ et vérifiant la relation (36). Quand $n=3$, nous avons formé, dans le § XII de

la première partie, des combinaisons entières des dérivées partielles de F possédant ces mêmes propriétés. Le résultat que nous venons d'obtenir permet, pour n quelconque, de former toutes les combinaisons entières des dérivées partielles du premier ordre possédant ces mêmes propriétés.

En effet, désignons par

$$F$$

avec un trait, la fonction

$$F(x_1 + \omega, x_2 + x_1, \ldots, x_n + x_{n-1}),$$

par $F_1, F_2, \ldots, F_n$ les dérivées partielles de F par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et par $F_1, \overline{F}_2, \ldots, F_n$ ce que deviennent ces dérivées quand on y remplace

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

par

$$x_1 + \omega, x_2 + x_1, \ldots, x_n + x_{n-1}.$$

L'équation

$$F = F$$

donne par dérivation

$$F_n = \overline{F}_n$$

$$F_{n-1} = \overline{F}_{n-1} + F_n$$

$$F_{n-2} = \overline{F}_{n-2} + F_{n-1}$$

. . . .

$$F_1 = \overline{F}_1 + F_2.$$

Formons alors un polynôme entier en

$$F_n, F_{n-1}, \ldots, F_1$$

qui ne change pas quand, laissant F_n invariable, on augmente chacune des autres lettres de la précédente. Nous obtiendrons le polynôme le plus général P remplissant ces conditions, en prenant le polynôme entier en $\omega, \omega y_2, \omega^2 y_3, \ldots, \omega^{n-2} y_{n-1}$ du calcul précédent et en y remplaçant

$$\omega, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

par

$$F_n, F_{n-1}, F_{n-2}, \ldots, F_1.$$

Le polynôme

$$P(F_n, F_{n-1}, \ldots, F_1)$$

ainsi obtenu est le polynôme le plus général, formé avec les dérivées premières, conservant la même valeur quand une des variables x_p augmente de $2\pi i$ ou quand $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont remplacés par $x_1 + \omega$, $x_2 + x_1, \ldots, x_n + x_{n-1}$.

XVI. *Sur les zéros des fonctions précédemment définies.*

L'étude des zéros des fonctions

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

admettant la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifiant en outre la relation

$$(43) \qquad F(x_1 + \omega, x_2 + x_1, \ldots, x_n + x_{n-1}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

conduit à des fonctions de même nature, d'un nombre moindre de variables.

A. Soit d'abord une fonction analytique uniforme $f(x, y)$ de deux variables x et y, vérifiant les relations

$$(44) \qquad \begin{cases} f(x + 2\pi i, y) = f(x, y), \\ f(x, y + 2\pi i) = f(x, y), \\ f(x + \omega, y + x) = f(x, y), \end{cases}$$

Considérons l'équation

$$f(x, y) = 0$$

qui définit y en fonction de x.

Supposons que, pour une valeur de x, cette équation admette, dans une bande du plan des y limitée par deux parallèles distantes d'une période $2\pi i$, les solutions

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots;$$

elle admettra, dans le plan entier des y, les solutions

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x) + 2k_1\pi i, \\ y_2 &= \varphi_2(x) + 2k_2\pi i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x) + 2k_n\pi i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ désignant des entiers quelconques.

Quand x augmente de $2\pi i$, ces solutions se permutent entre elles.

D'après la troisième des relations (44), quand x augmente de ω, les novelles solutions sont, dans un autre ordre,

$$y_1 + x,\ y_2 + x,\ \ldots,\ y_n + x,\ \ldots.$$

Donc, les dérivées secondes des $y_1, y_2, \ldots$, par rapport à x,

$$y_1'' = \varphi_1''(x),\ y_2'' = \varphi_2''(x),\ \ldots,\ y_n'' = \varphi_n''(x),\ \ldots$$

forment un ensemble dont les termes se permutent quand x augmente soit de $2\pi i$, soit de ω. Les fonctions symétriques de ces dérivées secondes sont des fonctions uniformes *doublement périodiques*, aux périodes $2\pi i$ et ω.

C'est ce qu'on peut vérifier par dérivation directe de l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

en calculant y'' par la formule des fonctions implicites.

Soient, par exemple, $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, $\ldots$, $\theta_p(x)$ des fonctions θ elliptiques, aux périodes $2\pi i$ et ω vérifiant des relations telles que

$$\theta_\nu(x + 2\pi i) = \theta_\nu(x), \qquad \theta_\nu(x+\omega) = e^{-a_\nu x}\theta_\nu(x)$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$ étant des entiers positifs.

La fonction

$$f(x, y) = C_1 e^{a_1 y}\theta_1(x) + C_2 e^{a_2 y}\theta_2(x) + \cdots + C_p e^{a_p y}\theta_p(x)$$

où les C_ν sont constants, vérifie les relations (44) et les fonctions y de x définies par l'équation $f(x, y) = 0$ possèdent la propriété que nous venons d'indiquer.

B. Soit maintenant une fonction uniforme $F(x, y, z)$ de trois variables, vérifiant les relations

$$(45) \quad \begin{cases} F(x + 2\pi i, y, z) = F(x, y, z), \\ F(x, y + 2\pi i, z) = F(x, y, z), \\ F(x, y, z + 2\pi i) = F(x, y, z), \\ F(x + \omega, y + x, z + y) = F(x, y, z). \end{cases}$$

Admettons que l'équation en z,

$$F(x, y, z) = 0,$$

ait, à la période $2\pi i$ près, les solutions

$$z_1 = \varphi_1(x, y), \quad z_2 = \varphi_2(x, y), \quad \ldots, \quad z_n = \varphi_n(x, y), \quad \ldots.$$

Ces solutions se permutent quand x ou y augmente de $2\pi i$; d'après la dernière des relations (45), les fonctions $\varphi_\nu(x+\omega, \; y+x)$ sont, dans un certain ordre, égales à

$$z_1 + y, \; z_2 + y, \; \ldots, \; z_n + y, \; \ldots.$$

Donc les dérivées secondes des z_ν par rapport à y,

$$z''_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}, \quad z''_2 = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}, \quad \ldots, \quad z''_n = \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2}, \quad \ldots$$

forment un ensemble de fonctions qui se permutent, quand on change x en $x + 2\pi i$, ou y en $y + 2\pi i$, ou x en $x + \omega$ et y en $y + x$. Les fonctions symétriques de ces dérivées secondes sont donc des fonctions uniformes de x et y, vérifiant les relations (44).

C'est ce qu'on peut vérifier par dérivation de l'équation

$$F(x, y, z) = 0.$$

C. Soit $G(x, y, z)$ une autre fonction vérifiant des relations de la forme (45). Considérons les deux équations simultanées

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0$$

qui définissent y et z en fonctions de x. Admettons qu'en négligeant des multiples de $2\pi i$ ajoutés à y et à z, ce système admette un ensemble de solutions

$$(y_1, z_1), \quad (y_2, z_2), \quad \ldots, \quad (y_n, z_n), \quad \ldots.$$

Les dérivées secondes de ces solutions par rapport à x,

$$(y''_1, z''_1), \quad (y''_2, z''_2), \quad \ldots, \quad (y''_n, z''_n), \quad \ldots,$$

forment un ensemble déterminé.

Quand x augmente de $2\pi i$, ces dérivées des solutions se permutent.

D'après la dernière des relations (45), appliquée aux deux fonctions F et G, quand x augmente de ω, les solutions sont, dans un autre ordre,

$$(y_1 + x, \; z_1 + y_1), \quad (y_2 + x, \; z_2 + y_2), \quad \ldots;$$

leurs dérivées secondes par rapport à x sont, dans un autre ordre,

$$(y''_1, z''_1 + y''_1), \quad (y''_2, z''_2 + y''_2), \quad \ldots, \quad (y''_n, z''_n + y''_n), \quad \ldots.$$

Donc les fonctions symétriques des y''_ν, si elles existent, sont des fonctions uniformes de x, doublement périodiques aux périodes ω et $2\pi i$.

Puis, si l'on désigne par z'''_ν et y'''_ν les dérivées troisièmes par rapport à x, les fonctions symétriques des quantités

$$z'''_\nu y'_\nu - y'''_\nu z'_\nu,$$

où

$$\nu = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

sont des fonctions uniformes de x, doublement périodiques aux mêmes périodes.

Les dérivées premières par rapport à x sont, dans un autre ordre

$$(y'_1 + 1, \; z'_1 + y'_1), \quad (y'_2 + 1, \; z'_2 + y'_2), \ldots.$$

Si donc on considère le polynôme

$$P(y', z') = z' - \frac{y'(y' - 1)}{2}$$

qui, d'après les considérations du N° XIV ne change pas quand y' croît de 1 et z' de y', les fonctions symétriques de

$$P(y'_1, z'_1), \quad P(y'_2, z'_2), \quad \ldots$$

sont des fonctions uniformes de x doublement périodiques aux périodes $2\pi i$ et ω.

D. Prenons, en général, une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, admettant par rapport à chaque variable la période $2\pi i$ et vérifiant la relation (43). L'équation

$$(46) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

définit x_n en fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Admettons que, dans une bande du plan des x_n limitée par deux parallèles distantes de $2\pi i$, cette équation admette des solutions

$$(x_n)_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$
$$(x_n)_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans le plan entier des x_n, elle admettra les solutions

$$(x_n)_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 2k_1\pi i$$
$$(x_n)_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 2k_2\pi i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$k_1, k_2, \ldots$ désignant des entiers quelconques. Quand l'une des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ augmente de $2\pi i$, ces solutions se permutent entre elles; quand x_1 augmente de ω, x_2 de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ de x_{n-2} les nouvelles déterminations des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont, dans un certain ordre

$$(x_n)_1 + x_{n-1}, \ (x_n)_2 + x_{n-1}, \ \ldots.$$

Donc les dérivées secondes des $(x_n)_\nu$ par rapport à x_{n-1}

$$(x''_n)_1 = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_{n-1}^2}, \quad (x''_n)_2 = \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_{n-1}^2}, \quad \ldots$$

forment un ensemble de fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ qui se permutent quand on ajoute $2\pi i$ à l'une des variables et quand on change

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

en

$$x_1 + \omega, \ x_2 + x_1, \ \ldots, \ x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Les fonctions symétriques de ces dérivées secondes $(x''_n)_1$, $(x''_n)_2, \ldots$ sont donc des fonctions uniformes de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ laissées invariables par ces mêmes substitutions.

En résumé, si l'on résoud l'équation (46) contenant n variables par rapport à x_n, les fonctions symétriques des diverses déterminations de

$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial x_{n-1}^2}$$

sont des fonctions uniformes $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, de $n-1$ variables, admettant la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifiant la relation

$$\Phi(x_1 + \omega, x_2 + x_1, \ldots, x_{n-1} + x_{n-2}) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

analogue à (43).

E. Prenons enfin le cas le plus général. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_{n-p}$, $n-p$ fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, admettant la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifiant la relation (43). Les équations simultanées

$$(47)\qquad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-p}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

définissent $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{p+1}$ en fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Soient

$$(48)\qquad \begin{cases} x_{p+1,\nu} = \varphi_{1\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \\ x_{p+2,\nu} = \varphi_{2\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n,\nu} = \varphi_{n-p,\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \end{cases}$$

$$\nu = 1, 2, 3, \ldots$$

un des systèmes de solutions: ces systèmes de solutions sont déterminés à des multiples de $2\pi i$ près; ils se permutent quand on augmente $x_1, x_2, \ldots$ ou x_p de $2\pi i$.

Quand on change $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en $x_1 + \omega$, $x_2 + x_1, \ldots, x_p + x_{p-1}$ ces systèmes de solutions deviennent, dans un autre ordre

$$x_{p+1,\nu} + x_p,\ x_{p+2,\nu} + x_{p+1,\nu},\ \ldots,\ x_{n,\nu} + x_{n-1,\nu}$$

à des multiples de $2\pi i$ près. Désignons par des accent les dérivées partielles de ces solutions par rapport à x_p. Les dérivées premières $x'_{p+1,\nu}, x'_{p+2,\nu}, \ldots, x'_{n,\nu}$ forment un système déterminé de solutions, et quand $x_1, x_2, \ldots, x_p$ subissent la substitution

$$(49)\qquad x_1 + \omega,\ x_2 + x_1,\ \ldots,\ x_p + x_{p-1}$$

ces dérivées subissent la substitution analogue

$$(50)\qquad x'_{p+1,\nu} + 1,\ x'_{p+2,\nu} + x'_{p+1,\nu},\ \ldots,\ x'_{n,\nu} + x'_{n-1,\nu}$$

Soit alors

$$P(x'_{p+1}, x'_{p+2}, \ldots, x'_n)$$

le polynôme le plus général en $x'_{p+1}, x'_{p+2}, \ldots, x'_n$ laissé invariable par la substitution (50) qui consiste à remplacer

$$x'_{p+1}, x'_{p+2}, \ldots, x'_n$$

par

$$x'_{p+1}+1,\ x'_{p+2}+x'_{p+1},\ \ldots,\ x'_n+x'_{n-1};$$

on sait former ce polynôme d'après la méthode du N° XIV en prenant $\omega = 1$ et en désignant les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}$ par $x'_{p+1}, x'_{p+2}, \ldots, x'_n$.

Les diverses valeurs P_v que prend ce polynôme pour les divers systèmes de solutions des équations (47) sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui ne font que se permuter quand ces variables augmentent de $2\pi i$ ou subissent la substitution (49). Toute fonction symétrique des diverses valeurs de ce polynôme est donc une fonction uniforme

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

qui admet pour chaque variable la période $2\pi i$ et qui est inaltérée par la substitution (49).

XVII. *Deuxième forme des fonctions Θ; transformation.* On sait que les fonctions θ elliptiques, sont susceptibles de deux formes différentes, suivant le rôle particulier que l'on fait jouer à l'une ou à l'autre des deux périodes. Ces deux formes sont ordinairement désignées par les notations θ et ϑ. Un problème de même nature se présente pour les fonctions Θ de degrés supérieurs.

J'ai amorcé la question dans les Comptes Rendus de la Séance du 7 septembre 1914: je vais, comme dans cette note, prendre d'abord les θ elliptiques, sous le point de vue actuel, afin de suivre la même voie dans le cas général.

A. Soit donc

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\left[\alpha\frac{n(n-1)}{2}+\beta n\right]\omega+(\alpha n+\beta)x}$$

une fonction θ où α et β sont des entiers, $\alpha > 0$. Cette fonction vérifie les relations

$$\theta(x+2\pi i) = \theta(x), \quad \theta(x+\omega) = e^{-\alpha x}\theta(x).$$

Posons

$$f(x, y) = e^{\alpha y}\theta(x); \tag{51}$$

cette fonction entière vérifie les trois relations

$$\begin{aligned} f(x+2\pi i, y) &= f(x, y) \\ f(x, y+2\pi i) &= f(x, y) \\ f(x+\omega, y+x) &= f(x, y). \end{aligned} \tag{52}$$

Faisons le changement de variable (38) qui consiste à conserver x et à poser

$$y = y_2 + \frac{x(x-\omega)}{2\omega}, \tag{53}$$

y_2 étant la nouvelle variable qui remplace y. On a alors

$$f(x, y) = f[x, y_2]$$

et d'après les résultats généraux du N° XIV, la fonction $f[x, y_2]$ admet la période ω par rapport à x. C'est ce que nous allons voir directement.

On a

$$f(x, y) = e^{\alpha y} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\left[\alpha \frac{n(n-1)}{2} + \beta n\right]\omega + (\alpha n + \beta) x}.$$

Faisons le changement de variables (53); nous aurons, par un calcul facile

$$f[x, y_2] = e^{\alpha y_2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\alpha}{2\omega}(x+n\omega)(x+n\omega-\omega) + \beta(x+n\omega)}$$

où la période ω est en évidence, car ajouter ω à x, revient à changer n en $n+1$.

On peut alors écrire

$$f[x, y_2] = e^{\alpha y_2} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu e^{\frac{2\nu\pi x i}{\omega}}$$

avec

$$\omega A_\nu = \sum_n \int_0^\omega e^{-\frac{2\nu\pi x i}{\omega} + \frac{\alpha}{2\omega}(x+n\omega)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)(x+n\omega)} dx$$

ce qu'on peut écrire en ajoutant à l'exposant $-2\nu n\pi i$

$$\omega A_\nu = \sum_n \int_0^\omega e^{\frac{\alpha}{2\omega}(x+n\omega)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{2\nu\pi i}{\omega}\right)(x+n\omega)} dx.$$

Faisons, dans chaque intégrale, le changement de variable

$$\frac{x+n\omega}{\omega} = \xi,$$

nous aurons

$$A_\nu = \sum_n \int_n^{n+1} e^{\frac{\alpha\omega}{2}\xi^2 + \left(\beta\omega - \frac{\alpha}{2}\omega - 2\nu\pi i\right)\xi} d\xi,$$

c'est-à-dire, d'après une transformation classique

$$A_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\alpha\omega}{2}\xi^2 + \left(\beta\omega - \frac{\alpha}{2}\omega - 2\nu\pi i\right)\xi} d\xi, \tag{56}$$

la variable d'intégration étant réelle. Cette dernière intégrale, portant sur une exponentielle dont l'exposant est un trinôme du second degré, est bien connue. En terminant le calcul, on obtient la formule de transformation cherchée.

B. La même méthode s'applique aux fonctions Θ de degrés supérieurs. Nous nous bornerons à l'exposer pour les fonctions Θ du quatrième degré.

D'après des notations déjà employées, désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des entiers dont le premier est positif, et posons

$$\varphi(\lambda) = \alpha\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.2.3.4} + \beta\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3} + \gamma\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} + \delta\lambda,$$

$$\varphi_1(\lambda) = \varphi(\lambda+1) - \varphi(\lambda) = \alpha\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3} + \beta\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} + \gamma\lambda + \delta,$$

$$\varphi_2(\lambda) = \varphi_1(\lambda+1) - \varphi_1(\lambda) = \alpha\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} + \beta\lambda + \gamma,$$

$$\varphi_3(\lambda) = \varphi_2(\lambda+1) - \varphi_2(\lambda) = \alpha\lambda + \beta.$$

Soit n un entier quelconque, la fonction Θ la plus générale du quatrième degré est

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\omega\varphi(n) + x\varphi_1(n) + y\varphi_2(n) + z\varphi_3(n)}.$$

Introduisons une quatrième variable t, en posant

$$F(x, y, z, t) = e^{\alpha t}\,\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}.$$

Cette nouvelle fonction entière F possède la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifie la relation

$$F(x+\omega, y+x, z+y, t+z) = F(x, y, z, t).$$

Ceci rappelé, faisons le changement de variables indiqué au paragraphe XIV: ce changement consiste à conserver x et à remplacer y, z, t, par trois nouvelles variables y_2, y_3, y_4, définies par

$$(55)\qquad \begin{cases} y = y_2 + \dfrac{x(x-\omega)}{2\omega}, \\[2ex] z = y_3 + y_2\dfrac{x}{\omega} + \dfrac{x(x-\omega)(x-2\omega)}{2\cdot 3\omega^2}, \\[2ex] t = y_4 + y_3\dfrac{x}{\omega} + y_2\dfrac{x(x-\omega)}{2\omega^2} + \dfrac{x(x-\omega)(x-2\omega)(x-3\omega)}{2\cdot 3\cdot 4\omega^3}. \end{cases}$$

La fonction $F(x, y, z, t)$ devient alors une fonction entière

$$F[x, y_2, y_3, y_4],$$

qui admet, par rapport à x, la période ω. C'est ce que nous allons vérifier.

Le changement de variables donne une expression de la forme

$$(56)\qquad F[x, y_2, y_3, y_4] = e^{\alpha y_4}\sum_n e^{u\omega + v y_2 + w y_3}$$

où l'exposant est ordonné par rapport à y_2, y_3, y_4, les quantités u, v, w ayant pour expressions

$$u = \varphi(n) + \frac{x}{\omega}\varphi_1(n) + \frac{x(x-\omega)}{2\omega^2}\varphi_2(n) +$$
$$+ \frac{x(x-\omega)(x-2\omega)}{2\cdot 3\omega^3}\varphi_3(n) + \frac{x(x-\omega)(x-2\omega)(x-3\omega)}{2\cdot 3\cdot 4\omega^4}\alpha,$$

$$v = \varphi_2(n) + \frac{x}{\omega}\varphi_3(n) + \frac{x(x-\omega)}{2\omega^2}\alpha,$$

$$w = \varphi_3(n) + \frac{x}{\omega}\alpha.$$

D'après la théorie élémentaire des différences, on a

$$\varphi(n+h) = \varphi(n) + \frac{h}{1}\varphi_1(n) + \frac{h(h-1)}{1.2}\varphi_2(n) + \frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3}\varphi_3(n) +$$
$$+ \frac{h(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2.3.4}\varphi_4(n).$$

En faisant $h = \frac{x}{\omega}$, on voit que les quantités u, v, w qui dépendent de x et

de n sont des fonctions de la seule quantité $x+n\omega$, qu'on peut écrire comme il suit

$$u = \varphi\left(n+\frac{x}{\omega}\right) = \varphi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right),$$

$$v = \varphi_2\left(n+\frac{x}{\omega}\right) = \varphi_2\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right),$$

$$w = \varphi_3\left(n+\frac{x}{\omega}\right) = \varphi_3\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right);$$

l'exposant dans la série (56) est donc une certaine fonction de $x+n\omega$

$$u\omega + vy_2 + wy_3 = \psi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right)$$

en posant

(57) $$\psi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right) = \omega\varphi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right) + y_2\varphi_2\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right) + y_3\varphi_3\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right),$$

et l'on a

$$F[x, y_2, y_3, y_4] = e^{ay_4}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\psi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right)}.$$

Il est alors évident que la fonction $F[x, y_2, y_3, y_4]$ admet la période ω par rapport à x, puisque le changement de x en $x+\omega$ donne le même résultat que le changement de n en $n+1$ dans la série. On peut donc écrire

$$F[x, y_2, y_3, y_4] = e^{ay_4}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu e^{\frac{2\nu\pi x i}{\omega}},$$

A_ν étant une fonction entière de y_2 et y_3. Ce coefficient est donné par la formule classique

$$\omega A_\nu = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\int_0^\omega e^{-\frac{2\nu\pi x i}{\omega}+\psi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right)}\,dx;$$

comme n est entier, on peut, en ajoutant $-2\nu n\pi i$ à l'exposant, écrire

$$\omega A_\nu = \sum_n\int_0^\omega e^{-2\nu\pi i\frac{x+n\omega}{\omega}+\psi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right)}\,dx.$$

Mais alors, en faisant, dans chaque intégrale, le changement de variable

$$\frac{x+n\omega}{\omega}=\xi,$$

on a

$$A_\nu=\sum_n\int_n^{n+1}e^{-2\nu\pi i\xi+\psi(\xi)}d\xi$$

et enfin

$$A_\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\psi(\xi)-2\nu\pi i\xi}d\xi,$$

(58) $$A_\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\omega\varphi(\xi)+y_2\varphi_2(\xi)+y_3\varphi_3(\xi)-2\nu\pi i\xi}d\xi,$$

la variable d'intégration étant réelle.

Le coefficient A_ν, fonction entière de y_2 et y_3, est ainsi exprimé par une intégrale définie, dans laquelle l'exposant de e est un polynôme du quatrième degré par rapport à la variable d'intégration.

Le coefficient A_ν étant calculé, on a la nouvelle forme de la fonction Θ:

(59) $$e^{at}\Theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}=e^{ay_4}\sum_{-\infty}^{+\infty}A_\nu e^{\frac{2\nu\pi x i}{\omega}},$$

ce qui, en vertu des relations (55), réalise la transformation cherchée.

XVIII. *Remarque sur une intégrale définie.* Dans le numéro précédent, nous avons rencontré une intégrale définie portant sur une exponentielle dont l'exposant est un polynôme du quatrième degré.

Considérons, d'une manière générale, une intégrale définie de la forme

(60) $$\Phi_\nu(x, y, z, t)=e^{at}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\omega\varphi(u)+x\varphi_1(u)+y\varphi_2(u)+z\varphi_3(u)-2\nu\pi u i}du,$$

ν désignant un entier et la variable d'intégration u étant réelle. Cette intégrale est une fonction entière de x, y, z, t, qui vérifie la relation

$$\Phi_\nu(x+\omega, y+x, z+y, t+z)=\Phi_\nu(x, y, z, t),$$

comme il est aisé de le constater en changeant u en $u+1$.

Le changement de variables (55), conduit à un calcul analogue à celui du numéro précédent et transforme l'intégrale Φ_ν en

$$\Phi_\nu[x, y_2, y_3, y_4] = e^{a y_4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\omega\varphi\left(u+\frac{x}{\omega}\right)+y_2\varphi_2\left(u+\frac{x}{\omega}\right)+y_3\varphi_3\left(u+\frac{x}{\omega}\right)-2\nu\pi u i}\,du.$$

En posant

$$u+\frac{x}{\omega}=\xi,$$

on trouve

$$\Phi_\nu[x, y_2, y_3, y_4] = e^{a y_4} e^{\frac{2\nu\pi x i}{\omega}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\omega\varphi(\xi)+y_2\varphi_2(\xi)+y_3\varphi_3(\xi)-2\nu\pi\xi i}\,d\xi,$$

où, dans le plan complexe des ξ, l'intégration est faite sur une parallèle à l'axe des quantités réelles. Mais il est aisé de voir que cette intégrale conserve la même valeur si on suppose la variable d'intégration ξ réelle. L'intégrale Φ_ν est alors le terme général de la série (59), donnant la deuxième forme de la fonction Θ.

ABHANDLUNGEN ZUR THEORIE DER KONFORMEN ABBILDUNG.

IV. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche.

Von

PAUL KOEBE

in Jena.

Inhaltsverzeichnis.

A. Einleitung.

1. Die vorliegende Abhandlung schliesst sich an an eine in selbiger Zeitschrift Band 40 vom Verfasser veröffentliche Abhandlung, die Abhandlung II der Serie.[1]

In dieser Abhandlung II wurde an erster Stelle die Fundamentalabbildung jedes mehrfach (auch unendlich-vielfach) zusammenhängenden schlichten Bereiches begründet mittels eines als Schmiegungsverfahren bezeichneten, auf unendlich oft wiederholter Anwendung von Quadratwurzeloperationen beruhenden Verfahrens. Diese Fundamentalabbildung war eine unendlich-eindeutige Abbildung, indem jedem Punkte des gegebenen Bereiches unendlich viele Punkte der Fundamentalkreisfläche, jedem Punkte dieser Kreisfläche umgekehrt ein und nur ein Punkt des gegebenen Bereiches entsprach.

Gegenwärtig wollen wir nun den allgemein vorgelegten endlich-vielfach m-fach zusammenhängenden schlichten Bereich B solchen eineindeutigen konformen Abbildungen unterwerfen, durch welche derselbe in gewisse Bereiche spezieller einfacher Gestalten (*charakteristische Bereiche*) übergeführt wird.

Zu diesen von uns hier in Betracht zu ziehenden charakteristischen Bereichen gelangen wir durch *Zugrundelegung entweder eines parabolischen oder eines elliptisch-hyperbolischen Orthogonalsystems von Kreisen.* Im parabolischen Falle legen wir das Orthogonalsystem in seiner durch lineare Transformation erhältlichen einfachen Gestalt als *orthogonales Geradensystem aller Geraden parallel der Achse des Reellen oder Imaginären* zu Grunde. Der unendlich ferne Punkt ist dann der *Hauptpunkt* dieses Orthogonalsystems. Im elliptisch-hyperbolischen Falle hinge-

[1] »*Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. II: Die Fundamentalabbildung beliebiger mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche nebst einer Anwendung auf die Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche*«; Acta Math. t. 40, pag. 251—290. Die Abhandlung III der Serie, betitelt »*Der allgemeine Fundamentalsatz der konformen Abbildung nebst einer Anwendung auf die konforme Abbildung der Oberfläche einer körperlichen Ecke*«, ist im »Journ. f. Math.« t. 147 (S. 67—104) erschienen.

gen wird das System durch lineare Transformation auf die Form eines gewöhnlichen *Geradenbüschels mit zugehörendem konzentrischem Kreisbüschel* gebracht. Als *Hauptpunkte* des Systems wählen wir die Punkte o und ∞. Ausser den bereits dem Orthogonalsystem angehörenden Linien werden weiter unten noch die zu denselben *isogonalen Trajektorien* herangezogen, welche beim parabolischen System ihrerseits *Geraden* sind, beim elliptisch-hyperbolischen System jedoch *logarithmische Spiralen*. Wir erhalten so im ersten Falle das System Γ aller Geraden der Ebene, im zweiten Falle, allgemein zu reden, ein von sämtlichen logarithmischen Spiralen mit dem Nullpunkte und dem unendlich fernen Punkte als asymptotischen Punkten gebildetes Liniensystem Σ, welches die Geraden und Kreise des Orthogonalsystems als Spiralen der Neigung null bzw. $\frac{\pi}{2}$ enthält. Der Neigungswinkel wird dabei aufgefasst als der Winkel, unter welchem die betreffende Spirale das Geradenbüschel selbst schneidet. Je nachdem ob es sich um eine im einen oder anderen Sinne um den Nullpunkt gewundene Spirale handelt, werden wir den Neigungswinkel positiv oder negativ erklären.

Die verschiedenen charakteristischen Bereichtypen, welche wir in dieser Abhandlung allein in Betracht ziehen wollen, ergeben sich aus dem Liniensystem Γ bzw. Σ dadurch, dass wir aus diesem System, wenn m die Anzahl der Begrenzungslinien des abzubildenden Bereiches B ist, m Linien ausscheiden, die sich gegenseitig nicht treffen und deren einzelne ganz in einer und derselben Linie des Systems Γ bzw. Σ enthalten ist. Wir unterscheiden dabei hier im ganzen *fünf Kategorieen von Bereichtypen*.

Für die Bereichtypen der *vier ersten Kategorieen* ist im Gegensatz zu denen der fünften Kategorie charakteristisch, dass keine Begrenzungslinie durch einen Hauptpunkt des Systems hindurchgeht noch in einem solchen endigt. Eine Gerade kann auf diese Weise lediglich eine endliche geradlinige Strecke (*geradliniger Schlitz*) liefern, eine Spirale lediglich einen *endlichen spirallinigen Schlitz*, hingegen ein Kreis entweder einen unvollständigen Kreisbogen (*kreisförmiger Schlitz*) oder aber diese *Kreislinie* selbst in ihrer Vollständigkeit. (Kreislinige Begrenzungen können nach den getroffenen Festsetzungen lediglich dem System Σ entnommen werden). Es ist ferner klar, dass, sofern überhaupt vollständige Kreislinien an der Begrenzung eines charakteristischen Bereichs (der vier ersten Kategorieen) teilnehmen, diese Kreislinien entweder in der Zahl 1 oder 2 auftreten. Der *Hauptpunkt des parabolischen* Systems ist *stets innerer* Punkt des charakteristischen Bereichs. Hingegen sind die *Hauptpunkte des elliptisch-hyperbolischen* Systems dann und nur dann *innere* Punkte, wenn keine vollständige Kreislinie an der Begrenzung des charakteristischen Bereichs teilnimmt. Andernfalls erscheinen *einer oder beide Hauptpunkte vom Inneren des charakteristischen Bereichs ausgeschlossen*.

Die *erste Kategorie* bilden diejenigen charakteristischen Bereiche, bei welchen nur Linien einer und derselben Schar des Orthogonalsystems selbst bei der Bildung der Begrenzungslinien teilnehmen. (Figg. 1 bis 5, Pag. 311.)

Die *zweite Kategorie* bilden diejenigen charakteristischen Bereiche, bei welchen beide Scharen des vollständigen Orthogonalsystems (unter Ausschluss seiner isogonalen Trajektorien) bei der Bildung der Begrenzungslinien beteiligt sind. (Figg. 6—9, Pag. 312.)

Die *dritte Kategorie* bilden diejenigen charakteristischen Bereiche, bei welchen die Begrenzungen von lauter gleichgeneigten, isogonalen Trajektorien des Orthogonalsystems (Geraden im parabolischen Falle, wirkliche Spiralen im elliptisch-hyperbolischen Falle) gebildet werden. (Figg. 10, 12, Pag. 335.)

Die *vierte Kategorie* bilden diejenigen charakteristischen Bereiche, bei welchen die Begrenzung einem System gleichgeneigter isogonaler Trajektorien des Orthogonalsystems und deren orthogonalen Trajektorien entstammt (Geraden im parabolischen Falle, wirkliche Spiralen im elliptisch-hyperbolischen Falle). (Figg. 11, 13, Pag. 335.)

Die *fünfte Kategorie* schliesslich bilden diejenigen in grosser Mannigfaltigkeit vorhandenen charakteristischen Bereiche (im ganzen *sechsundzwanzig*), zu welchen man gelangt, wenn man Begrenzungslinien durch die Hauptpunkte hindurchgehen lässt. Die Anzahl dieser besonderen Begrenzungslinien ist im parabolischen Falle stets gleich 1, im elliptisch-hyperbolischen Falle gleich 1 oder 2 wegen der zwei dann vorhandenen Hauptpunkte. Diese beiden Hauptpunkte können jedoch auch auf eine und dieselbe Begrenzungslinie fallen. Eine einen Hauptpunkt enthaltende Begrenzungslinie des charakteristischen Bereichs ist stets gradlinig, nämlich entweder eine vollständige Gerade oder ein geradliniger endlicher oder unendlicher Schlitz, in welch letzterem Falle der Schlitz entweder durch den unendlich fernen Punkt hindurch geführt sein oder in dem unendlich fernen Punkte endigen kann.

Die Figuren 14—19 (S. 340) zeigen die sechs hierher gehörenden parabolischen Bereichtypen. Entsprechend zeigen die Figuren 20—39 (S. 342, 343) die im ganzen möglichen zwanzig hierher gehörenden elliptisch-hyperbolischen Bereichtypen.

2. Was die *Methode der Behandlung* der im Vorstehenden charakterisierten Abbildungsaufgaben anbetrifft, so ist für uns massgebend der Grundsatz rein funktionentheoretischer Methodik im Sinne der reinen Potenzreihentheorie. Dieses hindert nicht, dass wir an Stelle der Abbildungsfunktion $f(z)$ in den Fällen von parabolischem Typus die Potentialfunktion

$$u = \Re\{f(z)\} = \text{Reeller Teil von } f(z),$$

in den Fällen von elliptisch-hyperbolischem Typus die Potentialfunktion

$$u = \Re\{\log f(z)\} = \log |f(z)|$$

betrachten. Es handelt sich dann in den einzelnen Fällen darum, die betreffende, durch bestimmte charakteristische Eigenschaften definierbare Potentialfunktion u aufzufinden.

Hierzu machen wir die *Fundamentalabbildung* des abzubildenden Bereichs B bezw., in den Fällen von Schlitzbereichen mit zueinander orthogonalen Begrenzungslinien, einer aus dem Bereiche B unter Hinzunahme seiner Rückseite in gewisser Weise entstehenden Doppelfläche $\tilde{B}$ auf eine ζ-Ebene; und zwar lassen wir, zum Unterschiede von Abhandlung II, an Stelle der Fläche des Einheitskreises eine obere ζ-Halbebene (Halbebene oberhalb der Achse des Reellen) treten, sodass die Fundamentalgruppe von lauter reellen Substitutionen gebildet wird. Die zu bestimmenden Potentiale u werden nun in ihrer Überpflanzung in der ζ-Ebene durch Bildung unendlicher Reihen gewonnen. Die dabei in Betracht kommenden Reihen sind von der Art, wie sie H. Weber in der Abhandlung »Ein Beitrag zu Poincarés Theorie der Fuchsschen Funktionen« (Gött. Nachr. 1886) und gleichzeitig in allgemeinerer Weise Schottky in der Abhandlung »Über eine spezielle Funktion, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt« (Journal für Mathematik, Bd. 101, S. 227—272) gebildet und untersucht hat. Dieselben werden hier, den vorliegenden besonderen Verhältnissen entsprechend, auch in besonderer anschauungsmässiger Weise eingeführt.

In § 5 machen wir eine Anwendung der ersten gewonnenen Abbildung (Abbildung auf eine in konzentrischen Kreisbögen aufgeschlitzte Kreisringfläche)[1] zur Ermittelung der eineindeutigen konformen Abbildungen eines mehrfach zusammenhängenden Bereichs auf sich selbst. Insbesondere gilt es hier, wenn der Zusammenhang grösser als 2 ist, den *Endlichkeitsbeweis* zu erbringen, dass es nämlich eine von der Zahl m allein abhängende obere Schranke gibt für die Anzahl aller möglichen derartigen Abbildungen eines und desselben Bereichs in sich. Für beliebige dreifach zusammenhängende schlichte Bereiche liefert die Abbildung auf die entsprechende Schlitzfigur unmittelbar die Tatsache der verborgenen analytischen Symmetrie solcher Bereiche.

Der Kreis der in vorliegender Abhandlung behandelten Abbildungsaufgaben

[1] Dieser charakteristische Bereich ist ein *Normalbereich*, d. i. für uns ein charakteristischer Bereich, welcher, von linearen Transformationen abgesehen, nur auf endlich viele Weisen so bestimmt werden kann, dass er einem beliebig gegebenen, allgemein begrenzten Bereiche im Sinne eineindeutiger konformer Abbildung äquivalent wird. Jeder schlichte m-fach zusammenhängende Normalbereich besitzt $3m-3$, im Falle $m=2$ jedoch nur einen wesentlichen Parameter *(Moduln)*.

gestattet noch wesentliche Ausdehnungen, auf welche einzugehen wir erst in einer *folgenden Abhandlung* Veranlassung nehmen werden. Einige Mitteilungen über diese möglichen Erweiterungen haben wir u. a. in drei Noten »Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung, Voranzeige, erste, zweite und dritte Mitteilung« (Göttinger Nachrichten, 1912, 1916, 1917) gemacht.[1]

B. Erster Teil. (§§ 1—8.)

Die Abbildungsaufgaben der beiden ersten Kategorieen

(die Begrenzungslinien der Schlitzbereiche sind vollständig einem Orthogonalkreissystem entnommen und enthalten keinen Hauptpunkt desselben)

mit einer Anwendung (*§ 5*).

§ 1.

Formulierung der Abbildungsaufgaben der ersten und zweiten Kategorie.

Unsere Absicht ist, für den allgemein gegebenen Bereich B wichtige charakteristische Formen seiner Gestalt zu ermitteln, auf welche jeder derartige Bereich durch eineindeutige konforme Abbildung gebracht werden kann. Wie wir bereits wissen, kann jeder Bereich B in einen solchen mit *m geschlossenen*

[1] Einige der hier behandelten Abbildungsaufgaben sind schon früher, sei es vom Verfasser, sei es von anderen, *(potentialtheoretisch)* behandelt worden. Die erste Abbildung eines beliebigen mehrfach zusammenhängenden Bereichs auf einen Schlitzbereich wurde von Schottky in seiner Abhandlung »Über die Wertschwankungen der harmonischen Funktionen zweier reeller Veränderlichen und der Funktionen eines komplexen Arguments« (Journal f. Math., Bd. 117, insbesondere S. 248) u. a. ausgeführt und zwar auf der Grundlage der von uns hier nicht benutzten Schwarz'schen potentialtheoretischen Resultate der Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Es war dies die Abbildung auf eine längs lauter konzentrischer Kreisbögen aufgeschlitzte Vollebene. (Fig. 3, S. 311.) Die Abbildung auf eine von endlichen geradlinigen, untereinander parallelen Schlitzen begrenzte Vollebene (Fig. 5, S. 311) wurde vom Verfasser in Math. Ann. Bd. 69 (§ 13) und F. Cecioni in Circolo Mat. di Palermo (1908) behandelt. Sie findet bereits Erwähnung in Schottky's Dissertation (Journal f. Math. Bd. 83, S. 330). Auf den Typus 4 (radiale Schlitze) habe ich selbst zuerst in Gött. Nachr. 1909 (S. 356), auf andere Schlitzbereichtypen (Fig. 9 unten und allgemeinere Typen) habe ich in Gött. Nachr. 1912 und 1916 (Voranzeigen zur »*Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung*«) hingewiesen. Den von zwei zu einander senkrechten endlichen Schlitzen begrenzten zweifach zusammenhängenden Bereich hat Thomae abgebildet (Leipziger Berichte 1905, S. 79 ff. und 1906, S. 172 ff.).

Wegen Ausdehnung der Schlitztheoreme auf Bereiche *unendlich hohen Zusammenhanges* sehe man nach in meinen Abhandlungen »*über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Vierte Mitteilung*« und »*über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode*« (Gött. Nachr., 1909 bezw. 1910), sowie die dort zitierten Arbeiten von Hilbert (Gött. Nachr. 1909) und Courant (Dissertation, Göttingen 1910, erschienen in Math. Ann. Bd. 71).

regulären analytischen Begrenzungslinien $L_1, L_2, \ldots L_m$ konform transformiert werden. Wir können deswegen annehmen, dass unseren gegenwärtigen Betrachtungen ein solcher Bereich zugrunde liegt. Auch können wir Bereiche mit *punktförmigen Begrenzungslinien* jetzt ausser Betracht lassen, weil die für einen solchen Bereich zu ermittelnde Abbildungsfunktion über diesen Punkt hinaus gemäss dem Satze III Pag. 204 der Abhandlung I (Journ. f. Math. Bd. 145) sich regulär verhalten muss und folglich die ganze Fläche ebenso zu behandeln ist, als wenn die vorhandenen isolierten Begrenzungspunkte innere Punkte des Bereichs wären.

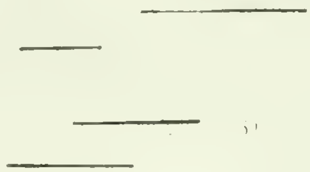
Zu den von unshier zunächst (§§ 1 u. 2) in Betracht zu ziehenden *charakteristischen Gestalten* des Bereichs B gelangen wir, wenn wir irgend ein *Orthogonalkreissystem*


1)


2)


3)


4)


5)

in der z-Ebene ins Auge fassen entweder mit getrennten Hauptpunkten (*elliptisch-hyperbolisches Kreissystem*) oder mit einem einzigen Hauptpunkte (*parabolisches Kreissystem*), und wenn wir in diesem System m geschlossene oder ungeschlossene Linien (Schlitze) ziehen, welche sich gegenseitig nicht treffen und auch keinen der Hauptpunkte treffen mögen und welche ausserdem einen schlichten m-fach zusammenhängenden Bereich begrenzen.

Wir unterscheiden auf diese Weise *neun charakteristische Gestalten* im ganzen und werden beweisen, dass *jeder vorgelegte Bereich B durch eineindeutige konforme Abbildung in jede dieser charakteristischen Gestalten übergeführt werden kann.*

Wir teilen die sich ergebenden charakteristischen Gestalten in zwei Kategorieen ein, wobei wir die Orthogonalsysteme in ihrer in der Einleitung bezeichneten einfachsten Gestalt (konzentrisches Kreissystem mit zugehörendem orthogonalem Geradensystem (Hauptpunkte 0 und ∞) bezw. Parallelbüschel der Geraden parallel der Achse des Reellen und zugehörendes orthogonales Parallelbüschel der Geraden parallel der Achse des Imaginären) zugrundelegen.

Erste Kategorie (A): Von dem zugrunde liegenden Orthogonalsystem nimmt nur *eines* der beiden sich durchsetzenden Büschel an der Bildung des Bereiches teil.

A_I. *Hyperbolisches Büschel.* Das Büschel wird in Form eines Systems *konzentrischer Kreise* mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt angenommen.

1. *Kein Hauptpunkt* liegt *innerhalb* des Bereiches. Der Bereich hat die Form einer *kreisförmig geschlitzten Kreisringfläche.* Siehe Fig. 1, in welcher m gleich 4 gewählt ist.

2. *Ein Hauptpunkt* liegt *innerhalb* des Bereiches. Der Bereich hat die Form einer *kreisförmig geschlitzten gewöhnlichen Kreisfläche.* (Fig. 2, $m = 4$.) Der Fall, in welchem der unendlich ferne Punkt der in den Bereich aufgenommene Hauptpunkt ist, bietet nicht wesentlich neues dar.

3. *Beide Hauptpunkte* liegen *innerhalb* des Bereiches. Der Bereich hat die Form einer *kreisförmig geschlitzten Vollebene.* (Fig. 3, $m = 4$.)

A_{II}. *Elliptisches Büschel.* Das Büschel wird in Gestalt des *Geradenbüschels* mit den Nullpunkt als Zentrum angenommen. In diesem Falle ist unvermeidlich,



6) 7) 8) 9)

dass die beiden Hauptpunkte dem Innern des charakteristischen Bereichs zugerechnet werden, da jeder einzelne Schlitz auf einer Geraden durch den Nullpunkt verlaufen muss und, einer oben allgemein gegebenen Vorschrift entsprechend, den Hauptpunkt selbst nicht enthalten soll. Wir bekommen so

4. Beide Hauptpunkte gehören zum Innern des Bereichs. Der Bereich hat die Form einer *geradlinig geschlitzten Vollebene.* Siehe Fig. 4.

A_{III}. *Parabolisches Büschel.* Das Büschel wird in Gestalt des Systems der zur Achse des Reellen parallelen Geraden (*Parallelbüschel*) angenommen. Alsdann soll gemäss der allgemeinen Vorschrift der unendlich ferne Punkt, d. i. der Hauptpunkt des Büchels dem Innern des Bereichs angehören. Wir finden

5. der Hauptpunkt liegt innerhalb des Bereichs. Der Bereich hat die Form einer geradlinig und parallel der Achse des Reellen geschlitzten Vollebene. (*Parallelschlitzbereich.*) Fig. 5.

Zweite Kategorie (B): *Beide Büschel* des zugrunde liegenden Orthogonalsystems nehmen an der Begrenzung Anteil.

B_I. *Elliptisch-hyperbolisches Kreissystem.* Es entstehen aus den charakteristischen Gestalten 1, 2, 3, die charakteristischen Gestalten 6, 7, 8, in welchen die Anzahl der dem elliptischen und der dem hyperbolischen Kreissystem angehörenden Begrenzungslinien beliebig ist. S. Figg. 6, 7, 8.

B_{II}. *Parabolisches Orthogonalsystem.* Es ergibt sich aus 5 die Figur 9, in welcher die Anzahl der zur Achse des Reellen, bezw. Imaginären parallelen Strecken beliebig bleibt.

Den besprochenen neun charakteristischen Bereichtypen entsprechend stellen wir nunmehr neun verschiedene Abbildungsaufgaben auf, die wir in folgender Weise zusammenfassend formulieren:

Formulierung der Abbildungsaufgaben: Es soll der gegebene schlichte Bereich, B, dessen Begrenzung von m geschlossenen regulären analytischen Linien gebildet wird, eineindeutig und konform *in jede der charakteristischen Gestalten* transformiert werden, *wobei vorzuschreiben* ist:

bei *Typus 1*, welche Begrenzungslinie (L_1) in den äusseren und welche Linie (L_2) in den inneren geschlossenen Begrenzungskreis übergehen soll;

bei *Typus 2*, welche Begrenzungslinie (L_1) in die geschlossene Kreislinie und welcher innere Punkt (z_1) in den Hauptpunkt (Nullpunkt) übergehen soll;

bei *Typus 3*, welcher innere Punkt (z_1) in den Nullpunkt und welcher innere Punkt (z_2) in den unendlich fernen Punkt übergehen soll;

bei *Typus 4*, welcher innere Punkt (z_1) in den Nullpunkt und welcher innere Punkt (z_2) in den Punkt ∞ übergehen soll;

bei *Typus 5*, welcher Punkt (z_1) in den unendlich fernen Punkt übergehen soll und welches hierbei die Zuordnung der in z_1 und ∞ liegenden Richtungselemente sein soll;

bei *Typus 6*, welche Begrenzungslinie (L_1) in den äusseren und welche (L_2) in den inneren geschlossenen Begrenzungskreis übergehen soll, ferner welche Begrenzungslinien ($L_3, L_4, \ldots, L_k$) in kreisbogenförmige und welche Begrenzungslinien ($L_{k+1}, \ldots, L_m$) in geradlinige Schlitze übergehen sollen;

bei *Typus 7*, welche Begrenzungslinie (L_1) in die Kreislinie und welcher Punkt (z_1) in den Nullpunkt übergehen soll, ferner welche Begrenzungslinien ($L_2, \ldots, L_k$) in kreisbogenförmige Schlitze und welche Begrenzungslinien ($L_{k+1}, \ldots, L_m$) in geradlinige Schlitze übergehen sollen;

bei *Typus 8*, welcher Punkt (z_1) in den Nullpunkt und welcher Punkt (z_2) in den unendlich fernen Punkt übergehen soll, ferner welche Begrenzungslinien ($L_1, L_2, \ldots, L_k$) in kreisbogenförmige Schlitze und welche Begrenzungslinien ($L_{k+1}, \ldots, L_m$) in geradlinige Schlitze übergehen sollen;

bei *Typus 9*, welcher Punkt (z_1) in den unendlich fernen Punkt übergehen

soll und welches hierbei die Zuordnung der in z_1 und ∞ befindlichen Richtungselemente sein soll, ferner welche Begrenzungslinien $(L_1, L_2, \ldots, L_k)$ in Schlitze parallel der Achse des Reellen und welche $(L_{k+1}, \ldots, L_m)$ in Schlitze parallel der Achse des Imaginären übergehen sollen.

§ 2.

Der Unitätsbeweis.

Auf die gestellten neun Abbildungsaufgaben fällt ein besonderes Licht durch die für diese Aufgaben geltenden Unitätssätze.

Allgemeiner Unitätssatz: Die gestellten neun Abbildungsaufgaben gestatten, sofern sie überhaupt eine Lösung besitzen, wesentlich nur eine Lösung. Hierbei werden allgemein zwei Lösungen als nicht wesentlich verschieden bezeichnet, wenn sie durch eine Ähnlichkeitstransformation auseinander hervorgehen, d. i. in den Fällen des elliptischen, hyperbolischen und elliptisch-hyperbolischen Kreisystems (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8,) sofern sie durch Multiplikation mit einer reellen oder komplexen Konstanten ineinander übergehen (zentrische Ähnlichkeitstransformation mit dem Hauptpunkte des Kreissystems als Fixpunkt), hingegen in den Fällen des parabolischen Kreissystems (5, 9), sofern sie durch eine ganze lineare Substitution mit positiven reellen Koeffizienten ineinander übergehen (allgemeinste richtungstreue Ähnlichkeitstransformation der Ebene).

Ein *Beweis dieses allgemeinen Unitätssatzes* ergibt sich aus folgendem Hilfssatze:

Hilfssatz: Es sei $F(z)$ eine im Bereiche B (mit m geschlossenen regulären analytischen Begrenzungslinien) bis in die Begrenzung hinein reguläre und eindeutige analytische Funktion, welche die Eigenschaft hat, auf jeder einzelnen der m Begrenzungslinien nur Werte anzunehmen, für welche entweder der reelle Teil oder der imaginäre Teil konstant ist; alsdann reduziert sich diese Funktion auf eine Konstante.

Zum Beweise dieses Satzes bemerken wir noch ausdrücklich, dass für eine und dieselbe zu betrachtende Funkion $F(z)$ zugelassen wird, dass auf einigen Begrenzungslinien der reelle, auf anderen der imaginäre Teil konstant ist. Wir nehmen nun an, dass $F(z)$ keine Konstante sei. Alsdann wird durch die Funktion $F(z)$ eine konforme Abbildung bewirkt, bei welcher den einzelnen Begrenzungslinien geradlinigen Schlitze entsprechen, die teils zur Achse des Reellen, teils zur Achse des Imaginären parallel sind. Betrachten wir nun die Abbildung in der Nachbarschaft einer der Begrenzungslinien, so beobachten wir, dass sich ein dieser Begrenzungslinie anschliessender schmaler Streifen des Bereichs B auf einen entsprechenden Streifen der Bildebene abbilden wird, und es ist unmit-

telbar ersichtlich, dass die Gesamtheit der durch den letzteren Streifen bedeckten Punkte der F-Ebene den betreffenden Schlitz vollständig einbetten wird, wobei es übrigens nichts ausmacht, ob die der Durchlaufung der Begrenzungslinie von B entsprechende Durchlaufung des betrachteten Schlitzes in einem einfachen Hin- und Hergang oder in wiederholten Hin- und Hergängen auf dem Schlitze besteht. Wir bemerken in jedem Falle die Tatsache, dass die für den Bereich B (einschliesslich seiner Begrenzung) betrachtete Funktion $F(z)$ auf keiner Begrenzungslinie dieses Bereichs ein Maximum des absoluten Betrages ihrer Werte erreichen wird. Dies steht aber im Widerspruch mit dem andern allgemeinen Satze der Funktionentheorie, dass eine in einem Bereich eindeutige und reguläre analytische Funktion stets auf der Grenze des Bereichs das Maximum ihres absoluten Betrages erreicht. Dieser Widerspruch löst sich nur dadurch, dass angenommen wird, die Funktion $F(z)$ reduziere sich, wie unser Hilfssatz behauptet, auf eine Konstante. *Q. e. d.*

Gehen wir nunmehr zur Anwendung des Hilfssatzes zum Beweise unseres Unitätssatzes über. Wir betrachten dazu zwei voneinander verschiedene analytische Funktionen $F_1(z)$, und $F_2(z)$, welche unter genau denselben im Abbildungsproblem formulierten sonstigen Nebenbedingungen die konforme Abbildung des Bereichs B auf eine der neun charakteristischen Gestalten liefern. Wir können dann in den parabolischen Fällen (Figg. 5 u. 9) die Funktionen F_1 und F_2 durch eine richtungstreue Ähnlichkeitstransformation einer der beiden Ebenen (F_1-Ebene oder F_2-Ebene) noch in der Weise einander anpassen, dass die Funktion $F_1(z) - F_2(z)$ im Punkte z_1 regulär wird.

Nach diesen speziell auf die Fälle 5 und 9 Bezug nehmenden Vorbemerkungen bilden wir nunmehr, den einzelnen Figuren entsprechend, folgende Funktionen:

1. in allen nichtparabolischen Fällen (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8) die Funktion

$$\log \frac{F_1(z)}{F_2(z)} = \Phi_1(z)$$

2. in den parabolischen Fällen (5 und 9) die Funktion

$$F_1(z) - F_2(z) = \Phi_2(z)$$

und bemerken, dass auf die so gebildeten Funktionen $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes zutreffen. Insbesondere ist auch die Voraussetzung der Regularität bei den Funktionen $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ auf der Begrenzung des Bereichs B erfüllt: denn jede der Abbildungsfunktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ muss sich, wenn sie zunächst nur für das Innere (exklusive Begrenzung) des Be-

reichs B erklärt gedacht wird, auf jeder Begrenzungslinie von B regulär verhalten, nach unseren Entwicklungen über Ränderzuordung in der Abhandlung I (Journ. f. Math., Bd. 145).

§ 3.

Übergang von den Abbildungsfunktionen $f^{(\lambda)}(z)$ zu den zugehörenden charakteristischen Potentialen $u^{(\lambda)}$.

1. Um im Folgenden die gerade ins Auge gefasste unter den neun Abbildungsaufgaben bequem durch die Bezeichnung selbst kennzeichnen zu können, wollen wir nunmehr die betreffenden Funktionen, welche die konformen Abbildungen des Bereiches B auf die neun charakteristischen Bereiche leisten, der Reihe nach mit

$$f^{(1)}(z),\ f^{(2)}(z),\ \ldots,\ f^{(9)}(z)$$

bezeichnen und die Bezeichnung $f(z)$ lassen für die früher behandelte Abbildung des Bereiches B auf das volle Innere des Einheitskreises (*Fundamentalabbildung*).

Wir betrachten nunmehr in den elliptischen, hyperbolischen und elliptisch-hyperbolischen Fällen an Stelle der eigentlich zu ermittelnden Funktion $f^{(\alpha)}(z)$ die Potentialfunktion

$$u^{(\alpha)} = \log |f^{(\alpha)}(z)|,\ [\alpha = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8],$$

d. i. den reellen Teil der Funktion $\log f^{(\alpha)}(z)$; in den parabolischen Fällen jedoch betrachten wir statt der eigentlich zu ermittelnden Abbildungsfunktion $f^{(\beta)}(z)$ die Funktion

$$u^{(\beta)} = \Re(f^{(\beta)}(z)) \equiv \text{Reeller Teil von } f^{(\beta)}(z).$$

Wir wollen diese Funktionen u als Funktionen in B durch ein System analytischer Eigenschaften vollständig charakterisieren, und zwar die Funktionen $u^{(\alpha)}$ abgesehen von einer reellen additiven Konstanten, und die Funktionen $u^{(\beta)}$ abgesehen von einer reellen additiven und von einer positiv reellen multiplikativen Konstanten.

Das *Potential* $u^{(1)}$ ist eine in B einschliesslich der vollständigen Begrenzung eindeutige und reguläre Funktion, welche längs jeder einzelnen Begrenzungslinie einen gewissen (unbekannten) konstanten Wert annimmt und deren konjugierte Potentialfunktion $v^{(1)}$ längs L_1 den Periodizitätsmodul 2π, längs L_2 den Periodizitätsmodul -2π besitzt, längs allen übrigen Begrenzungslinien jedoch den Periodizitätsmodul null.

Das *Potential* $u^{(2)}$ ist eine in B mit Ausnahme des Punktes z_1 eindeutige und reguläre Funktion, welche im Punkte z_1 unendlich wird wie $\log|z - z_1| \equiv \log r_1$ und auf jeder Begrenzungslinie je einen (unbekannten) konstanten Wert annimmt,

deren konjugierte Funktion $v^{(2)}$ ferner längs L_1 den Periodizitätsmodul 2π besitzt, längs allen übrigen Begrenzungslinien den Periodizitätsmodul null.

Das *Potential* $u^{(3)}$ ist eine in B mit Ausnahme der beiden Punkte z_1 und z_2 eindeutige und reguläre Funktion, welche im Punkte z_1 wie $\log|z-z_1| \equiv \log r_1$ und im Punkte z_2 wie $-\log(z-z_2) \equiv -\log r_2$ unendlich wird, längs jeder anderen Begrenzungslinie je einen (unbekannten) konstanten Wert annimmt, deren konjugierte Funktion $v^{(3)}$ ferner schliesslich längs allen Begrenzungslinien den Periodizitätsmodul null besitzt.

Das *Potential* $u^{(4)}$ ist eine im Bereich B mit Ausnahme der Punkte z_1 und z_2 eindeutig und regulär erklärte Funktion, welche in z_1 unendlich wird wie $\log r_1$, in z_2 wie $-\log r_2$, welche ferner längs des ganzen Randes die normale Ableitung null besitzt, oder anders ausgedrückt, deren konjugierte Funktion $v^{(4)}$ längs jeder Begrenzungslinie je einen (unbekannten) konstanten Wert besitzt.

Das *Potential* $u^{(5)}$ ist eine in B eindeutige und, abgesehen vom Punkte z_1 reguläre Funktion, die in z_1 unstetig wird wie $r_1^{-1}\cos(\varphi-\varphi_1)$ und längs des ganzen Randes die normale Ableitung null besitzt, oder anders ausgedrückt, deren konjugierte Funktion $v^{(5)}$ längs jeder Begrenzungslinie je einen (unbekannten) konstanten Wert besitzt.

Das *Potential* $u^{(6)}$ ist eine im ganzen Bereich B eindeutige und reguläre Funktion, welche längs den Begrenzungslinien $L_1, L_2, \ldots, L_k$ je einen (unbekannten) konstanten Wert hat, längs den Begrenzungslinien $L_{k+1}, \ldots, L_m$ die normale Ableitung null oder anders ausgedrückt je einen (unbekannten) konstanten Wert ihrer konjugierten Funktion $v^{(6)}$ hat. Die genannte konjugierte Funktion hat ferner längs L_1 den Periodizitätsmodul 2π, längs L_2 den Periodizitätsmodul -2π, schliesslich längs $L_3, \ldots, L_m$ den Periodizitätmodul null.

Das *Potential* $u^{(7)}$ ist eine im ganzen Bereich B eindeutige und mit Ausnahme des Punktes z_1 reguläre Funktion, welche längs den Linien $L_1, L_2, \ldots, L_k$ je einen (unbekannten) konstanten Wert, längs $L_{k+1}, \ldots, L_m$ die normale Ableitung null, oder anders ausgedrückt, je einen konstanten Wert der zugehörenden konjugierten Funktion $v^{(7)}$ besitzt. Diese konjugierte Potentialfunktion besitzt ferner längs L_1 den Periodizitätsmodul 2π, längs $L_2, \ldots, L_k$ den Periodizitätsmodul null.

Das *Potential* $u^{(8)}$ ist eine im ganzen Bereich B mit Ausnahme der beiden Punkte z_1 und z_2 reguläre Funktion, welche in z_1 unstetig wird wie $\log r_1$, in z_2 unstetig wie $-\log r_2$, welche ferner längs $L_1, \ldots, L_k$ je einen (unbekannten) konstanten Wert, längs $L_{k+1}, \ldots, L_m$ die normale Ableitung null hat oder, anders ausgedrückt, je einen (ebenfalls unbekannten) konstanten Wert der konjugierten Funktion $v^{(8)}$. Diese konjugierte Funktion besitzt schliesslich längs $L_1, \ldots, L_k$ den Periodizitätsmodul null.

Das *Potential* $u^{(9)}$ ist eine im ganzen Bereich B eindeutige und mit Ausnahme des Punktes z_1 reguläre Funktion, welche in z_1 unstetig wird wie $r_1^{-1}\cos(\varphi-\varphi_1)$, längs $L_1, \ldots, L_k$ die normale Ableitung null oder, anders ausgedrückt, je einen (unbekannten) konstanten Wert der konjugierten Potentialfunktion darbietet, längs $L_{k+1}, \ldots, L_m$ hingegen je einen (unbekannten) konstanten Wert und den Periodizitätsmodul null der konjugierten Funktion $v^{(9)}$ darbietet.

Die in der angegebenen Weise durch Eigenschaften charakterisierten Potentiale $u^{(1)}, \ldots, u^{(9)}$ sind durch diese Eigenschaften vollständig bestimmt bis auf additive Konstante. Bildet man nämlich die Differenz zweier solcher Potentiale desselben Index, von welchen angenommen wird, dass bei beiden die dem Index entsprechenden Eigenschaften vorhanden sind, so wird die Differenz dieser beiden Potentiale ein Potential werden, welches zusammen mit dem zugehörigen konjugierten Potential eine analytische Funktion $F(z)$ liefert, auf welche die Voraussetzungen des Hilfssatzes Pag. 314 zutreffen, eine Differenzfunktion, welche sich folglich auf eine Konstante reduzieren muss.

2. Wir wollen uns jetzt noch, bevor wir die Frage nach der Existenz der Potentialfunktionen $u^{(1)}, \ldots, u^{(9)}$ erledigen, überlegen, wie wir von den als gefunden angenommenen Funktionen $u^{(\lambda)}$ $[\lambda = 1, 2, \ldots, 9]$ zu den eigentlich gesuchten Abbildungsfunktionen $f^{(\lambda)}(z)$ gelangen, und den Beweis führen, dass diese Funktionen tatsächlich die gewünschten Abbildungen leisten.

Die Abbildungsfunktionen werden, wenn mit $v^{(\lambda)}$ in allen Fällen die zu $u^{(\lambda)}$ konjugierte Potentialfunktion bezeichnet wird, durch die Ausdrücke geliefert

$$f^{(\alpha)}(z) = e^{u^{(\alpha)} + i\, v^{(\alpha)}} \qquad [\alpha = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8]$$

$$f^{(\beta)}(z) = u^{(\beta)} + i\, v^{(\beta)} \qquad [\beta = 5, 9]$$

Die Existenz der Potentiale $v^{(\alpha)}$ und $v^{(\beta)}$ wird bei der Art und Weise, wie wir unten die Funktionen $u^{(\alpha)}$ und $u^{(\beta)}$ finden werden, für uns nicht problematisch sein, insofern als wir die Funktionen $u^{(\alpha)}$ und $u^{(\beta)}$ unmittelbar oder mittelbar durch gleichmässig konvergente Reihen mit rationalen oder logarithmischen komplexen Gliedern finden werden, deren reelle oder imaginäre Teile uns sofort konjugierte Potentiale liefern.

Betrachten wir speziell die durch die Funktion

$$f^{(1)}(z) = e^{u^{(1)} + i\, v^{(1)}}$$

vermittelte konforme Abbildung. Wir stellen sofort fest, dass die Funktion $f^{(1)}(z)$ in B einschliesslich des ganzen Randes eine reguläre und eindeutige analytische

Funktion ist, die weder den Wert 0, noch den Wert ∞ annimmt, ferner die Eigenschaft hat, dass die Amplitude ihres Wertes längs L_1 die vollständige Änderung 2π, längs L_2 die vollständige Änderung -2π, längs allen übrigen Begrenzungslinien jedoch die vollständige Änderung null erfährt, ferner die Eigenschaft, auf allen Begrenzungslinien einen konstanten absoluten Betrag zu besitzen.

Da die Funktion $z' = f^{(1)}(z)$ im Bereiche B einschliesslich seiner Begrenzung regulär und eindeutig ist, ist es möglich, den dadurch gesetzten Vorrat der umgekehrten Wertzuordnungen $z(z')$ mittels einer endlichen Anzahl von Funktionselementen regulären oder algebraischen Charakters mit z' als unabhängiger Variablen vollständig zur Darstellung zu bringen. Das Bild des Bereichs B wird so ein den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt nicht enthaltendes endlichvielblättriges Flächenstück B' mit höchstens endlich vielen Windungspunkten sein müssen, dessen vollständige Begrenzung sich auf höchstens m Kreise K verteilt, die den Nullpunkt zum Mittelpunkte haben. Aus dem Angeführten folgt schon ohne weiteres, dass das Flächenstück B' mit keinem seiner Punkte ausserhalb des grössten und innerhalb des kleinsten jener Kreise sich erstrecken kann und dass daher dieser grösste und kleinste Kreis nur als einfache und ohne Umkehr durchlaufene Begrenzung auftreten kann. Die Vielblättrigkeit des Bereichs B' für jede Stelle der Ebene wird nun nach einem Analysis-Situs-Satz angegeben durch die für die Stelle ermittelt zu denkende Umlaufungszahl der vollständigen Begrenzung des Bereichs B' bei Durchlaufung derselben in positivem Sinne, wobei der Bereich selbst zur Linken liegt. Diese aber kann in der Tat sofort festgestellt werden, da die betreffenden Umlaufszahlen für den Nullpunkt als Orientierungszentrum bekannt sind. Es ergibt sich insbesondere, dass jede nicht auf einem Kreise K liegende, zwischen dem kleinsten und grössten Kreise K befindliche Stelle einfach bedeckt wird. Damit aber ist sofort klar, dass der ganze Bereich B' ein einblättriger Bereich sein muss, wie es gewünscht wird.

Wir betrachten zweitens den Fall der Funktion

$$f^{(5)}(z) = u^{(5)} + i v^{(5)}.$$

Die Begrenzungslinien von B gehen jedenfalls alle in endliche Schlitze über, von welchen allerdings nicht ohne weiteres klar ist, dass ihre vollständige Durchlaufung in einem einfachen Hin- und Hergang besteht. Dies wird jedoch sofort klar, wenn wir zeigen können, dass die Bildebene bei der durch $f^{(5)}(z)$ vermittelten Abbildung in keinem zweidimensionalen Teile mehrblättrig bedeckt werden kann.

Das aber ergibt sich aus dem Umstande, dass die Annahme einer zweiblättrigen Bedeckung eines Gebietes ohne weiteres dazu führt, dass auch die Nachbarschaft des unendlich fernen Punktes zweiblättrig bedeckt sein muss; denn es setzen sich die betreffenden zwei Blätter in Richtung der Achse des Reellen, wobei keiner der Grenzschlitze passiert wird, notwendig grenzstellenfrei fort. Nun wird aber die unmittelbare Umgebung des unendlich fernen Punktes nur einfach bedeckt, weil nur eine Unendlichkeitsstelle erster Ordnung der Funktion $f^{(5)}(z)$ existiert. Hiermit ist der Abbildungscharakter der Funktion $f^{(5)}(z)$ festgestellt, und es ist wieder klar, das die begrenzenden Schlitze alle getrennt voneinander liegen und dass ihre vollständige Durchlaufung in Form eines einfachen Hin- und Herganges stattfindet.

Fassen wir schliesslich noch das Beispiel der Funktion

$$f^{(9)}(z) = u^{(9)} + i\,v^{(9)}$$

ins Auge, in welchem Falle wir zwischen Schlitzen parallel der Achse des Reellen und parallel der Achse des Imaginären zu unterscheiden haben. Wir wissen hier von vornherein, dass die Umgebung des unendlich fernen Punktes einfach bedeckt wird auch von dem Bildbereich B'. Wir können nun den unendlich fernen Flächenteil durch einen hinreichend grossen Hilfskreis von B' abtrennen und erhalten so einen Bereich B'', der aussen von jenem Hilfskreise, innen von endlich vielen schlitzförmigen Linien begrenzt wird. Nun ist aber wiederum klar, dass für jede Stelle der B'-Ebene, welche innerhalb des Hilfskreises liegt und nicht mit einem Begrenzungspunkte von B' koinzidiert, die Umlaufungszahl der vollständigen Begrenzung von B'' den Wert 1 hat, welcher Wert eben von dem Hilfskreis herrührt. Damit ist gezeigt, dass die Fläche B'' eine überall einblättrige Bedeckung jenes Kreisinneren darbietet und dass somit diese Fläche nach innen von jenen schlitzförmigen Linien begrenzt wird, deren jede einzelne in einem einfachen Hin- und Hergang durchlaufen zu denken ist.

§ 4.

Bestimmung des Potentials $u^{(1)}$.

Die Lösung aller neun Abbildungsaufgaben ist zurückgeführt auf den Nachweis der Existenz der Potentialfunktionen $u^{(1)}, \ldots, u^{(9)}$. Um nun zu diesen zu gelangen, werden wir noch gewisse weitere Reduktionen vornehmen.

Wir beginnen damit, das Potential $u^{(1)}$ zu bestimmen. Dieses Potential ist auf allen Begrenzungslinien konstant, jedoch sind diese konstanten Werte unbekannt. Sie werden durch die Eigenschaften des Potentials näher bestimmt, ein

zugehörendes konjugiertes Potential $v^{(1)}$ zu besitzen, welches längs L_1 den Periodizitätsmodul 2π, längs L_2 den Periodizitätsmodul -2π; längs allen übrigen jedoch den Periodizitätsmodul null hat. Diese letztere Aufgabe erledigt sich, wie wir sehen werden, verhältnismässig leicht durch Auflösung gewisser nicht homogener linearer Gleichungen, sobald es uns gelungen ist, die folgenden m Potentiale zu ermitteln

$$I_\nu^{(1)} [\nu = 1, 2, \ldots, m],$$

nämlich $I_\nu^{(1)}$ als diejenige in B eindeutige und einschliesslich des Randes reguläre Potentialfunktion, welche längs L_ν den konstanten Wert 1, längs allen übrigen Begrenzungslinien den konstanten Wert 0 annimmt. Nehmen wir an, dass es uns gelungen sei, diese Funktionen herzustellen, so besitzen wir in $\sum\limits_{\nu=1}^{m-1} c_\nu I_\nu^{(1)}$ diejenige in B eindeutige und reguläre Potentialfunktion, die auf L_ν den konstanten c_ν annimmt $[\nu = 1, \ldots, m-1]$, auf L_m jedoch den konstanten Wert null. Die genannten $m-1$ Funktionen $I_\nu^{(1)} [\nu = 1, \ldots, m-1]$ werden jede ein System $\omega_{\nu,k} [k = 1, \ldots, m-1]$ von $m-1$ Periodizitätsmoduln der konjugierten Funktionen $I_\nu^{(1)'}$ besitzen, entsprechend der Durchlaufung der Linien $L_1, \ldots, L_{m-1}$. Die Determinante des Systems der $(m-1)^2$ Grössen $\omega_{\nu,k}$ kann nun nicht verschwinden;[1] denn sonst würde man eine nicht verschwindende homogene lineare Kombination der $I_\nu^{(1)} [\nu = 1, \ldots, m-1]$ aufstellen können, welche längs $L_1, \ldots, L_{m-1}$, d. h. auch längs L_m den Periodizitätsmodul null des imaginären Teils aufweist, welche also zusammen mit ihrer konjugierten Funktion eine in B eindeutige reguläre Funktion liefern würde, deren reeller Teil auf allen Begrenzungslinien konstant ist. Nachdem das Nichtverschwinden der erwähnten Determinante feststeht, ist es möglich, eine nicht verschwindende lineare homogene Kombination der Grössen $I_\nu^{(1)} [\nu = 1, \ldots, m-1]$ so zu bestimmen, dass die zugehörende konjugierte Potentialfunktion längs L_1 den Periodizitätsmodul 2π, längs L_2 den Periodizitätsmodul -2π, längs $L_3, \ldots, L_{m-1}$ den Periodizitätsmoduln null, daher auch längs L_m den Periodizitätsmodul null besitzt. Damit wäre die Funktion $u^{(1)}$ gefunden.

Alles reduziert sich somit auf die eine Frage der Existenz der Funktionen $I_\nu^{(1)}$. Diese Funktionen aber ergeben sich uns nun durch Reihenbildung bei Zugrundelegung der in der Abhandlung II als existierend nachgewiesenen Fundamentalfunktion

[1] Vgl. Schottky l. c. (Journ. f. Math. Bd. 117).

$$f(z) = \zeta,$$

welche den Bereich B auf die obere ζ-Halbebene abbildet (*Fundamentalabbildung*). In der ζ-Ebene konstruieren wir ein Fundamentalpolygon Π_0, von $2m-2$ Halbkreisen und $2m-2$ Stücken der Achse des Reellen begrenzt. Ein solches Polygon Π_0 erhalten wir, indem wir den Bereich B durch $m-1$ Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden Bereich B_0 verwandeln, dessen Bild Π'_0 in der ζ-Ebene ermitteln und nunmehr die $2m-2$ paarweise zugeordneten Seiten von Π'_0 direkt durch Halbkreise mit denselben Endpunkten ersetzen.

Wir denken uns das zu bestimmende Potential $I^{(1)}_{\nu}$ in die ζ-Ebene überpflanzt und bemerken folgende Eigenschaften des Potentials. Die Grösse $I^{(1)}_{\nu}$ ist in der ganzen oberen Halbebene, einschliesslich der Achse des Reellen, bis auf die auf ihr befindlichen Grenzpunkte (Indiskontinuitätspunkte) eine endliche und eindeutige Potentialfunktion. Sie nimmt auf allen der Linie L_{ν} entsprechenden Strecken s_{ν} der Achse des Reellen den konstanten Wert 1 an, auf den übrigen Strecken, welche den von L_{ν} verschiedenen Begrenzungslinien des Bereichs B entsprechen, den konstanten Wert null. Die Funktion ist ferner beschränkt in der ganzen oberen ζ-Halbebene und hat die Eigenschaft, gegenüber den Substitutionen der Fundamentalgruppe unverändert zu bleiben. Eine solche Funktion lässt sich nun bilden als reeller Teil einer gleichmässig konvergenten Reihe von analytischen Funktionen. Wir wollen, um eine einfache Vorstellung zu haben, annehmen, dass alle Strecken s_{ν} in einem endlichen Intervall der Achse des Reellen enthalten sind. Wir erreichen dies jedenfalls durch eine eventuelle lineare Transformation, welche die obere ζ-Halbebene in sich transformiert. Wir bezeichnen dann mit a_{ν} den linken Endpunkt und mit b_{ν} den rechten Endpunkt einer Strecke s_{ν} und bilden die Summe

$$\sum_{s_\nu} \log \frac{\zeta - a_\nu}{\zeta - b_\nu},$$

wobei über alle Endpunkte a_{ν}, b_{ν} von den Strecken s_{ν} zu summieren ist. Die gleichmässige Konvergenz dieser unendlichen Reihe zunächst in der oberen Halbebene, dann aber auch in der ganzen Ebene mit Ausnahme der genannten Grenzpunkte ergibt sich aus der Bemerkung der Endlichkeit der Summe der Längen aller Strecken s_{ν}. Man muss dabei für den Logarithmus den Hauptwert gesetzt denken oder doch, für die weiteren Zweige der dargestellten Funktion, den Hauptwert für alle Grössen der Summe von einem gewissen ab. Nun ist zu berücksichtigen, dass die Grössen $|\zeta - a_{\nu}|$ und $|\zeta - b_{\nu}|$ alle zwischen zwei von 0 und ∞ verschiedenen endlichen Schranken bleiben und dass daher

$$\left|1 - \frac{\zeta - a_\nu}{\zeta - b_\nu}\right| = \left|\frac{a_\nu - b_\nu}{\zeta - b_\nu}\right| < \alpha \, . \, s_\nu$$

gesetzt werden kann, unter α eine endliche, von der Wahl der Strecke s_ν unabhängige Schranke verstanden, und unter s_ν jetzt die Länge der gleichbezeichneten Strecke s_ν.

Nun stellen wir aber auch sofort fest, dass der imaginäre Teil des in der oberen Halbebene erklärten Hauptzweiges der obigen Funktion von ζ längs jeder Strecke s_ν den Wert π erhält, längs jeder Strecke $s_\mu [\mu \neq \nu]$ jedoch den Wert 0, wie es sein soll. Beides ergibt sich nämlich aus der geometrischen Deutung des imaginären Teils der Grösse $\log \frac{\zeta - a_\nu}{\zeta - b_\nu}$ als scheinbarer Grösse der Strecke s_ν, gesehen vom Punkte ζ. In der Tat wird, wenn wir auf eine bestimmte Strecke s_ν lossteuern, die scheinbare Grösse dieser Strecke gleich π, während sie dabei gleichzeitig für jede andere Strecke 0 wird.

Noch ist der automorphe Charakter des imaginären Teils der obigen Funktion zu beweisen. Dieser aber folgt aus seiner geometrischen Deutung als der gesamten scheinbaren Grösse aller Strecken s_ν, vom Punkte ζ aus gesehen. Bei einer Substitution der Fundamentalgruppe wird das System aller Strecken s_ν in sich transformiert. Geht dabei der Punkt ζ in ζ' über, die Strecke s_ν in s'_ν, so ist die scheinbare Grösse der Strecke s'_ν, vom Punkte ζ' gesehen, gleich der scheinbaren Grösse der Strecke s_ν, vom Punkte ζ gesehen. Man erkennt dies z. B. durch die Schreibweise (Am = Amplitude von)

$$\mathrm{Am}\left(\frac{\zeta - a_\nu}{\zeta - b_\nu}\right) = \frac{1}{2} \, \mathrm{Am}\left(\frac{\zeta - a_\nu}{\zeta - b_\nu} : \frac{\bar{\zeta} - a_\nu}{\bar{\zeta} - b_\nu}\right),$$

unter $\bar{\zeta}$ die zu ζ konjugiert komplexe Grösse verstanden. In letzterer Schreibung haben wir ein invariantes Doppelverhältnis stehen. Einen anderen geometrischen Grund hat man, wenn man bedenkt, dass der fragliche Winkel halb so gross ist als der seinerseits invariante Winkel, welchen die von ζ nach a_ν und b_ν führenden Orthogonalkreisbögen der Achse des Reellen im Punkte ζ bilden.

§ 5.

Abbildungen eines mehrfach zusammenhängenden Bereichs auf sich selbst.

1. Im Besitze der Abbildungsfunktion $f^{(1)}(z)$ (Abbildung auf die geschlitzte Kreisringfläche, im Falle $m = 2$ ungeschlitzte Kreisringfläche) sind wir in der Lage, in einfachster Weise die Frage nach der Gesamtheit möglicher eineindeutiger

konformer Transformationen eines m-fach ($m \geq 2$) zusammenhängenden schlichten Bereichs in sich selbst zu beantworten.

1. Die wichtige hier bei $m > 2$ bestehende bekannte Tatsache ist, dass die Anzahl der verschiedenen derartigen Transformationen eine *durch m allein bestimmte ganze Zahl nicht überschreiten* kann. Zum Beweise dieses Satzes zeigen wir, dass, wenn ein m-fach zusammenhängender Bereich B in der Weise auf sich selbst eineindeutig abgebildet ist, dass dabei gewisse drei der Begrenzungslinien einzeln jede in sich selbst transformiert werden, so ist diese Abbildung die identische Abbildung.

Bringen wir in der Tat den Bereich B in die Form der kreisbogenförmig geschlitzten Kreisringfläche B' mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, indem wir insbesondere zwei der sich selbst entsprechenden Randlinien des Bereiches B in den innern und äussern Begrenzungskreis des Bereichs B' überführen, so gewinnen wir durch Übertragung vom Bereiche B auf den Bereich B' eine Abbildung des letzteren Bereiches auf sich selbst, bei welcher der innere und äussere Begrenzungskreis jeder sich selbst entsprechen. Es sei $F(z)$ die Funktion, welche diese letztere Abbildung vermittelt. Diese Funktion $F(z)$ wird sich dann notwendiger Weise auf der Begrenzung des Bereiches B' regulär verhalten nach unseren allgemeinen Prinzipien der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Betrachten wir nunmehr die Funktion

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{z}$$

und nehmen an, dieselbe sei keine Konstante, so wird jeder einzelnen Begrenzungslinie des Bereichs B' eine Wertefolge der Funktion $\Phi(z)$ entsprechen, welche, geometrisch gesprochen, einen Kreisbogen K beschreibt, in einem einfachen oder verschiedenen Hin- und Hergängen. Es wird insbesondere dabei nicht zu einer vollständigen Umlaufung des Nullpunktes kommen können, weil die vollständige Amplitudenänderung der Grösse $\Phi(z)$ für alle Begrenzungslinien des Bereichs B' gleich null ist. Man gelangt vielmehr bei Durchlaufung jeder Linie notwendig zu einem Umkehrpunkte ζ^*. Ist z^* der diesem Umkehrpunkte entsprechende Punkt des Bereiches B', so muss in diesem Punkte die Ableitung der Funktion $\Phi(z)$ verschwinden. Es wird daher ein der Stelle z^* benachbarter Flächenteil von B' auf eine vollständige Umgebung der Stelle ζ^* abgebildet. Darin liegt, dass jene Nachbarschaft Stellen in ihrem Innern enthält, an welchen der absolute Betrag der Funktion $\Phi(z)$ grösser ist, als in z^*, mithin auch grösser als an allen Stellen der Begrenzungslinie, zu welcher z^* gehört; denn der absolute Betrag der Grösse $\Phi(z)$ ist ja auf jeder Begrenzungslinie von B' konstant. Hiermit ist aber

ein Widerspruch gefunden mit dem nach allgemeinen Prinzipien geltenden Satze, dass die Funktion $\Phi(z)$ für den Bereich B' das Maximum des absoluten Betrages ihrer Werte auf einer ihrer Begrenzungslinien annehmen muss.

Nachdem feststeht, dass $F(z) = cz$ ist, unter c eine Konstante verstanden, kann die betrachtete Abbildung des Bereiches B' auf sich selbst nur eine Drehung mit dem Nullpunkte als Fixpunkt sein. Da nun noch ein innerer Begrenzungsschlitz des Bereiches B' vorhanden ist, welcher durch die Transformation ebenfalls in sich übergehen sollte, so muss die Konstante c den Wert 1 haben.

Die gegebene Beweismethode lässt auch die Sachlage im *Falle* $m = 2$ vollständig erkennen. In diesem Falle haben wir einen ungeschlitzten Kreisring B'. Wir können annehmen, dass der Symmetralkreis desselben mit dem Einheitskreis zusammenfällt. Diejenigen Transformationen, welche B' unter Festlassung der einzelnen Begrenzungslinien als Ganzes in sich transformieren, sind die Drehungen mit dem Nullpunkt als Fixpunkt. Diejenigen Transformationen, welche eine Vertauschung der Begrenzungskreise bewirken, gehen in die ersteren über, wenn man sie mit der Transformation $z' = \frac{1}{z}$ zusammensetzt, welche den äusseren Begrenzungskreis in den inneren überführt.

2. Man kann wünschen, die obige Frage *ohne Bezugnahme auf die Entwicklungen über Ränderzuordnung* zu behandeln. Dies ist folgendermassen möglich.

Unsere Funktion $\Phi(z)$ wird, sofern sie nicht eine Konstante ist, jedenfalls eine Abbildung auf ein Gebiet vermitteln, welches zwischen zwei endlichen Kreisen vollständig enthalten ist. Bei Annäherung an die Begrenzungslinien des Bereiches B' werden die Werte der Funktion $\Phi(z)$ sich, geometrisch gesprochen, gewissen Kreislinien nähern, deren Mittelpunkt im Nullpunkt liegt und deren Anzahl nicht grösser als m sein kann. Nehmen wir nun in der Φ-Ebene einen von den genannten m Kreisen verschiedenen, jedoch mit ihnen konzentrischen Kreis K an, so wird die Funktion $\Phi(z)$ zweifellos innerhalb B' auch solche Werte annehmen, die, geometrisch gesprochen, auf dem Kreise K liegen. Dieser Kreis ist nun aber grenzstellenfrei. Betrachtet man an Stelle der Funktion $\Phi(z)$ jetzt die Funktion $\log \Phi(z)$, so ist auch diese Funktion eindeutig in B'. Die Kreislinie K geht über in eine grenzstellenfreie Gerade parallel der Achse des Imaginären. Man kann jetzt auf dieser Geraden in beliebige Entfernung wandern, ohne auf eine Grenzstelle zu treffen. Es würde also der absolute Betrag der, wie gesagt, eindeutigen Funktion $\log \Phi(z)$ beliebig grosser Werte fähig sein, während diese Funktion doch offenbar beschränkt ist.

3. Durch die vorstehenden Entwicklungen ist offenbar der Endlichkeitsbeweis auch in dem weiteren Umfange geführt, welcher sich ergibt durch Zulassung

auch der symmetrischen Umformungen (d. i. konformen Abbildungen mit Umlegung der Winkel). Liegt ein *dreifach zusammenhängender schlichter Bereich B* vor, so liefert die Abbildung desselben auf die konzentrisch kreisförmig geschlitzte Kreisringfläche B' das Resultat, dass jeder derartige Bereich B auf eine und nur eine Weise durch drei regulär analytische Querschnittlinien in zwei zu einander im analytischen Sinne inbezug auf dieselben spiegelbildlich symmetrische einfach zusammenhängende Hälften zerlegt werden kann. Bei dem Bereiche B' wird die gemeinte Zerlegung, wie unmittelbar ersichtlich ist, von drei, einer und derselben durch den Ringmittelpunkt gehenden Geraden angehörenden Strecken bewirkt.

§ 6.

Bestimmung des Potentials $u^{(2)}$. Herleitung einiger bekannter Konvergenzgrundtatsachen bei automorphen Gruppen.

1. Die *Bestimmung des Potentials $u^{(2)}$* kommt mit Rücksicht auf das über die Funktionen $I_\nu^{(1)}$ Gesagte offenbar darauf hinaus, diejenige Potentialfunktion $I^{(2)}$ zu ermitteln, welche im ganzen Bereich B, abgesehen von dem Punkte z_1, eindeutig und regulär ist, auf der ganzen Begrenzung von B den konstanten Wert 0 annimmt und im Punkte z_1 unendlich wird wie $\log|z-z_1|$. Lassen wir dem Punkte z_1 in der ζ-Halbebene den Punkt ζ_1 im Innern des Fundamentalpolygons Π_0 entsprechen und bezeichnen wir mit $\bar{\zeta}_1$ den zu ζ_1 gehörenden konjugiert imaginären Wert, so ergibt sich die Funktion $I^{(2)}$ direkt als der reelle Teil einer analytischen Funktion in der Gestalt

$$I^{(2)} = \Re \sum \log \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \bar{\zeta}_1} \qquad (\Re \equiv \text{Reeller Teil von}),$$

wobei die Summe zu erstrecken ist über unendlich viele Terme, die man erhält, wenn man an Stelle der Punkte ζ_1 und $\bar{\zeta}_1$ die mit diesen äquivalenten Punkte $\zeta_1, \bar{\zeta}_1$ treten lässt. Die gleichmässige Konvergenz der Reihen ergibt sich, wenn man beachtet, dass die Summe $\Sigma|\zeta_1 - \bar{\zeta}_1|$, d. i. die Summe der Abstände je zweier konjugierter logarithmischer Unendlichkeitsstellen konvergent ist. (Siehe unter 2. dieses Paragraphen.)

Wiederum folgt der automorphe Charakter des reellen Teiles dieser Funktion und das Verschwinden dieses reellen Teiles längs allen Strecken $s_\nu [\nu = 1, \ldots, m]$ aus der Bemerkung, dass der einzelne Term des reellen Teiles in der oberen Halbebene eine eindeutige Potentialfunktion ist, die längs der Achse des Reellen verschwindet und nur in mit ζ_1 und $\bar{\zeta}_1$ äquivalenten Punkten logarithmisch unend-

lich wird, sodass man sagen kann, dass die sämtlichen unendlich vielen Terme nichts anderes darstellen, als die unendlich vielen Überpflanzungen der Funktion $\log\left|\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-\bar{\zeta}_1}\right|$ gemäss den Substitutionen der Fundamentalgruppe, eine Auffassung, welche den automorphen Charakter der Summe der reellen Teile als selbstverständlich erscheinen lässt.

2. Die vorher benützte Konvergenztatsache ist eine einfache Folge von der unmittelbar in Evidenz tretenden Konvergenz der Summe aller Bildstrecken der $2m-2$ Strecken σ_μ der Achse des Reellen, die an der Begrenzung des Fundamentalbereichs Π_0 teilnehmen. Bei Ausübung aller Substitutionen der Fundamentalgruppe gehen diese Strecken σ_μ in lauter verschiedene Strecken der Achse des Reellen über, von welchen eine, bei der Summierung auszuschliessende, den unendlich fernen Punkt enthält.

Zieht man irgend eine Kreislinie K, welche auf der Achse des Reellen eines der $2m-2$ Grundintervalle ausschneidet, indem sie diese Achse unter einem von null verschiedenen, sonst beliebigen Winkel trifft, so wird nun auch *die Summe der Umfänge aller Bildkreise von* K konvergent sein müssen, da wegen der Invarianz des Schnittwinkels mit der Achse des Reellen auch das Verhältnis zwischen Umfang des Kreises und Länge des ausgeschnittenen Achsenabschnittes dasselbe bleibt.

Nun ist jeder Kreis K', der ganz in der oberen Halbebene enthalten ist, einschliessbar in einen Kreis der Gattung K. Also ist auch für einen Kreis K' die Summe der Umfänge aller seiner Bildkreise konvergent. Ebenso steht es mit jedem Kreise K'', der die Achse des Reellen berührt, jedoch nicht in einem Grenzpunkte der Fundamentalgruppe. Jeder die Achse des Reellen schneidende Kreis K''' ferner lässt sich, sofern er nur keine Grenzpunkte trifft, durch Einführung eines Teilpunktes oberhalb und eines Teilpunktes unterhalb der Achse des Reellen unter Hinzunahme seiner Schnittpunkte mit der Achse des Reellen in vier Stücke zerlegen, deren jedes einzelne in einen besonderen Kreis der Gattung K'' eingeschlossen werden kann, wobei dann die Länge des eingeschlossenen Bogens jedesmal kleiner ist als der Umfang des einschliessenden Kreises K''. Hiermit ist auch für die Kreise der Gattung K''' die Konvergenz der Summe ihrer Umfänge bewiesen. Insbesondere ist hiermit auch die *Konvergenz der Summe der Umfänge aller Grundkreisbilder* dargetan, d. i. der Bilder der Begrenzungskreise des Fundamentalpolygons.

Betrachtet man jetzt die *Summe der Abstände eines vollständigen Systems äquivalenter Punkte* der oberen oder unteren Halbebene von der Achse des Reellen, so muss nun auch diese Summe *konvergent* sein; denn jeder solche Abstand ist

kleiner als die Länge eines Orthogonalkreisbogens, geführt von dem betrachteten Punkte nach einem Diskontinuitätspunkte (d. i. jeder von den Grenzpunkten verschiedene Punkt) der Achse des Reellen. Die letzteren Bögen aber können wir sämtlich untereinander äquivalent wählen so, dass jeder in einen Kreis der Gattung K'' eingeschlossen werden kann.

Wir bemerken ferner jetzt sofort, dass man überhaupt sagen kann, dass die *Summen der Längen aller Bilder irgend eines Kreisbogenpolygonzuges*, welcher nicht bis an die Grenzpunkte der Gruppe heranreicht, *konvergent* ist. Denn man kann einen solchen Polygonzug in endlich viele Stücke zerlegen, die ihrerseits je von einem Kreise der einen oder anderen obigen Gattung umschlossen werden können. Schliesslich finden wir ganz allgemein den Satz, dass, wenn ζ_1 und ζ_2 irgend zwei Punkte der ζ-Ebene, nur nicht Grenzpunkte sind, dass die *Summe der Abstandsgrössen* $\Sigma|\zeta_2-\zeta_1|$, erstreckt über alle Bildpunktepaare des Paares (ζ_1, ζ_2) *konvergent* ist. Diese Abstandsgrössen sind nämlich jedenfalls kleiner als die Längen von Kreisbogenpolygonzügen, welche die Punkte miteinander verbinden.

§ 7.

Bestimmung der Potentiale $u^{(3)}, u^{(4)}, u^{(5)}$.

1. Die *Bestimmung des Potentials* $u^{(3)}$ mit zwei entgegengesetzt gleichen logarithmischen Unstetigkeiten in B reduziert sich, abgesehen von einer durch eine lineare Kombination der $I^{(1)}_{\nu}$ zu bewirkenden Regulierung der Periodizitätsmoduln des imaginären Teiles auf die Bestimmung desjenigen Potentials $I^{(3)}$, welches in B die zwei logarithmischen Unstetigkeiten bei z_1 und z_2 hat und längs des ganzen Randes den Wert null annimmt. Lassen wir den Stellen z_1 und z_2 die Stellen ζ_1 und ζ_2 im Fundamentalpolygon entsprechen, so finden wir $I^{(3)}$ in der Gestalt

$$I^{(3)} = \Re\sum\log\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-\bar{\zeta}_1}:\frac{\zeta-\zeta_2}{\zeta-\bar{\zeta}_2} = \Re\sum\log\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-\bar{\zeta}_1} - \Re\sum\log\frac{\zeta-\zeta_2}{\zeta-\bar{\zeta}_2}.$$

4. *Das Potential* $u^{(4)}$ soll in z_1 und z_2 mit entgegengesetzt gleichen Koeffizienten logarithmisch unendlich werden und ausserdem die normale Ableitung null längs der ganzen Begrenzung haben. Dies führt zur Betrachtung des folgenden Ansatzes

$$I^{(4)} = \Re\sum\log\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-\zeta_2}\cdot\frac{\zeta-\bar{\zeta}_1}{\zeta-\bar{\zeta}_2} = \sum[(\log|\zeta-\zeta_1|+\log|\zeta-\bar{\zeta}_1|) -$$
$$-(\log|\zeta-\zeta_2|+\log|\zeta-\zeta_2|)].$$

Dieser Ansatz liefert uns in $I^{(4)}$ eine in der oberen Halbebene eindeutige Potentialfunktion mit den verlangten Unstetigkeiten in ζ_1, ζ_2 und den äquivalenten Punkten $\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}$, ferner ersichtlich mit verschwindender normaler Ableitung längs der Achse des Reellen, jedoch noch nicht der Bedingung genügend, sich gegenüber den Substitutionen der Fundamentalgruppe zu reproduzieren.

Die gleichmässige Konvergenz der Reihe folgt aus der gleichmässigen Konvergenz der beiden Bestandteile $\sum \log \frac{\zeta - \zeta_1^{(n)}}{\zeta - \zeta_2^{(n)}}$ und $\sum \log \frac{\zeta - \zeta_1^{(n)}}{\zeta - \zeta_2^{(n)}}$, wenn man beachtet, dass die Summe der Abstandsgrössen $|\zeta_2 - \zeta_1|$ und $|\zeta_2 - \zeta_1|$ nach § 6_2 konvergiert. Das Potential $I^{(4)}$ wird sich, wie schon gesagt, im allgemeinen nicht reproduzieren gegenüber den Substitutionen der Fundamentalgruppe, vielmehr dabei Änderungen um additive Konstanten erleiden. Es geht nämlich der einzelne Term der Summe, betrachtet als Funktion von ζ, bei Ausübung einer Substitution der Fundamentalgruppe in eine neue Funktion von ζ über, welche mit einem Term der Summe in den Unstetigkeitsformen übereinstimmt und sich folglich von demselben nur um eine additive Konstante unterscheidet.

Es handelt sich nun noch darum, eine Modifikation mit dem Potential $I^{(4)}$ vorzunehmen, durch welche $I^{(4)}$ in das eigentlich zu bestimmende Potential $u^{(4)}$ übergeht. Um diese Modifikation vorzunehmen, wollen wir uns vorstellen, dass wir das Potential $I^{(4)}$ auf den Bereich B überpflanzen, wo es dann längs den Begrenzungslinien die von uns nicht gewünschten Periodizitätsmoduln erleidet, jedoch die richtigen Unstetigkeiten besitzt und auch die normale Ableitung null längs des ganzen Randes. Die Modifikation muss stattfinden in Form der Addition eines unstetigkeitenfreien Potentials, welches ebenfalls die normale Ableitung null längs des ganzen Randes besitzt und dieselben Periodizitätsmodul wie $I^{(4)}$ hat.

Eine solche in Abzug zu bringende Funktion lässt sich aber bestimmen durch Heranziehung des Potentials $v^{(1)}$, d. i. des konjugierten Potentials zu $u^{(1)}$. Dieses Potential hat den Typus der in Abzug zu bringenden Funktion, und zwar sind die auftretenden Periodizitätsmoduln 2π längs L_1, -2π längs L_2, auf allen übrigen Linien null. Wir können nun mit $v^{(1)} \equiv v_2^{(1)}$ analoge Funktionen $v_3^{(1)}, v_4^{(1)}, \ldots, v_m^{(1)}$ bilden, indem wir die Linie L_2 bzw. durch $L_3, L_4, \ldots, L_m$ ersetzen. Durch Abzug einer linearen Kombination können wir so die Periodizitätsmoduln des Potentials $I^{(4)}$ längs $L_2, L_3, \ldots, L_m$ beseitigen. Dann muss von selbst auch der Periodizitätsmodul auf L_1 wegfallen und also die Funktion $u^{(4)}$ entstehen.

5. Zur Bildung des *Potentials* $u^{(5)}$ gehen wir von der allgemeinen SCHOTTKYschen Reihenbildung

$$F(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (R(\zeta^{(n)}) - R(\alpha^{(n)}))$$

aus, indem wir unter $R(\zeta)$ eine rationale Funktion von ζ verstehen, welche nur im Fundamentalbereich und seinem Spiegelbilde in der unteren Halbebene unendlich wird, ferner unter $\zeta^{(n)}$ das durch eine beliebige Substitutionen der Fundamentalgruppe entstehende Bild der Stelle ζ, unter $\alpha^{(n)}$ das entsprechende Bild des festen Punktes α. Die Reihenbildung ergibt sich auf natürlichste Weise, indem aus der Grundfunktion $R(\zeta)$ durch Überpflanzung gemäss allen Substitutionen der Fundamentalgruppe die neuen rationalen Funktionen $R_n(\zeta) = R(\zeta^{(n)})$ von ζ bildet und sodann dieselben zur Erzielung der Konvergenz noch um die Konstanten $R(\alpha^{(n)})$ vermindert, so dass sämtliche so modifizierten rationalen Funktionen nunmehr im Grundpunkte α verschwinden. Die obige Reihe ist dann nach SCHOTTKY in der ganzen ζ-Ebene mit Ausnahme der Grenzpunkte der Gruppe gleichmässig konvergent, weil die Summe der Längen $|\zeta^{(n)} - \alpha^{(n)}|$ konvergiert und die obige Summe mit letzterer Term für Term vergleichbar wird, da der Differentialquotient

$$\left| \frac{R(\zeta^{(n)}) - R(\alpha^{(n)})}{\zeta^{(n)} - \alpha^{(n)}} \right| < \gamma$$

gesetzt werden kann, unter γ eine von n unabhängige positive Konstante verstanden. Die durch die unendliche Reihe dargestellte Funktion ändert sich ferner bei Ausübung der Substitutionen $\zeta' = L(\zeta)$ der Fundamentalgruppe nur um additive Konstanten, aus dem einfachen Grunde, weil nach der Entstehung der einzelnen Terme die Werte derselben an der Stelle ζ' sich von den Werten der vermöge $\zeta' = L(\zeta)$ korrespondierenden Terme immer nur um additive Konstanten unterscheiden.

Die rationale Funktion $R(\zeta)$ kann nun so gewählt werden, dass sie für reelle ζ ebenfalls reell ist. Alsdann besitzt die Funktion $F(\zeta)$ die Eigenschaft, auf der ganzen Achse des Reellen reell zu sein, sodass also ihr reeller Teil die normale Ableitung null, während der imaginäre Teil auf den einzelnen Diskontinuitätsintervallen der Achse des Reellen immer den konstanten Wert null annimmt. Wählen wir speziell

$$R(\zeta) = \frac{a}{\zeta - \zeta_1} + \frac{a}{\zeta - \zeta_1}$$

mit a eine komplexe Konstante, mit $\bar{a}$ ihren konjugiert komplexen Wert bezeichnend, so gewinnen wir, wenn wir den Normierungspunkt α mit ∞ zusammenfallen lassen, eine Funktion

$$F(\zeta) = I^{(5)} + I^{(5)\prime}$$

in Gestalt einer Reihe

$$F(\zeta) = \sum_{(n)} \left\{ \frac{a_n}{\zeta - \zeta_1^{(n)}} + \frac{\bar{a}_n}{\zeta - \bar{\zeta}_1^{(n)}} \right\},$$

in welcher $\bar{a}_n$ die zu a_n konjugierte Grösse ist, welch letztere den Wert $\left(\frac{d\zeta^{(n)}}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_1}$ hat. Die Funktion $I^{(5)\prime}$ bleibt gegenüber den Substitutionen der Fundamentalgruppe ungeändert. Sie verschwindet längs der ganzen Achse des Reellen. Der reelle Teil ist jetzt nur so zu modifizieren, dass die additiven Konstanten, welche sich bei Ausübung der Fundamentalsubstitutionen der Gruppe ergeben, den Wert null bekommen. Dies erreichen wir aber durch Hinzufügung einer linearen Kombination der Funktionen $I_\nu^{(1)\prime}$ zu $I^{(5)}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, der $I_\nu^{(1)}$ zu $I^{(5)\prime}$, wobei mit $I_\nu^{(1)\prime}$ die zu $I_\nu^{(1)}$ gehörende konjugierte Funktion bezeichnet ist. Die obige Bemerkung, dass $a_n = \left(\frac{d\zeta^{(n)}}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_1}$ ist, kann ebenfalls dazu dienen, die Konvergenz der obigen Reihe darzutun. Denn es ist bekanntlich für alle auf der Achse des Reellen eigentlich diskontinuierlichen Gruppen reeller Substitutionen der Satz zutreffend, dass die Reihe $\sum_{(n)} \frac{d\zeta^{(n)}}{d\zeta}$ konvergiert für jede von den Grenzpunkten der Gruppe verschiedene Stelle ζ.

§ 8.

Bestimmung der Potentiale $u^{(6)}, u^{(7)}, u^{(8)}, u^{(9)}$.

1. Die *Bestimmung des Potentials* $u^{(6)}$ wird uns auf einem Wege gelingen, der analog ist dem zur Bestimmung von $u^{(1)}$ eingeschlagenen Wege. Wir definieren zunächst gewisse Potentiale $I_\mu^{(6)} [\mu = 1, \ldots, k]$ und zwar bezeichnen wir mit $I_\mu^{(6)}$ dasjenige in B eindeutige und reguläre Potential, welches auf L_μ den konstanten Wert 1, auf den übrigen $k-1$ Linien der Folge $L_1, \ldots, L_k$ den konstanten Wert null annimmt, hingegen längs $L_{k+1}, \ldots, L_m$ die normale Ableitung null besitzt. Sofern ein solches Potential überhaupt existiert, was, wie wir sehen werden, tatsächlich der Fall ist, erkennen wir an dieser Stelle bereits, dass es durch die angegebenen Bedingungen völlig bestimmt wird. Denn die Differenz zweier den gestellten Bedingungen genügenden Potentialfunktionen würde eine Potentialfunktion sein, welche längs $L_1, \ldots, L_k$ den konstanten Wert null annimmt, längs den übrigen Begrenzungslinien die normale Ableitung null hat, für welch letztere Bedingung auch die andere gesetzt werden kann, dass der imaginäre Teil der durch das Potential als reeller Teil definierten analytischen Funktion konstant sein soll. Diese Potentialfunktion würde demnach an je zwei in be-

zug auf eine solche Begrenzungslinie spiegelbildlich symmetrischen Punkten dieselben Werte annehmen. Es kann daher ein Maximum oder Minimum der Werte dieser Potentialfunktion für das Innere von B nicht auf einer solchen Begrenzungslinie erreicht werden, weil sonst in den betreffenden Stellen die Funktion ein Maximum bzw. Minimum haben würde mit bezug auf die vollständige Umgebung der betreffenden Stelle. Das Resultat ist, dass Maximum und Minimum der betreffenden Differenzfunktion auf einer der Linien $L_1, \ldots, L_k$ angenommen werden, wo dieses Potential verschwindet. Das heisst aber, dass die genannte Differenzfunktion identisch verschwindet.

Wir können durch eine ähnliche Argumentation sofort feststellen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{k} I_\mu^{(6)} = 1$$

ist, dass hingegen zwischen weniger als k dieser Potentiale weder eine homogene noch eine nichthomogene lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten bestehen kann. Ferner bemerken wir, dass es keine homogene lineare Kombination von $I_1^{(6)}, \ldots, I_{k-1}^{(6)}$ geben kann von der Art, dass der zugehörende imaginäre Teil dieser linearen Kombination längs $L_1, \ldots, L_{k-1}$ den Periodizitätsmodul null hat. Denn dann würde der betreffende imaginäre Teil, der längs $L_{k+1}, \ldots, L_m$ ja jedenfalls keinen Periodizitätsmodul hat, auch längs L_k keinen Periodizitätsmodul haben, sodass die betreffende analytische Funktion eine eindeutige Funktion wäre, von welcher längs $L_1, \ldots, L_k$ der reelle Teil auf jeder einzelnen Linie konstant ist, längs $L_{k+1}, \ldots, L_m$ jedoch der imaginäre Teil. Eine solche Funktion gibt es aber, abgesehen von der Konstanten, nicht nach dem Satze Pag. 314.

Nunmehr können wir, wie oben Pag. 321 mit dem Nichtverschwinden einer Determinante von Periodizitätsmoduln operierend, schliessen, dass man stets eine lineare homogene Kombination der $I_\mu^{(6)} [\mu = 1, \ldots, k-1]$ aufstellen kann und auch nur auf eine Weise, sodass ihr konjugiertes Potential längs $L_1, \ldots, L_{k-1}$ vorgeschriebene Periodizitätsmoduln erhält. Damit erledigt sich die Bestimmung des Potentials $u^{(6)}$. Dasselbe ergibt sich als eine lineare homogene Kombination der $I_\mu^{(6)} [\mu = 1, \ldots, k-1]$.

Die Frage der Existenz der Potentiale $I_\mu^{(6)}$ ist jedoch damit noch nicht beantwortet. Zu dem Zwecke fassen wir eine dieser Funktionen ins Auge, etwa $I_1^{(6)}$, und setzen sie über die Linien $L_{k+1}, \ldots, L_m$ auf die Rückseite von B hin fort. (Vgl. hierzu die Bemerkungen auf Pag. 337 über die analytische Fortsetzung von Funktionen auf Doppelflächen.) Die so fortgesetzte Funktion $I_1^{(6)}$ nimmt an je zwei koinzidierenden Punkten der Vorderseite und Rückseite

von B denselben Wert an. Sie ist in ihrem doppelflächenförmigen Gebiete $\tilde{B}$ eindeutig und regulär und nimmt an den beiden Linien L_1 (auf Vorder- und Rückseite) den Wert $+1$, auf den Linien $L_2, \ldots, L_k$ (auf Vorder- und Rückseite) den Wert null an. Die erwähnten, der Symmetrie der Fläche $\tilde{B}$ Rechnung tragenden Regularitäts- und Randwerteigenschaften genügen umgekehrt, um auf Grund der eindeutigen Bestimmtheit der Funktion durch ihre Randwert- und Regularitätseigenschaften zu schliessen, dass die Funktion an irgend zwei koinzidierenden Punkten der Vorder- und Rückseite denselben Wert annehmen und mithin auf den Begrenzungslinien $L_{k+1}, \ldots, L_m$ die normale Ableitung null haben muss. Man könnte in der Tat aus einer unsymmetrischen Funktion durch die symmetrische Übertragung selbst sofort eine zweite, von ersterer verschiedene Funktion herleiten.

2. Es kommt somit das ganze Problem der Bestimmung der Potentiale $I_\mu^{(6)}$ darauf hinaus, die *Fundamentalabbildung der Doppelfläche* $\tilde{B}$ auszuführen, welche durch Hinzunahme der Rückseite zur Vorderseite des Bereichs B entsteht, wobei die Linien $L_{k+1}, \ldots, L_m$ als innere Linien, hingegen die Linien $L_1, \ldots, L_k$ jede zweimal als Randlinien auftreten. Diese Fundamentalabbildung gewinnen wir, indem wir zunächst für die Fläche B selbst die Fundamentalabbildung durchführen. Diese Abbildung kann dann auch als eine Abbildung der Doppelfläche $\tilde{B}$ dadurch aufgefasst werden, dass man dem Übergang über die Linien $L_{k+1}, \ldots, L_m$ von Vorderseite zu Rückseite den Übergang von oberer Halbebene zu unterer Halbebene entsprechen lässt. Auf diese Weise wird die Fläche $\tilde{B}$ zunächst (∞, ∞)-deutig auf ein die ganze Ebene bedeckendes schlichtes Gebiet β abgebildet, welches als Begrenzungslinien diejenigen Strecken der Achse des Reellen besitzt, die den Linien $L_1, \ldots, L_k$ bei der betrachteten Fundamentalabbildung des Bereichs B entsprechen. Das Gebiet β kann nun seinerseits auf Grund unseres Schmiegungsverfahrens auf eine schlichte obere $\tilde{\zeta}$-Halbebene abgebildet werden, womit dann die Fundamentalabbildung der Doppelfläche $\tilde{B}$ auf eine $\tilde{\zeta}$-Ebene geleistet ist, von welcher ausgehend wir die Potentiale $I_\mu^{(6)}$ in derselben Weise gewinnen, wie oben die Potentiale $I_\nu^{(1)}$, ausgehend von der ζ-Ebene.

3. Was nun schliesslich die *Bestimmung der Potentiale* $u^{(7)}, u^{(8)}, u^{(9)}$ anbetrifft, so bietet deren Bestimmung keine prinzipiell neuen Schwierigkeiten dar. Diese Funktionen sind, abgesehen von den additiv hinzutretenden linearen Kombinationen der $I_\mu^{(6)}$, durch diejenigen Potentiale gegeben, welche mit $u^{(7)}, u^{(8)}, u^{(9)}$ in allen Bedingungen übereinstimmen mit dem einen Unterschied, dass auf den Randlinien $L_1, \ldots, L_k$ der konstante Wert null vorgeschrieben wird. Diese neuen Potentiale mögen mit $I^{(7)}, I^{(8)}, I^{(9)}$ bezeichnet werden. Ihre Herstellung erfolgt in der $\tilde{\zeta}$-Ebene wesentlich in derselben Weise, in welcher wir oben die Potentiale

$I^{(2)}$ u. s. w. in der ζ-Ebene konstruierten. Es treten z. B. bei der Herstellung des Potentials $I^{(8)}$ im ganzen acht paarweise symmetrisch angeordnete nichtäquivalente Unstetigkeitsstellen auf. Um ferner etwa von $I^{(7)}$ zu $u^{(7)}$ zu gelangen, hat man nur nötig, zu $I^{(7)}$ eine solche lineare Kombination der $I_n^{(6)}$ zu addieren, durch welche das Verschwinden der Periodizitätsmoduln der konjugierten Potentialfunktionen längs $L_2, \ldots, L_k$ bewirkt wird, was nach einer Bemerkung oben (Pag. 332) tatsächlich möglich ist. Dann wird von selbst der Periodizitätsmodul längs L_1 den Wert 2π erhalten wegen des Auftretens einer logarithmischen Unstetigkeitsstelle innerhalb B. Analog verfährt man bei $u^{(8)}$ und $u^{(9)}$.

C. Zweiter Teil (§§ 9, 10).

Die Abbildungsaufgaben der dritten, vierten und fünften Kategorie.

(*Isogonale Trajektorien der Orthogonalkreissysteme als Begrenzungslinien; Hauptpunkte auf der Begrenzung.*)

§ 9.

Die Abbildungsaufgaben der dritten und vierten Kategorie. (*Geradlinige bezw. spirallinige Begrenzungen.*)

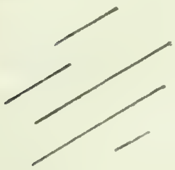
1. Die bisher betrachteten Normalformen mehrfach zusammenhängender Bereiche waren dadurch charakterisiert, dass ihre Begrenzungslinien entnommen waren einem Orthogonalsystem von Kreisen, welches wir in seiner einfachsten Gestalt, nämlich entweder als Orthogonalsystem von Geraden parallel der Achse des Reellen bzw. des Imaginären (entsprechend dem parabolischen Kreissystem) oder in Form eines gewöhnlichen Geradenbüschels mit dem Nullpunkt als Zentrum nebst zugehörendem konzentrischem Kreissystem (entsprechend dem elliptisch-hyperbolischen Kreissystem) zugrundelegten. Dabei unterschieden wir noch zwei Kategorieen nach dem Gesichtspunkte, ob beide Orthogonalscharen oder nur die eine Schar zur Verwendung kam. Wir werden uns in einer folgenden Abhandlung dieser Serie *allgemein* mit denjenigen Erweiterungen der Gestalten der Normalbereiche zu befassen haben, die sich ergeben, wenn man die zu den genannten Kreissystemen *isogonalen Trajektorien*, d. s. *Geraden* beim parabolischen System, *logarithmische Spiralen* beim elliptisch-hyperbolischen System, mitheranzieht zur Bildung der Begrenzung.

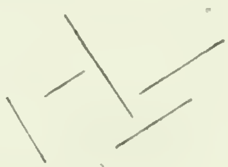
Gewisse besondere Fälle dieser neuen Allgemeinheit gestatten eine Behandlung nach denselben Methoden, die wir im Vorhergehenden dargelegt haben. Wir stellen sie deswegen der allgemeinen Behandlung voran. Im ganzen handelt es

sich hier um vier Abbildungsaufgaben, welche den folgenden Normalgestalten entsprechen.

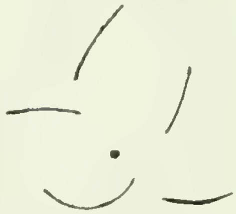
10. Der Bildbereich soll begrenzt sein von m untereinander *parallelen*, aber *gleichgerichteten endlichen geradlinigen Schlitzen gegebener Richtung.* Bei der Abbildung ist vorzuschreiben, welcher innere Punkt des zur Abbildung vorgelegten Bereiches B in den unendlich fernen Punkt übergehen soll und welches die dabei stattfindende Zuordnung der Richtungselemente in jenen Punkten ist. (Fig. 10.)

11. Der Bildbereich soll begrenzt sein von m *geradlinigen endlichen Schlitzen,* deren je zwei entweder untereinander *parallel oder zueinander orthogonal* sind. Für jede Begrenzungslinie ist die Richtung des entsprechenden Schlitzes zu geben. Im übrigen gilt die unter 10 gegebene Vorschrift betr. die Zuordnung eines inneren Punktes zum unendlich fernen Punkte einschliesslich der Richtungselemente. (Fig. 11.)


10)


11)


12)


13)

12. Der Bildbereich soll begrenzt sein von m, gegen das fundamentale Geradenbüschel *gleichgeneigten Spiralbögen gegebener Neigung.* Bei der Abbildung ist ferner vorzuschreiben, welche beiden inneren Punkte des abzubildenden Bereichs in den Nullpunkt und in den unendlich fernen Punkt übergehen sollen. (Fig. 12.)

13. Der Bildbereich soll begrenzt sein von m teils *gleichgeneigten,* teils zu diesen *orthogonalen, unter sich ebenfalls gleichgeneigten Spiralbögen.* Für jede einzelne Begrenzungslinie ist die Neigung des entsprechenden Spiralbogens vorzuschreiben. Ferner ist wiederum vorzuschreiben, welche beiden inneren Punkte des gegebenen Bereichs B in den Nullpunkt und in den unendlich fernen Punkt übergehen sollen. (Fig. 13.)

2. Was zunächst die Abbildungsaufgaben 10 und 11 anbetrifft, so bemerken wir ohne weiteres, dass sie in die Abbildungsaufgaben 5 und 9 übergehen, indem man eine Drehung der Bildebene um einen durch die gegebene Neigung der Schlitze bestimmten Winkel vornimmt. Wir erkennen auf diese Weise sofort, dass die Abbildungsaufgaben, abgesehen von der richtungstreuen Ähnlichkeitstransformation nur eine Lösung besitzen und dass die Auffindung der Abbildungsfunktionen selbst durch die Auffindung der Abbildungsfunktionen $f^{(5)}(z)$ und $f^{(9)}(z)$ ebenfalls mit erledigt ist.

Um für die Abbildungsaufgaben 12 und 13 den *Unitätsbeweis* zu führen, bilden wir den Quotienten zweier als Lösungen vorgestellten Abbildungsfunktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$. Die Funktion $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ ist dann eine im Bereiche B eindeutige und reguläre Funktion, welche in diesem Bereiche weder null noch unendlich wird, deren Randwerte ferner wiederum endliche spiralförmige Bögen beschreiben, welche auch dem Nullpunkte nicht beliebig nahe kommen. Wäre nun die durch den obigen Quotienten dargestellte Funktion keine Konstante, so bedecken die in B angenommenen Werte derselben, geometrisch gesprochen, ein Gebiet, welches die erwähnten Spiralbögen vollständig einbettet. Die genannte Funktion würde daher weder Maximum noch Minimum des absoluten Betrages ihrer Werte auf dem Rande annehmen können, entgegen einem allgemeinen Satze über reguläre Funktionen. Demnach muss der obige Quotient sich auf eine Konstante reduzieren.

Was die Bestimmung der gesuchten Abbildungsfunktionen $f^{(12)}(z)$ und $f^{(13)}(z)$ anbetrifft, so schlagen wir einen Weg ein, analog demjenigen, den wir bei Bestimmung der Funktionen $f^{(3)}(z)$ und $f^{(4)}(z)$ bzw. $f^{(6)}(z)$ und $f^{(8)}(z)$ beschritten haben.

Wir betrachten anstelle der Funktion $f(z)$ (d. i. $f^{(12)}(z)$ oder $f^{(13)}(z)$) die Funktion $\log f(z)$, welche in B zwei logarithmische Unstetigkeiten, nämlich $\log(z-z_1)$ und $-\log(z-z_2)$ darbietet. Bei Durchlaufung irgend einer Randlinie des Bereichs B kehren die Funktionswerte jedesmal zu ihren Ausgangswerten zurück. Sie beschreiben dabei geradlinige endliche Strecken in einem einfachen Hin- und Hergange von bekannter Neigung gegen die Achse des Reellen. Ist α der Neigungswinkel der Strecken der einen Kategorie, so ist $\alpha+\frac{\pi}{2}$ der Neigungswinkel der Strecken der andern Kategorie. Indem wir jetzt anstelle der Funktion $\log f(z)$ die Funktion $e^{-i\alpha}\log f(z)$ treten lassen, haben wir damit eine wesentlich nach den alten Methoden bestimmbare Funktion.

Die Funktion $\Phi(z)=e^{-i\alpha}\log f^{(12)}(z)$ wird in B nur unstetig bei z_1 und z_2 und zwar logarithmisch mit den entgegengesetzt gleichen Koeffizienten $e^{-i\alpha}$ und $-e^{-i\alpha}$. Sie reproduziert sich bei Durchlaufung jeder Randlinie und nimmt dort nur Werte von konstantem imaginären Teile an.

Die Funktion $\Psi(z)=e^{-i\alpha}\log f^{(13)}(z)$ besitzt bei z_1 und z_2 dieselben Unstetigkeiten wie $\Phi(z)$; sie nimmt auf den Randlinien periodisch in sich zurückkehrende Randwerte an, welche bei den Randlinien der einen Kategorie konstanten imaginären Teil, bei den Randlinien der anderen Kategorie konstanten reellen Teil besitzen.

Wir können die Funktionen $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ auf die Rückseite der Fläche B fortsetzen. Dabei stellen sich an den entsprechenden Stellen der Rückseite wie-

derum logarithmische Unstetigkeiten ein. Gehen wir über eine Linie mit konstantem imaginärem Teile auf die Rückseite, so bekommen wir logarithmische Unstetigkeiten mit konjugiert komplexen Koeffizienten; gehen wir hingegen über die Linien konstanten reellen Teiles auf die Rückseite, so bekommen wir die ursprünglichen Koeffizienten ersetzt durch die negativ genommenen konjugiert komplexen Werte, d. s. Werte, welche aus den Originalwerten, geometrisch gesprochen, durch Spiegelung an der Achse des Imaginären entstehen.

Die Beurteilung des Verhaltens einer analytischen Funktion in einem Punkte der Rückseite ist dabei nach Massgabe der Bestimmung vorzunehmen, dass man sich die Rückseite umgeklappt und die dort bestehenden Funktionswerte an die entsprechenden Stellen übertragen denkt und nunmehr die Beurteilung des Verhaltens in der gewöhnlichen Weise vornimmt, eben an der durch den genannten Überpflanzungsprozess gewonnenen, im gewöhnlichen Sinne analytischen Funktion.

Analog ist das analytische Verhalten längs einer Übergangslinie (Linie, über welche hinweg der Übergang von der Vorderseite auf die Rückseite stattfindet) zu beurteilen. Die Übergangslinie werde dabei regulär analytisch vorausgesetzt, was bei den Übergangslinien der Doppelfläche $\breve{B}$ tatsächlich der Fall ist. Man mache eine konforme Hilfsabbildung der Ebene, in welcher die Doppelfläche liegt, in der Weise, dass ein Stück der Übergangslinie, für dessen Nachbarschaft man die Beurteilung vornehmen will, in ein geradliniges Linienstück transformiert wird. Dabei geht ein das Linienstück enthaltender Teil $\tilde{\beta}$ der Doppelfläche in ein an jene geradlinige Strecke anschliessendes Doppelflächenstück $\tilde{\beta}'$ über. Das Flächenstück $\tilde{\beta}'$ wird nun seinerseits in ein gewöhnliches Flächenstück β verwandelt, indem man die rückseitige Hälfte von demselben unter Festhaltung der genannten geradlinigen Begrenzungsstrecke umklappt, wodurch die beiden Hälften von $\tilde{\beta}$ nunmehr nebeneinander zu liegen kommen und so den Bereich β bilden.

Eine in $\tilde{\beta}$ erklärte Funktion hat man sich jetzt zur Beurteilung ihrer analytischen Natur nach β überpflanzt zu denken. Insbesondere gilt eine Funktion in $\tilde{\beta}$ als den Prinzipien der analytischen Fortsetzung entsprechend definiert, wenn sie nach ihrer Überpflanzung in den Bereich β dort eine im gewöhnlichen Sinne der analytischen Fortsetzung erklärte Funktion liefert.

Die Beurteilung des analytischen Verhaltens von Potentialfunktionen auf Doppelflächen hat nach denselben Regeln zu erfolgen.

3. Zwecks Bestimmung der Funktionen $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die reellen Teile derselben, welche wir mit $u^{(12)}$ bzw. $u^{(13)}$ bezeichnen wollen, während wir entsprechend die imaginären Teile mit $v^{(12)}$ und $v^{(13)}$ bezeichnen. Die Potentiale $u^{(12)}$ und $u^{(13)}$ werden in z_1 und z_2 unstetig in der Form

$$a \log r + b\varphi \text{ bezw. } -a \log r - b\varphi,$$

wobei ist $r = |z - z_1|$ bezw. $|z - z_2|$,

$$\varphi = \text{Am}(z - z_1) \text{ bezw. Am}(z - z_2).$$

Die Vieldeutigkeit dieser Funktionen innerhalb des Bereichs B rührt lediglich von ihren durch die Arcus-Unstetigkeiten bei z_1 und z_2 gegebenen Verzweigungen her. Zieht man in B irgend eine geschlossene Linie, welche diese beiden Punkte einfach und in gleichem Sinne umschlingt, so kehren die genannten Potentialfunktionen zu ihren Ausgangswerten zurück. Die Begrenzungslinien von B zerfallen in solche der ersten Kategorie, auf welchen ein konstanter Randwert besteht, und solche der zweiten Kategorie, längs welchen die Normalableitung null ist. Die ersteren seien mit $L_1, L_2, \ldots, L_k$, die letzteren mit $L_{k+1}, \ldots, L_m$ bezeichnet. Bei $u^{(12)}$ fallen die Randlinien der zweiten Kategorie weg.

Von den Potentialen $u^{(12)}$ und $^{(13)}$ gelangen wir durch Subtraktion homogener linearer Verbindungen entweder der Funktionen $I_\nu^{(1)}$ oder der Funktionen $I_\mu^{(6)}$ zu analog beschaffenen Funktionen $I^{(12)}$ und $I^{(13)}$, welche sich von $u^{(12)}$ und $u^{(13)}$ hinsichtlich der hervorgehobenen charakteristischen Eigenschaften nur dadurch unterscheiden, dass ihre konstanten Randwerte auf den Linien $L_1, \ldots, L_k$ sämtlich gleich null sind. Diese Funktionen $I^{(12)}$ und $I^{(13)}$ zerlegen wir ihrerseits wieder in der Form

$$I^{(12)} = a\, I^{(12)\prime} + b\, I^{(12)\prime\prime}$$

$$I^{(13)} = a\, I^{(13)\prime} + b\, I^{(13)\prime\prime},$$

indem wir, anstelle der oben angegebenen Unstetigkeiten allgemeiner Form, für die einfach gestrichenen Funktionen $I^{(12)\prime}$ und $I^{(13)\prime}$ die Unstetigkeiten $\pm \log r$, für die zweifach gestrichenen Funktionen $I^{(12)\prime\prime}$ und $I^{(13)\prime\prime}$ die Unstetigkeiten $\pm \varphi$ bei z_1 bzw. z_2 treten lassen.

Die Potentiale $I^{(12)\prime}$ und $I^{(12)\prime\prime}$ denken wir uns jetzt zum Zwecke ihrer Bestimmung durch unendliche Reihen in die ζ-Ebene überpflanzt, die Potentiale $I^{(13)\prime}$ und $I^{(13)\prime\prime}$ hingegen in die $\tilde{\zeta}$-Ebene, nämlich die Ebene der Variabeln $\tilde{\zeta}$, welche durch die zur Doppelfläche $\tilde{B}$ (Pag. 333) gehörende Fundamentalfunktion geliefert wird. Nach dieser Überpflanzung lassen sich die erwähnten Potentiale unmittelbar als die reellen oder die durch i dividierten imaginären Teile von Funktionen auffassen, die durch Reihen mit lauter logarithmischen Gliedern dargestellt werden. So wird die Funktion $I^{(12)\prime\prime}$ geometrisch folgendermassen erklärt. Man bestimme ζ_1 und ζ_2 im Fundamentalbereich der ζ-Ebene als Bildpunkte der Punkte z_1 und z_2. $\bar{\zeta}_1$ und $\bar{\zeta}_2$ seien die konjugiert komplexen Punkte. Ein variabler Punkt ζ liefert dann eine Winkelsumme bei ζ, nämlich

$$[(\zeta_1\,\zeta\,\zeta_2) + (\bar\zeta_1\,\zeta\,\bar\zeta_2)].$$

Diese Grösse ist auf der Achse des Reellen im Hauptzweige gleich null. Die Summe aller Grössen

$$I^{(12)''} = \sum_n [(\zeta_1\,\zeta\,\zeta_2) - (\bar\zeta_1\,\zeta\,\bar\zeta_2)],$$

erstreckt über alle vermöge der Substitutionen der Fundamentalgruppe aus dem Quadrupel $(\zeta_1, \zeta_2, \bar\zeta_1, \bar\zeta_2)$ sich ergebenden Bildquadrupel, ist die Grösse $I^{(12)''}$, welche wir suchen. Sie kann auch durch den Ausdruck

$$I^{(12)''} = \Re\left\{\frac{1}{i}\sum\left(\log\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} + \log\frac{\zeta - \bar\zeta_1}{\zeta - \bar\zeta_2}\right)\right\}$$

dargestellt werden, in welchem die unendliche Reihe nach früheren Gründen gleichmässig konvergiert.

§ 10.

Die Abbildungsaufgaben der fünften Kategorie. (*Hauptpunkte auf der Begrenzung.*)

Wir haben im bisherigen sowohl den Hauptpunkt der parabolischen, als auch die Hauptpunkte des elliptisch-hyperbolischen Orthogonalsystems von der Begrenzung ausgeschlossen, indem wir sie entweder dem Inneren oder dem Äusseren des Bereichs zuwiesen. Nunmehr wollen wir eine fünfte Kategorie von charakteristischen Bereichen aufstellen, bei welchen *ein Hauptpunkt oder auch beide Hauptpunkte auf der Begrenzung desselben* liegen. Dabei beobachten wir jedoch, wie bei den ersten beiden Kategorieen, bei der Bildung der einzelnen Begrenzungslinien das Prinzip, dass jede Begrenzungslinie ganz einer und derselben Linie (Gerade oder Kreis) des Orthogonalsystems entstammen soll.

1. Betrachten wir zunächst das *orthogonale Geradensystem*, so kann der Hauptpunkt auf drei typisch unterschiedene Weisen in die Begrenzung eingeführt werden. Die Figuren 14, 15, 16, zeigen die Gestalt der jeweiligen, den Hauptpunkt enthaltenden Begrenzung (stark ausgezogen). Sie sind nach dem Grade der Allgemeinheit geordnet. Die Pfeile bedeuten, dass man sich die betreffende Linie in der durch den Pfeil angezeigten Richtung ins Unendliche fortgesetzt zu denken hat. Zeigt der Pfeil nur in einer Richtung ins Unendliche, so hat man sich die Linie dort endigend zu denken. Weisen zwei Pfeile in engegengesetzter Richtung ins Unendliche, so hat man die Linie als eine einheitliche, durch das Unendliche hindurchgehende Linie aufzufassen. Für die Abbildungsprobleme können wir annehmen, dass die den *Hauptpunkt enthaltende Begrenzungslinie*

in der *Achse des Reellen* liege. Sie ist dann im Falle der Figur 16 mit der Achse des Reellen geradezu identisch. Die Bereiche haben in den Fällen der Figuren 14 und 15 die Form einer *geschlitzten Vollebene*, in den Fällen der Figur 16 die Form einer *geschlitzten Halbebene*. Die hinzukommenden weiteren Begrenzungsschlitze sind dabei entweder auch parallel der Achse des Reellen oder parallel der Achse des Imaginären zu denken, jedenfalls aber endlich.

Die sich nun einstellenden sechs neuen Abbildungsaufgaben (s. die Figuren 14—19, von welchen die letzteren drei durch die hinzugetretenen vertikalen Schlitze von den drei ersten unterschieden sind), geben zu neuen Potentialen

$$U = \Re(f(z))$$

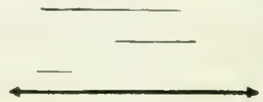
Anlass, die wir nicht weiter besonders durch Indizes charakterisieren wollen.



14)



15)



16)



17)



18)



19)

Das Wesentliche übersehen wir ohne Schwierigkeit. Sei L_1 diejenige Randlinie des Bereichs B, deren Bildlinie den Hauptpunkt enthalten soll.

Wir werden jetzt dem Typus der Fig. 14 entsprechend zwei verschiedene dipolare Unstetigkeiten auf der Begrenzung von B vorschreiben. An beiden Unstetigkeitsstellen ist die Achse der Dipole zusammenfallend mit der Tangente der Linie L_1 in diesem Punkte zu geben, jedoch das eine mal den positiven (bei welchem der Bereich einem auf der Ebene fortschreitenden Beobachter zur Linken liegend erscheint), das andere mal dem negativen Umlaufssinn der Linie L_1 folgend. Als Richtung der Achse bezeichnen wir bei einem Dipol diejenige zur Nullgeraden (Symmetrale des Dipols, auf welcher die die Unstetigkeit darstellende Funktion $Cr^{-1}\cos(\varphi - \varphi_0)$ den Wert null annimmt) senkrechte Richtung, bei deren Verfolgung man zu positiven Werten der angegebenen Funktion gelangt,

nämlich die Richtung $\varphi = \varphi_0$. Diejenige Dipolachse, welche in den der oberen Halbebene angehörenden Hauptpunkt des Normalbereichs übergehen soll, hat dem negativen Umlaufssinne zu folgen. Beliebig verfügbar bleiben nun noch zwei multiplikative reelle positive Konstanten C_1 und C_2.

Dem Typus der Fig. 15 entsprechend haben wir auf L_1 einen und nur einen Punkt z_1 zu geben, welcher in den Hauptpunkt übergehen soll, und ferner nach konformer Übertragung eines z_1 enthaltenden Stückes der Linie L auf ein den Nullpunkt als Bild von z_1 enthaltendes Stück der Achse des Reellen eine Unstetigkeit der Form

$$C r^{-2} \cos 2\varphi + C' r^{-1} \cos \varphi = \Re \left\{ \frac{C}{z^2} + \frac{C'}{z} \right\},$$

wobei C und C' beliebig vorgebbare reelle Konstanten sind, von welchen nur $C > 0$ sein muss.

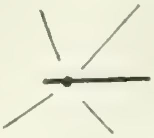
Dem Typus der Fig. 16 entsprechend haben wir auf L_1 nur einen Punkt z_1 vorzugeben, in welchem von der Potentialfunktion ein Verhalten gemäss der Form $C r^{-1} \cos(\varphi - \varphi_0)$ zu verlangen ist, wobei φ_0 die positive Tangentenrichtung im Punkte z_1 bezeichnet. Die Grösse C ist beliebig, jedoch negativ.

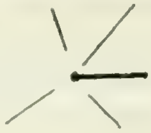
In allen sechs Fällen wird hier von der Potentialfunktion u zu verlangen sein, dass sie auf der Linie L_1 die *normale Ableitung null* habe, während sie auf den übrigen Begrenzungslinien entweder auch die normale Ableitung null haben soll oder aber einen unbekannten konstanten Wert, der durch die Bestimmung normiert wird, dass der Periodizitätsmodul der zugehörenden konjugierten Potentialfunktion längs der betreffenden Begrenzungslinie verschwinden muss.

Der durch Differenzbildung zu führende Unitätsbeweis bietet nichts prinzipiell neues dar gegenüber den früheren Unitätsbeweisen. Desgleichen erfordert der Existenzbeweis der Funktion u keine neuen Überlegungen. Es sind wieder, den bezeichneten Unstetigkeiten entsprechend, SCHOTTKYsche Reihen anzusetzen und sodann durch Zusatzfunktionen die Periodizitätsmoduln in der vorgeschriebenen Weise zu regulieren.

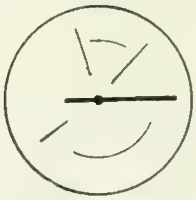
Was die Frage der durch die sich ergebende Funktion $f(z)$ geleisteten Abbildung anbetrifft, so ergeben sich ebenfalls keine neuen Schwierigkeiten für die Beweisführung. Es ist in jedem einzelnen Falle der Abbildungscharakter an den Unstetigkeitsstellen der Abbildungsfunktion ersichtlich, womit zunächst das richtige Eingehen der Hauptpunkte in die Begrenzung der Bildbereiche feststeht. Im übrigen ergibt sich die Einblättrigkeit der Bildbereiche wieder nach der Methode der Charakteristik. Dadurch ist dann auch von selbst die Art und Weise der Durchlaufuug des Randes des Bildbereiches in Form eines einfachen Hinganges bzw. Hin- und Herganges bestimmt.

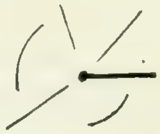
2. Gehen wir nun zu dem *elliptisch-hyperbolischen Orthogonalsystem* über. Hier haben wir zwei Hauptpunkte, nämlich o und ∞; und wir können als Linien des Orthogonalsystems, welche durch diese Hauptpunkte hindurchgehen, lediglich die Geraden des fundamentalen Geradenbüschels heranziehen. Es kann dabei


20)

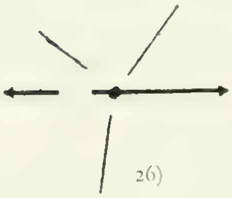

21)

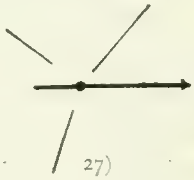

22)

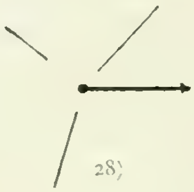

23)

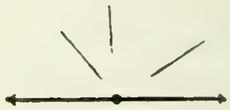

24)

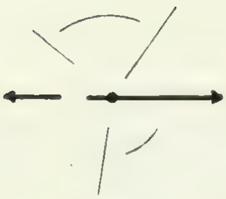

25)

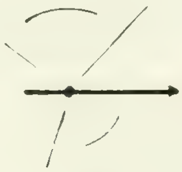

26)

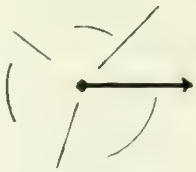

27)


28)


29)


30)


31)


32)


33)

sein, dass *eine Begrenzung des Schlitzbereichs nur einen Hauptpunkt* enthält, indem dann der andere entweder garnicht an der Begrenzung teilnimmt oder seinerseits auf einer anderen Begrenzungslinie liegt; oder aber es kann auch *eine Begrenzungslinie beide Hauptpunkte* enthalten. Die so möglichen Hauptbegrenzungslinientypen

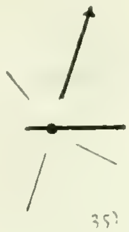
sind in den Figuren 20—39 der Reihe nach angegeben (Hauptbegrenzungslinien stark ausgezogen). Es ergeben sich *zwanzig neue* Schlitzbereichtypen. Bereichtypen, welche durch Transformation durch reziproke Radien aus einander hervorgehen, sind nicht als verschieden betrachtet. Die Figuren 20—33 zeigen diejenigen Typen, bei welchen nur eine Begrenzungslinie einen oder zwei Hauptpunkte enthält; die Figuren 34—39 diejenigen Typen, bei welchen zwei Begrenzungslinien je einen Hauptpunkt enthalten.

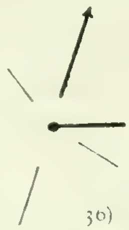
Die Bestimmung der Abbildungsfunktion $f(z)$ bzw. der Potentialfunktion

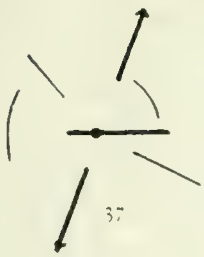
$$u = \log |f(z)|$$

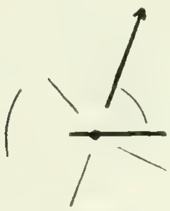
begegnet grundsätzlich neuen Schwierigkeiten nicht. Wir erhalten *logarithmische*

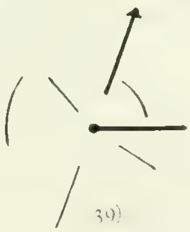

34)


35)


36)


37)


38)


39)

Unstetigkeiten auf der Begrenzung. Die Stellen, an welchen diese Unstetigkeiten auftreten, sind zu geben. Der Koeffizient einer Unstetigkeit ist entweder $+1$ oder -1 oder auch $+2$ bzw. -2. Die letzteren beiden Koeffizienten treten nämlich bei den folgenden Bereichtypen auf: 21 $(+2)$, 24 $(+2)$, 25 $(+2)$, 28 $(+2$ und $-2)$, 32 $(+2$ und $-2)$, 35 (-2), 36 $(+2$ und $-2)$, 38 (-2), 39 $(+2$ und $-2)$. Wir haben beispielsweise im Falle der Figur 34 vier logarithmische Unstetigkeiten zu geben, zwei mit dem Koeffizienten $+1$ auf einer Begrenzungslinie und zwei mit dem Koeffizienten -1 auf einer anderen Begrenzungslinie, im Falle der Figur 26 haben wir vier Unstetigkeiten der Form $\pm \log r$ auf einer und derselben Begrenzungslinie des abzubildenden Bereichs B zu geben, welche bei Durchlaufung der betreffenden Randlinie so aufeinander folgen müssen, dass die positiven und negativen Unstetigkeiten einander benachbart liegen.

Bei der Reihenbildung verfährt man in Bezug auf die Unstetigkeiten mit den Koeffizienten ± 2 zweckmässig so, dass man sie als Summe von zwei Unstetigkeiten mit den Koeffizienten ± 1 auffasst; jede derartige einfache Unstetigkeit kann alsdann mit einer anderen stets vorhandenen, entgegengesetzten Vorzeichens entweder im Fundamentalbereich oberhalb der Achse des Reellen oder in seinem Spiegelbild in bezug auf die Achse des Rellen für die Zwecke der Reihenbildung zusammengefasst werden.[1]

[1] Die vorliegende Abhandlung findet ihre Fortsetzung in einer später voraussichtlich auch in den Acta Mathematica erscheinenden Abhandlung VI. Die Abhandlung V der Serie soll im Journal für Mathematik erscheinen, in welchem auch die Abhandlungen I und III erschienen sind.

ÜBER DIE NULLSTELLEN DER RIEMANNSCHEN ZETAFUNKTION.

Von

R. J. BACKLUND

in Helsingfors.

§ 1. Einleitung.

1. Die Riemann'sche Funktion $\zeta(s)$ ist bekanntlich eine in der ganzen Ebene der komplexen Variable $s = \sigma + it$, mit Ausnahme des Poles $s = 1$, reguläre analytische Funktion. In der Halbebene $\sigma > 1$ wird sie durch die Dirichlet'sche Reihe

(1) $$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s}$$

sowie durch das unendliche Produkt

(2) $$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

wo p alle Primzahlen durchläuft, dargestellt. Die Funktion genügt weiter der Funktionalgleichung

(3) $$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\frac{\pi s}{2}\, \Gamma(s)\, \zeta(s),$$

durch welche ihre Werte in zwei Punkten, die symmetrisch zum Punkte $s = \frac{1}{2}$ liegen, mit einander verbunden werden. Wenn

(4) $$\chi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

gesetzt wird, kann diese Beziehung durch die Gleichung

$$\chi(s) = \chi(1-s) \tag{5}$$

ausgedrückt werden.

2. Wenn der erste Schritt der EULER'schen Summationsformel auf die Summe $\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^s}$ angewendet wird, erhält man aus (1) die Formel

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} - s \int_n^{\infty} \frac{\varphi_1(u)}{u^{s+1}} du, \tag{6}$$

wo

$$\varphi_1(u) = u - [u] - \frac{1}{2} \tag{7}$$

ist.[1] Durch partielle Integration erhält man hieraus weiter

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} + \frac{B_1 s}{2n^{s+1}} - \frac{s(s+1)}{1.2} \int_n^{\infty} \frac{\varphi_2(u)}{u^{s+2}} du, \tag{8}$$

wo B_1 die erste BERNOULLI'sche Zahl und $\varphi_2(u)$ eine periodische Funktion mit der Periode 1 bezeichnet, die im Intervalle $0 < u < 1$ mit dem Polynome $\varphi_2(u) = u^2 - u + \frac{1}{6}$ zusammenfällt. Durch weitere Entwicklung folgt hieraus

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} + \sum_{\nu=1}^{k} T_\nu + R_k, \tag{9}$$

wo

$$T_\nu = (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} \frac{s(s+1)\cdots(s+2\nu-2)}{n^{s+2\nu-1}} \tag{10}$$

und

$$R_k = -\frac{s(s+1)\cdots(s+2k+1)}{(2k+2)!} \int_n^{\infty} \frac{P_{2k+2}(u)}{u^{s+2k+2}} du \tag{11}$$

ist. Hier bedeutet B_ν die ν:te BERNOULLI'sche Zahl, während $P_\nu(u)$ eine periodische Funktion mit der Periode 1 ist, die im Intervalle $0 \leq \sigma \leq 1$ mit dem BERNOULLI'schen

[1] $[u]$ bezeichnet die grösste ganze Zahl $\leq u$.

Polynome $P_\nu(u)$ übereinstimmt.[1] Für das Restgleid R_k gilt die Ungleichung[2]

$$(12) \qquad |R_k| < \left|\frac{s+2k+1}{\sigma+2k+1}\right| |T_{k+1}|.$$

Die Formel (9) besteht für $\sigma > -(2k+1)$, und da k beliebig gross gewählt werden kann, liefert sie also einen Beweis für die Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$ über die ganze Ebene. Die Formel ist für numerische Berechnung von $\zeta(s)$ besonders geeignet.

Aus (1) folgt, dass $|\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma)$ für $\sigma > 1$ ist. In der Halbebene $\sigma \geq \sigma_0 (> 1)$ ist also $\zeta(s)$ beschränkt. Weiter erhalten wir aus der für $\sigma > -1$ gültigen Formel (8), wenn wir $n = 1$ wählen,

$$(8') \qquad \zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \frac{B_1 s}{2} - \frac{s(s+1)}{2} \int_1^\infty \frac{\varphi_2(u)}{u^{s+2}} du,$$

woraus folgt, dass $\frac{|\zeta(s)|}{t^2}$ im Gebiete $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$, $|t| > t_0 (> 0)$ beschränkt ist. In der Halbebene $\sigma \geq 0$ ist also, nach der bekannten, von LANDAU eingeführten Bezeichnungsweise

$$(13) \qquad \zeta(s) = O(t^2).$$

3. Aus (2) geht hervor, dass die Zetafunktion in der Halbebene $\sigma > 1$ keine Nullstellen besitzt. Aus (3) folgt dann weiter, dass sie in den Punkten $s = -2, -4, -6, \ldots$ Nullstellen erster Ordnung hat (die s. g. trivialen Nullstellen), sonst aber keine Nullstellen in der Halbebene $\sigma < 0$. Die übrigen Nullstellen von $\zeta(s)$ gehören also dem Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$ an.

Dass von diesen Nullstellen keine auf der reellen Achse liegen, ersehen wir z. B. aus der Gleichung

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\varphi_1(u)}{u^{s+1}} du,$$

welche aus (6) für $n = 1$ hervorgeht. Da nach (7) $|\varphi_1(u)| \leq \frac{1}{2}$ ist, haben wir nämlich für reelle $s\,(> 0)$

[1] Vgl. E. LINDELÖF, *Quelques applications d'une formule sommatoire générale* (Acta Soc. Sc. Fenn., Tom XXXI, 1902); *Sur une formule sommatoire générale* (Acta Mathematica, Bd 27, S. 305—311).

[2] Vgl. R. J. BACKLUND, *Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion* (Dissertation, Helsingfors 1916, S. 17—18).

$$\left| s \int_1^\infty \frac{\varphi_1(u)}{u^{s+1}} du \right| < \frac{s}{2} \int_1^\infty \frac{du}{u^{s+1}} = \frac{1}{2},$$

und da weiter $\frac{1}{s-1} < -1$ für $0 < s < 1$ ist, so wird also in diesem Intervalle $\zeta(s) < 0$. Für $s = 0$ nimmt die Funktion den von Null verschiedenen Wert $-\frac{1}{2}$ an, wie aus der Gleichung (8') hervorgeht.

4. Die Funktion

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \tag{14}$$

ist eine ganze Funktion. Die Pole von $\zeta(s)$ und $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ werden nämlich von den Nullstellen der Faktoren $s(s-1)$ und den trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ aufgehoben. Die Nullstellen von $\xi(s)$ fallen hiernach mit den nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ zusammen.

Nach (5) genügt $\xi(s)$ der Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{15}$$

Weil $\xi(s)$ auf der reellen Achse reell ist und also in Punkten, die in bezug auf dieser Achse symmetrisch liegen, konjugierte Werte annimmt, können wir aus (15) schliessen, dass diese letzte Eigenschaft auch in bezug auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ gilt, und dass also $\xi(s)$ auf derselben reell ist. Die Nullstellen von $\xi(s)$ liegen demnach symmetrisch sowohl zur reellen Achse als zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$.

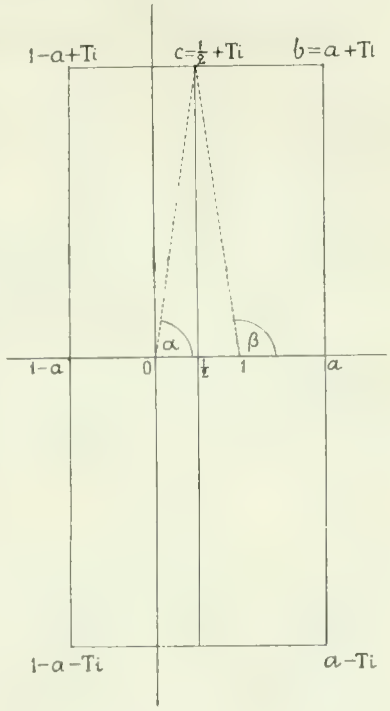
§ 2. Existenz der Nullstellen von $\xi(s)$. Abschätzung der Dichtigkeit derselben.

5. Wir wollen in diesem Paragraphen die Existenz der nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ sowie die v. Mangoldt'sche Formel für die Anzahl derselben unter einer gegebenen Ordinate beweisen. Hierzu benutzen wir den elementaren Grundsatz der Funktionentheorie, der aussagt, dass das Argument einer analytischen Funktion, die in einem endlichen Gebiete regulär ist, auf dem Rande desselben nicht verschwindet und im Innern desselben n Nullstellen hat, genau um $2n\pi$ wächst, wenn die Variable den Rand des Gebietes in positivem Sinne durchläuft.

Es sei also $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\xi(s)$, deren Ordinate zwischen o und $T(>0)$ fällt, wobei jede etwa k-fache Nullstelle k-mal gezählt werde. Wir nehmen an, dass T mit der Ordinate keiner von diesen Nullstellen zusammenfalle. Im Rechteck R mit den Ecken $a-Ti$, $a+Ti$, $1-a+Ti$, $1-a-Ti$, wo a eine reelle Zahl >1 bezeichnet, hat $\xi(s)$ dann $2N(T)$ Nullstellen.

Es sei $\Delta_R \arg \xi(s)$ der Zuwachs des Arguments von $\xi(s)$, wenn s den Rand dieses Rechtecks in positivem Sinne beschreibt. Nach dem angeführten Grundsatze haben wir dann

$$4\pi N(T) = \Delta_R \arg \xi(s).$$



Infolge der in Art. 4 der Einleitung hervorgehobenen Eigenschaft der Funktion $\xi(s)$, in Punkten, die zu einer von den Geraden $t=0$ und $\sigma=\frac{1}{2}$ symmetrisch liegen, konjugierte Werte anzunehmen, ist aber $\Delta_R \arg \xi(s)$ gleich viermal demjenigen Zuwachs, den das Argument von $\xi(s)$ erfährt, wenn s, vom Punkte a der reellen Achse ausgehend, nur den ersten Viertel der Begrenzung des Rechtecks beschreibt (Streckenzug abc in der Figur). Wenn wir diesen Zuwachs mit $\Delta_{abc} \arg \xi(s)$ bezeichnen haben wir also

$$N(T) = \frac{1}{\pi} \Delta_{abc} \arg \xi(s). \tag{16}$$

Nach (14) ist

$$\arg \xi(s) = \arg s + \arg (s-1) + \arg \pi^{-\frac{s}{2}} + \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \arg \zeta(s), \tag{17}$$

und wir müssen also die Zuwächse der einzelnen Glieder dieser Summe auswerten. Die ganze Schwierigkeit der Aufgabe liegt dabei in der Aufschätzung des Zuwachses von $\arg \zeta(s)$ auf der Strecke bc.

6. $\Delta_{abc} \arg s$ und $\Delta_{abc} \arg (s-1)$ sind die in der Figur mit bzw. α und β bezeichneten Winkel. Da diese Supplementwinkel sind ist also

$$\Delta_{abc} \arg s + \Delta_{abc} \arg (s-1) = \pi. \tag{18}$$

Weiter ist $\arg \pi^{-\frac{s}{2}} = -\frac{t}{2} \log \pi$, und somit

(19) $$\Delta_{abc} \arg \pi^{-\frac{s}{2}} = -\frac{T}{2} \log \pi .$$

Zur Berechnung von $\Delta_{abc} \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ benutzen wir die asymptotische Darstellung von $\log \Gamma(s)$:

(20) $$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \log \sqrt{2\pi} + J(s),$$

wo das Restglied $J(s)$ in der folgenden Form geschrieben werden kann:[1]

(21) $$J(s) = -\int_0^\infty \frac{P_1(u)}{s+u} du = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{P_2(u)}{(s+u)^2} du.$$

$P_2(u)$ bedeutet diejenige periodische Funktion mit der Periode 1, die im Intervalle $0 \leq u \leq 1$ mit dem zweiten BERNOULLI'schen Polynome $u^2 - u$ zusammenfällt.

Wenn längs des negativen Teils der reellen Achse ein Schnitt gelegt wird und derjenige Zweig von $\log \Gamma(s)$ gewählt wird, der für reelle und positive s reell ist, so ist $\log \Gamma(s)$ in allen Punkten der zerschnittenen Ebene eindeutig bestimmt, und wir haben also[2]

(22) $$\Delta_{abc} \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \Im \log \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{Ti}{2}\right).$$

Aus (20) erhalten wir

(23) $$\Im \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{t}{2} \log \frac{|s|}{2} + \frac{\sigma - 1}{2} \arg s - \frac{t}{2} + \Im J\left(\frac{s}{2}\right).$$

Wenn wir $s = \frac{1}{2} + Ti$ setzen, folgt hieraus

(24) $$\Im \log \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{Ti}{2}\right) = \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} + R(T),$$

wo das Restglied folgenden Ausdruck hat:

(25) $$R(T) = \Im J\left(\frac{1}{4} + \frac{Ti}{2}\right) + \frac{T}{4} \log\left(1 + \frac{1}{4T^2}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2T}.$$

Wenn wir schliesslich

[1] Vgl. E. LINDELÖF, *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions* (Paris 1905, S. 87—101).

[2] Wenn u eine beliebige komplexe Grösse bedeutet, bezeichnen wir den reellen Teil derselben mit $\Re u$, den Koeffizienten von i im imaginären Teil mit $\Im u$.

(26) $$\Delta_{abc} \arg \zeta(s) = \pi P(T)$$

setzen, so kommt nach (16), (17), (18), (19), (22), (24) und (26) die Formel

(27) $$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + P(T) + \frac{1}{\pi} R(T)$$

heraus. Die v. MANGOLDT'sche Formel

(28) $$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

ist also bewiesen, wenn wir ziegen, dass die zwei letzten Glieder in (27) von der Ordnung $\log T$ sind.

7. Die Grössenordnung des Restgliedes $R(T)$ können wir sogleich abschätzen. Für $\sigma > 0$ ist nach (21) offenbar $J(s) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ und somit

$$\Im J\left(\frac{1}{4} + \frac{Ti}{2}\right) = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Da die übrigen Glieder in (25) ebenfalls von dieser Ordnung sind, haben wir also

(29) $$R(T) = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

8. Für die Abschätzung von $P(T)$ bedienen wir uns folgender Überlegung.

Wenn das Argument einer Funktion gleich einem ungeraden Vielfach von $\frac{\pi}{2}$ ist, verschwindet der reelle Teil der Funktion. Im Punkte a ist $\arg \zeta(s) = 0$, und die erste auf dem Wege abc gelegene Nullstelle von $\Re \zeta(s)$ trifft also ein, wenn $\arg \zeta(s) = \pm \frac{\pi}{2}$ ist. Zwischen je zwei auf einander folgenden weiteren Nullstellen von $\Re \zeta(s)$ variiert $\arg \zeta(s)$ entweder um 0 oder um $\pm \pi$. Wenn $\Re \zeta(s)$ auf abc genau n Nullstellen aufweist, muss also $\Delta_{abc} \arg \zeta(s)$ numerisch kleiner als $\frac{\pi}{2} + n\pi$ sein, und somit

(30) $$|P(T)| < n + \frac{1}{2}.$$

Nun wählen wir die Zahl a so, dass $\Re \zeta(s)$ auf der ganzen Geraden $\sigma = a$ und also besonders auf der Strecke ab stets grösser als eine feste positive Zahl ist. Diese Bedingung ist z. B. für $a = 2$ erfüllt, denn wir haben für $s = 2 + ti$

(31) $$\Re\zeta(s) > 1 - \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right| > 1 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2} > \frac{3}{4} - \int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}.$$

Es erübrigt also nur eine obere Grenze der Anzahl n der Nullstellen von $\Re\zeta(s)$ auf der Strecke bc zu berechnen.

9. Zu diesem Zweck betrachten wir die Funktion

(32) $$f(s) = \frac{1}{2}[\zeta(s+Ti) + \zeta(s-Ti)],$$

welche für reelle s gleich $\Re\zeta(\sigma + Ti)$ ist.

Es sei l die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion $f(s)$ im Kreise $|s-a| \leq a - \frac{1}{2}$. Da $f(s)$ auf der Strecke $\frac{1}{2} \leq s \leq a$ dieselben Werte annimmt wie $\Re\zeta(s)$ auf der Strecke bc, ist offenbar

(33) $$n \leq l.$$

10. Zur Abschätzung der Zahl l bedienen wir uns des JENSEN'schen Satzes. Wenn eine Funktion $f(s)$ im Kreise $|s| \leq r$ regulär ist und dort genau k Nullstellen, $a_1, a_2, \ldots, a_k$, hat, während $|f(0)| = m \neq 0$ ist, so ist nach diesem Satze

(34) $$\log\frac{mr^k}{|a_1||a_2|\cdots|a_k|} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

Hieraus folgt die Ungleichung

$$\frac{M}{m} > \frac{r^k}{|a_1||a_2|\cdots|a_k|},$$

wo M das Maximum von $|f(s)|$ auf der Peripherie $|s| = r$ bezeichnet.

Diese Ungleichung wird verstärkt, wenn beliebig viele von den Faktoren $\left|\frac{r}{a_\nu}\right|$, welche ja ≥ 1 sind, fortgelassen werden, sowie auch wenn unter $a_1, a_2, \ldots, a_k$ Nullstellen ausserhalb des Kreises $|s| = r$ mitgerechnet werden, denn dadurch werden in der obigen Ungleichung Faktoren, die < 1 sind, rechts hinzugefügt. Diese Ungleichung bleibt also gültig, wenn rechts beliebig viele und irgend welche Nullstellen der Funktion $f(s)$ gewählt werden.

Wenn speziell l die Anzahl der Nullstellen von $f(s)$ in einem konzentrischen Kreise $|s| \leq \varrho\,(< r)$ bezeichnet, ist demnach

$$\frac{M}{m} > \left(\frac{r}{\varrho}\right)^l,$$

woraus folgt

$$(35) \qquad l < \frac{\log \frac{M}{m}}{\log \frac{r}{\varrho}}.$$

11. Diese Ungleichung wenden wir nun auf die Funktion (32) im Kreise $|s-a| \leqq r$ an, indem wir $a-\frac{1}{2} < r \leqq a$ und $\varrho = a - \frac{1}{2}$ wählen. Wenn T nur so gross ist, dass die Punkte $s = 1 + Ti$ und $s = 1 - Ti$ ausserhalb des Kreises $|s-a| \leqq r$ fallen, ist $f(s)$ in diesem Kreise regulär, und wenn M das Maximum von $f(s)$ auf der Peripherie $|s-a| = r$ bezeichnet und

$$m = |f(a)| = |\Re \zeta(a + Ti)|$$

gesetzt wird, erhalten wir also die Ungleichung (35).

Nach (13) ist nun $f(s) = O((T + |t|)^2)$ für $\sigma \geqq 0$. Im Kreise $|s-a| \leqq r$ ist also $f(s) = O(T^2)$ und somit $M = O(T^2)$, woraus folgt

$$\log M = O(\log T).$$

Da weiter nach (31) m für jedes T grösser als $\frac{1}{4}$ ist, wenn nur $a \geqq 2$ gewählt wird, schliessen wir aus (35), dass $l = O(\log T)$ ist, und hieraus nach (33), dass $n = O(\log T)$ ist, woraus schliesslich nach (30) folgt

$$(36) \qquad P(T) = O(\log T).$$

Hiermit ist nach (27) und (29) die Formel (28) bewiesen.

12. Da nach dieser Formel $N(T)$ mit T unendlich wird, können wir zuerst schliessen, dass $\xi(s)$ wirklich unendlich viele Nullstellen besitzt.

Wenn wir allgemein mit $\varepsilon(x)$ eine Funktion bezeichnen, die mit wachsendem x dem Werte 0 zustrebt, können wir (28) in der Form

$$(37) \qquad N(T) = \frac{T}{2\pi} \log T(1 + \varepsilon(T))$$

schreiben. Hieraus erhalten wir weiter, wenn wir N statt $N(T)$ schreiben,

$$\log N = \log T(1 + \varepsilon(T)),$$

oder umgekehrt

$$\log T = \log N\,(1 + \varepsilon(N)),$$

und nach (37) wird somit

$$T = 2\pi \frac{N}{\log N}(1 + \varepsilon(N)).$$

Wenn

$$\varrho_n = \beta_n + i\alpha_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

die in der Halbebene $t > 0$ liegenden, nach wachsenden Ordinaten α geordneten Nullstellen von $\xi(s)$ bezeichnen, ist also

$$\alpha_n = 2\pi \frac{n}{\log n}(1 + \varepsilon(n)),$$

und folglich auch, weil $0 \leq \beta_n \leq 1$,

$$|\varrho_n| = 2\pi \frac{n}{\log n}(1 + \varepsilon(n)).$$

Hieraus folgt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\varrho_n} \right|$$

divergent ist, während die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\varrho_n} \right|^{1+\varepsilon}$$

konvergiert, wie klein auch die positive Zahl ε ist.

§ 3. Numerische Abschätzung des Restgliedes in der Formel für $N(T)$.

13. In der Formel (27) setzen wir zur Abkürzung

$$N(T) - \left(\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8}\right) = Q(T),$$

wobei also

$$Q(T) = P(T) + \frac{1}{\pi} R(T) \tag{38}$$

ist. $P(T)$ und $R(T)$ sind bzw. durch die Gleichungen (26) und (25) definiert.

v. MANGOLDT[1] hatte bewiesen, dass für $T > 28{,}558$

$$|Q(T)| < 0{,}43200 \log T + 1{,}91662 \log\log T + 12{,}20375$$

ist. Durch Verschärfung gewisser Einzelheiten in v. MANGOLDT's Beweis gelang es GROSSMANN[2] diese Ungleichung durch die folgende zu ersetzen:

$$|Q(T)| < 0{,}29062 \log T + 1{,}7862 \log\log T + 6{,}13695.$$

Dabei wurde $T > 50$ angenommen.

Durch numerische Ausnutzung der in § 2 befolgten Methode hatte ich für $T > 200$ die Ungleichung

$$|Q(T)| < 0{,}275 \log T + 0{,}979 \log\log T + 7{,}446$$

gefunden.[3] Nach einer Bemerkung von Herrn Professor E. LINDELÖF lässt sich aber eine gewisse angenäherte Symmetrie des Arguments der Zetafunktion hier heranziehen, wodurch die Koeffizienten der obigen Formel etwa auf die Hälfte reduziert werden. Wir erhalten in dieser Weise die Abschätzung

$$|Q(T)| < 0{,}137 \log T + 0{,}443 \log\log T + 4{,}350. \tag{39}$$

14. Wir wollen zuerst die erwähnte Symmetrieeigenschaft beweisen.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\Delta_1 \arg f(s)$ den Zuwachs des Arguments einer Funktion $f(s)$, wenn der reelle Teil der Variable $s = \sigma + it$ von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{2} + \delta$ $(\delta > 0)$ variiert, mit $\Delta_2 \arg f(s)$ den Zuwachs desselben Arguments, wenn σ von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{2} - \delta$ variiert.

Nach (5) nimmt die Funktion $\chi(s)$ in Punkten, die symmetrisch zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen, konjugierte Werte an. Folglich haben wir

$$\Delta_1 \arg \chi(s) = -\Delta_2 \arg \chi(s),$$

und also nach (4)

$$\Delta_1 \arg \zeta(s) + \Delta_2 \arg \zeta(s) = -\Delta_1 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) - \Delta_2 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) - \\ - \Delta_1 \arg \pi^{-\frac{s}{2}} - \Delta_2 \arg \pi^{-\frac{s}{2}}. \tag{40}$$

[1] *Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion* $\xi(t)$ (Mathematische Annalen, Bd 60, 1905).

[2] *Über die Nullstellen der Riemannschen* ζ*-Funktion und der Dirichletschen L-Funktionen* (Dissertation, Göttingen, 1913).

[3] *Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann* (Comptes rendus, t. 158, 1914).

Da $\arg \pi^{-\frac{s}{2}} = -\frac{t}{2} \log \pi$ ist, so sind die zwei letzten Glieder der rechten Seite gleich o. Wir wollen weiter zeigen, dass die Summe der zwei übrigen Glieder eine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{t}$ ist, und dass also, wenn s sich symmetrisch nach beiden Seiten von der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ bewegt, die Zuwächse von $\arg \zeta(s)$ bis auf eine Grösse dieser Ordnung einander entgegengesetzt gleich sind.

Wenn wir $\sigma = \frac{1}{2} + \delta$ setzen, so ist nach (23)

$$\arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2 + t^2}{4} + \frac{\delta - \frac{1}{2}}{2} \arg s - \frac{t}{2} + 3J\left(\frac{s}{2}\right).$$

Da $\arg s = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma}{t}$ ist, können wir diese Gleichung in der Form

$$\arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2 + t^2}{4} + \left(\delta - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} + \left(\frac{1}{t}\right)$$

schreiben, wo

$$\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1-\sigma}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma}{t} + 3J\left(\frac{s}{2}\right)$$

ist. Hieraus erhalten wir weiter

$$(41)\quad \begin{aligned} \Delta_1 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2 + t^2}{\frac{1}{4} + t^2} + \delta \cdot \frac{\pi}{4} + \Delta_1\left(\frac{1}{t}\right), \\ \Delta_2 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^2 + t^2}{\frac{1}{4} + t^2} - \delta \cdot \frac{\pi}{4} + \Delta_2\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Im folgenden wird $-\frac{1}{4} \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$ und also $0 \leqq \delta \leqq \frac{3}{4}$ angenommen. Wir erhalten dann (wenn z. B. $t > 1$ ist)

$$(42)\quad \begin{aligned} \left|\frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2 + t^2}{\frac{1}{4} + t^2}\right| &= \frac{t}{4} \log \left(1 + \frac{\delta+\delta^2}{\frac{1}{4}+t^2}\right) < \frac{\delta+\delta^2}{4t} \leqq \frac{21}{64t}, \\ \left|\frac{t}{4} \log \frac{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^2 + t^2}{\frac{1}{4} + t^2}\right| &= \left|\frac{t}{4} \log \left(1 - \frac{\delta-\delta^2}{\frac{1}{4}+t^2}\right)\right| < \frac{\delta-\delta^2}{2t} \leqq \frac{1}{8t}. \end{aligned}$$

Zur Abschätzung von $\left(\frac{1}{t}\right)$ bedienen wir uns der von STIELTJES[1] gegebenen Ungleichung

$$|J(s)| < \frac{B_1}{2r} \sec^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{6(r+\sigma)}, \tag{43}$$

wo $s = re^{i\theta}$ gesetzt ist. Sobald $t > 1$ ist, erhalten wir dann

$$\left| 3J\left(\frac{s}{2}\right) \right| \leq \left| J\left(\frac{s}{2}\right) \right| < \frac{1}{3t\left(1 - \frac{1}{4t}\right)} < \frac{4}{9t}.$$

Ferner wird

$$\left| \frac{1-\sigma}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma}{t} \right| < \frac{5}{8} \operatorname{arc\,tg} \frac{5}{4t} < \frac{25}{32t}.$$

Wir haben also

$$\left| \left(\frac{1}{t}\right) \right| < \frac{4}{9t} + \frac{25}{32t} = \frac{353}{288t}$$

und folglich ist sowohl $\left| \Delta_1 \left(\frac{1}{t}\right) \right|$ als $\left| \Delta_2 \left(\frac{1}{t}\right) \right|$ sicher kleiner als $\frac{353}{144t} < \frac{3}{t}$. Nach (41) und (42) wird dann

$$\Delta_1 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \delta \cdot \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{t}\right)_1,$$

$$\Delta_2 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = -\delta \cdot \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{t}\right)_2,$$

wo

$$\left| \left(\frac{1}{t}\right)_1 \right| < \frac{3}{t} + \frac{21}{64t} < \frac{4}{t}$$

und

$$\left| \left(\frac{1}{t}\right)_2 \right| < \frac{3}{t} + \frac{1}{8t} < \frac{4}{t}$$

ist, woraus weiter folgt

$$\left| \Delta_1 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \Delta_2 \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{t}\right)_1 + \left(\frac{1}{t}\right)_2 \right| < \frac{8}{t}.$$

Nach (40) haben wir also für $t > 1$

$$|\Delta_1 \arg \zeta(s) + \Delta_2 \arg \zeta(s)| < \frac{8}{t}. \tag{44}$$

Diese Ungleichung drückt die gesuchte Eigenschaft der Funktion $\zeta(s)$ aus, die im folgenden benutzt wird.

[1] Vgl. LINDELÖF, *Le calcul des résidus* (S. 99, Formel (5)).

15. Hiernach gehen wir zur Abschätzung von $Q(T)$ über. Nach (38) haben wir

$$|Q(T)| \leq |P(T)| + \left|\frac{1}{\pi} R(T)\right|. \tag{45}$$

Bei der Abschätzung von $|P(T)|$ setzen wir in der Formel (26)

$$|\Delta_{abc} \arg \zeta(s)| = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi + \eta,$$

wo wir die ganze Zahl n so wählen, dass $0 \leq \eta < \pi$ wird.[1] Dann haben wir

$$|P(T)| < n + \frac{1}{2}. \tag{46}$$

Die Zahl a soll nun wieder so gewählt werden, dass auf der Geraden $\sigma = a$ stets $|\arg \zeta(s)| < \frac{\pi}{2}$ ist, und zwar so klein wie möglich, weil der Koeffizient von $\log T$ in der gesuchten Abschätzung hierdurch etwas verbessert wird (vgl. (39)).

Nach der für $\sigma > 1$ gültigen Formel

$$\log \zeta(s) = \sum_{m,p} \frac{1}{m\, p^{ms}},$$

wo p alle Primzahlen und m alle positive ganze Zahlen durchläuft, erhält man

$$|\arg \zeta(s)| = |\Im \log \zeta(s)| \leq |\log \zeta(s)| < \sum_{m,p} \frac{1}{m\, p^{m\sigma}} = \log \zeta(\sigma). \tag{47}$$

In einem Punkte zwischen $\sigma = 1{,}237$ und $\sigma = 1{,}238$ wird $\log \zeta(\sigma) = \frac{\pi}{2}$. Wenn $a \geq 1{,}238$ gewählt wird, ist also die erwünschte Bedingung erfüllt. Wir wählen im folgenden $a = \frac{5}{4}$.

16. Wenn s nun den Weg abc beschreibt, bleibt $|\arg \zeta(s)| < \frac{\pi}{2}$ auf der ganzen Strecke ab. Auf bc muss dagegen $|\arg \zeta(s)|$ die Werte $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \pi$,

[1] Bei der folgenden Abschätzung setzen wir voraus, dass $|\Delta_{abc} \arg \zeta(s)| > \frac{3\pi}{2}$ und also $n \geq 2$ ist. Ist diese Annahme nicht erfüllt, so ist nach (26) $|P(T)| < \frac{3}{2}$, welche Grenze viel niedriger ist als diejenige, die wir im folgenden erhalten werden.

$\frac{\pi}{2} + 2\pi, \ldots, \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi$ durchlaufen, kann aber einen jeden von diesen Werten in mehreren Punkten annehmen. Alle diese Punkte sind Nullstellen von $\Re\zeta(s)$ (vgl. Art. 8). Wir greifen diejenigen heraus, in welchen $|\arg\zeta(s)|$ zum *letzten* Male die betreffenden Werte annimmt und bezeichnen diese Punkte mit α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Auf der Strecke von α_ν bis c ist also $|\arg\zeta(s)| > \frac{\pi}{2} + (\nu - 1)\pi$. Der Punkt α_n kann eventuell mit dem Punkte $c = \frac{1}{2} + Ti$ zusammenfallen.

Unsere Aufgabe ist nun die Anzahl n dieser Nullstellen von $\Re\zeta(s)$ abzuschätzen, woraus sich dann nach (46) eine obere Grenze für $|P(T)|$ ergeben wird.

Mit Hilfe der Beziehung (44) können wir zeigen, dass auf der zu cb in bezug auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ symmetrischen Strecke von $c = \frac{1}{2} + Ti$ bis $b' = -\frac{1}{4} + Ti$ wenigstens $n - 2$ Nullstellen von $\Re\zeta(s)$ liegen. Wenn s die Strecke cb von links nach rechts durchläuft, so wird nämlich in den Punkten $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1$ der absolute Betrag des Zuwachses des Arguments von $\zeta(s)$, also $|\Delta_1 \arg\zeta(s)|$, bzw. gleich $\eta, \eta + \pi, \eta + 2\pi, \ldots, \eta + (n-1)\pi$. Die Werte von $|\Delta_2 \arg\zeta(s)|$ in den symmetrisch gelegenen Punkten auf cb' weichen von denselben Werten um Grössen ab, die nach (44) numerisch kleiner als $\frac{8}{t}$, also sobald $t > 3$ gewählt wird, sicher $< \pi$ sind. Also ist in den zu $\alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}, \ldots, \alpha_1$ symmetrischen Punkten

$$|\Delta_2 \arg\zeta(s)| > \pi, 2\pi, \ldots, (n-2)\pi.$$

Wenn aber $|\Delta_2 \arg\zeta(s)|$ in einem Punkte einen Wert erreicht hat, der grösser als π ist, so muss zwischen diesem Punkte und dem Punkte c wenigstens eine Nullstelle von $\Re\zeta(s)$ liegen; wenn $|\Delta_2 \arg\zeta(s)| > 2\pi$ geworden ist, muss s zwei Nullstellen von $\Re\zeta(s)$ passiert haben u. s. w. Nach dem oben gesagten hat also $\Re\zeta(s)$ auf cb' wenigstens $n - 2$ Nullstellen, und wenn wir diejenigen, die dem Punkte c am nächsten liegen, herausgreifen und dieselben, nach wachsender Abszisse geordnet, mit $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-2}$ bezeichnen, so ist

$$(48) \qquad |\alpha'_\nu - c| < |\alpha_\nu - c| \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n-2).$$

17. Um nun die Zahl n abzuschätzen, bedienen wir uns wieder des Jensen'schen Satzes (34), indem wir denselben auf die Funktion

$$(49) \qquad F(s) = f(s_0 + s)$$

anwenden, wo $f(s)$ durch (32) definiert ist und $s_0 = \frac{5}{4}$ ist. Den Nullstellen α_ν

und α'_ν von $\Re\zeta(s)$ entsprechen die Nullstellen $a_\nu = \alpha_\nu - s_0$ und $a'_\nu = \alpha'_\nu - s_0$ von $F(s)$.

$F(s)$ ist in dem Kreise $|s| \leq r$ regulär, wenn nur r so klein gewählt wird, dass die Pole $s = -\frac{1}{4} + Ti$ und $s = -\frac{1}{4} - Ti$ ausserhalb des Kreises fallen. Wenn $b_1, b_2, \ldots, b_k$ die Nullstellen von $F(s)$ in diesem Kreise sind, so ist dann nach dem genannten Satze

$$\log \frac{F(0)\, r^k}{|b_1 b_2 \ldots b_k|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |F(re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Wie bei der Ungleichung auf Seite 352 bemerken wir, dass die linke Seite der obigen Gleichung nur verkleinert werden kann, wenn wir anstatt $b_1, b_2, \ldots, b_k$ beliebig viele und irgend welche Nullstellen von $F(s)$ wählen. Wenn wir besonders die Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_n, a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-2}$ wählen, erhalten wir also die Ungleichung

$$\log \frac{F(0)\, r^{2n-2}}{|a_1 \ldots a_n . a'_1 \ldots a'_{n-2}|} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |F(re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Nach dem gesagten besteht dieselbe für jedes r, das nur $< \left|-\frac{1}{4} + Ti\right|$ ist.

Wenn $\frac{3}{4} = \varrho$ und $|a_\nu| = \varrho - \delta_\nu$, $|a'_\nu| = \varrho + \delta'_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-2)$ gesetzt wird, so ist nach (48) stets $\delta_\nu > \delta'_\nu$ und somit

$$|a_\nu a'_\nu| = (\varrho - \delta_\nu)(\varrho + \delta'_\nu) < \varrho^2 - \delta_\nu^2 < \varrho^2.$$

Weiter ist $|a_{n-1}| < \varrho$, $|a_n| \leq \varrho$. Wenn wir noch bemerken, dass $|F(re^{i\varphi})| = |F(re^{-i\varphi})|$ ist, erhalten wir in dieser Weise die Ungleichung

$$\log |F(0)| \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n-2} < \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \log |F(re^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

oder, wenn $\log \frac{r}{\varrho} = q$ gesetzt wird

$$2nq < 2q - \log |F(0)| + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \log |F(re^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

woraus schliesslich nach (45) und (46) folgt

$$(50)\qquad |Q(T)| < \frac{1}{2\pi q}\int_0^{\pi} \log |F(re^{i\varphi})|\, d\varphi + \frac{3}{2} - \frac{1}{2q}\log |F(0)| + \frac{1}{\pi}|R(T)|.$$

18. Um eine obere Grenze des Integrals in der Ungleichung (50) zu erhalten, müssen wir zuerst $|F(s)|$ abschätzen. Hierzu bedienen wir uns bekannter Resultate hinsichtlich dem Anwachsen von $|\zeta(s)|$, wobei wir jedoch erst die Konstanten etwas genauer abschätzen müssen.

Auf der Geraden $\sigma = 1$ ist, wie MELLIN[1] bewiesen hat, $\zeta(s) = O(\log t)$. Wir werden zeigen, dass in der Tat, von einem gewissen positiven Wert von t an, die Ungleichung

$$(51)\qquad |\zeta(1 + ti)| < \log t$$

besteht.

Nach der Formel (8) der Einleitung finden wir für $s = 1 + ti$

$$(52)\qquad |\zeta(1 + ti)| < \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{t} + \frac{B_1|s|}{2n^2} + \frac{|s(s+1)|}{2}\int_n^{\infty}\frac{|\overline{\varphi}_2(u)|}{u^3}\,du.$$

Da $\varphi_2(u) = u^2 - u + \frac{1}{6}$ ist, so haben wir $|\overline{\varphi}_2(u)| \leq \frac{1}{6}$ für alle Werte u, und also

$$\int_n^{\infty}\frac{|\overline{\varphi}_2(u)|}{u^3}\,du < \frac{1}{6}\int_n^{\infty}\frac{du}{u^3} = \frac{1}{12n^2}.$$

Weiter findet man leicht

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2n} < \log n + C,$$

wo C die EULER'sche Konstante bedeutet.[2] Wenn wir $\left|\frac{s}{t}\right| = \alpha_1$ und $\left|\frac{s(s+1)}{t^2}\right| = \alpha_2$

[1] *Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht* (Acta Soc. Sc. Fenn., Tome XXIX, 1900).

[2] Aus der Definition

$$C = \lim_{n=\infty}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} - \log n\right\}$$

ergibt sich nämlich:

$$C = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1}\right) - \int_{\nu}^{\nu+1}\frac{dx}{x}\right]\right\} -$$

setzen, so haben wir also

$$|\zeta(1+ti)| < \log n + C + \frac{1}{t} + \frac{t}{12n^2}\alpha_1 + \frac{t^2}{24n^2}\alpha_2.$$

Wenn wir nun $n = \left[\frac{t}{3}\right] + 1$ wählen, so wird

$$\log n < \log\left(\frac{t}{3} + 1\right) = \log\frac{t}{3} + \log\left(1 + \frac{3}{t}\right) < \log\frac{t}{3} + \frac{3}{t}$$

und andererseits $\frac{1}{n} < \frac{3}{t}$, so dass wir die Ungleichung

$$|\zeta(1+ti)| < \log t - \log 3 + C + \frac{4}{t} + \frac{3}{4t}\alpha_1 + \frac{3}{8}\alpha_2$$

erhalten. Man hat aber $-\log 3 < -1{,}098$, $C < 0{,}578$ und weiter, wenn z. B. $t \geqq 50$ gewählt wird, $\frac{3}{8}\alpha_2 < 0{,}376$ und $\frac{1}{t}\left(4 + \frac{3}{4}\alpha_1\right) < 0{,}096$. Daher ist für $t \geqq 50$

$$(53) \qquad |\zeta(1+ti)| < \log t - 0{,}048,$$

und a fortiori ist also die Ungleichung (51) für $t \geqq 50$ erfüllt.

Wir bemerken noch, dass die Ungleichung

$$(54) \qquad |\zeta(s)| < \log t - 0{,}048,$$

wenn $t \geqq 50$ ist, auch für $\sigma > 1$ besteht. Wenn σ_0 diejenige reelle Zahl (> 1) bezeichnet, welche der Gleichung $\zeta(\sigma_0) = \log 50 - 0{,}048$ befriedigt, so ist nämlich wegen der Abschätzung $|\zeta(s)| \leqq \zeta(\sigma)$ die Ungleichung (54) für $\sigma > \sigma_0$ erfüllt, und für $1 < \sigma \leqq \sigma_0$ erhalten wir aus (8) eine Abschätzung von $|\zeta(s)|$, wo jedes einzelne Glied kleiner als das entsprechende in der obigen Abschätzung gemacht werden kann.

19. Lindelöf hat bewiesen[1], dass im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1}\right) - \int_{\nu}^{\nu+1}\frac{dx}{x}\right]$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1}\right) - \int_{\nu}^{\nu+1}\frac{dx}{x}\right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2n} - \log n.$$

[1] *Quelques remarques sur la croissance de la fonction* $\zeta(s)$ (Bulletin des Sciences Mathématiques, Tome 32, 1908).

$$\zeta(s) = O\left(t^{\frac{1-\sigma}{2}} \log t\right)$$

ist. Wir werden auch diese Abschätzung hier unter Berücksichtigung der numerischen Konstanten durchführen, indem wir zeigen, dass im Gebiete

(55) $$0 \leqq \sigma \leqq 1, t \geqq 50$$

die folgende Ungleichung besteht:

(56) $$|\zeta(s)| < \frac{t^2}{t^2-4}\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1-\sigma}{2}} \log t.$$

Zu diesem Zweck betrachten wir die Funktion (vgl. (4))

(57) $$\varphi(s) = \frac{\chi(s)\sqrt{\sin\frac{\pi s}{2}}}{\log(-si)} = \frac{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\sqrt{\sin\frac{\pi s}{2}}}{\log(-si)}$$

im Gebiete (55), wo sie offenbar regulär ist. Wir werden zuerst zeigen, dass auf dem Rande dieses Gebietes die Ungleichung

(58) $$|\varphi(s)| < 1$$

erfüllt ist.

Zur Abschätzung von $\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right|$ bedienen wir uns der Gleichung (20), die uns gibt:

$$\Re \log \Gamma(s) = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \log|s| - t \arg s - \sigma + \log\sqrt{2\pi} + \Re J(s).$$

Hieraus erhalten wir weiter

(59) $$\Re \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{\sigma-1}{2} \log\frac{t}{2} - \frac{\pi t}{4} + \log\sqrt{2\pi} + \varepsilon_1,$$

wo

$$\varepsilon_1 = \frac{t}{2} \operatorname{arc\,tg}\frac{\sigma}{t} - \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma-1}{4} \log\left(1 + \frac{\sigma^2}{t^2}\right) + \Re J\left(\frac{s}{2}\right)$$

ist.

Die Grösse ε_1 ist, wie eine Reihe im folgenden auftretender, mit ε oder $\varepsilon(\sigma, t)$ nebst beigefügten Indices bezeichneten Grössen, im Gebiete (55) höchstens von der Ordnung $\frac{1}{t^2}$ und ohne wesentlichen Einfluss auf das Endresultat. Bei der Abschätzung derselben wird deshalb keine grössere Genauigkeit erstrebt.

Erstens haben wir nach STIELTJES,[1] wenn wir

$$J(s) = \frac{1}{12\,s} + J_1(s)$$

und $s = re^{i\theta}$ setzen,

$$|J_1(s)| < \frac{B_2}{12\,r^3}\left(\sec\frac{\theta}{2}\right)^4 = \frac{1}{90\,r\,(r+\sigma)^2}.$$

Für $\sigma > 0$ ist also $\left|J_1\left(\frac{s}{2}\right)\right| < \frac{4}{45\,r^3}$ und folglich

$$\left|\Re J\left(\frac{s}{2}\right)\right| \leqq \left|\Re\frac{1}{6\,s}\right| + \left|J_1\left(\frac{s}{2}\right)\right| < \frac{\sigma}{6\,r^2} + \frac{4}{45\,r^3}.$$

Im Gebiete (55) wird demnach

$$\left|\Re J\left(\frac{s}{2}\right)\right| < \frac{1}{6\,t^2} + \frac{4}{45\cdot 50\,t^2} < \frac{1}{5\,t^2}.$$

In demselben Gebiete ist weiter

$$\left|\frac{t}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sigma}{t} - \frac{\sigma}{2}\right| < \frac{\sigma^3}{6\,t^2} < \frac{1}{6\,t^2},$$

$$\left|\frac{\sigma-1}{4}\log\left(1+\frac{\sigma^2}{t^2}\right)\right| < \frac{1-\sigma}{4}\cdot\frac{\sigma^2}{t^2} < \frac{1}{27\,t^2},$$

und indem wir diese drei Ungleichungen zusammenfassen, erhalten wir also

$$|\varepsilon_1| < \frac{109}{270\,t^2} < \frac{1}{2\,t^2}.$$

Wenn wir noch $e^{\varepsilon_1} = 1 + \varepsilon_2$ setzen, so wird im Gebiete (55)

$$|\varepsilon_2| < \frac{|\varepsilon_1|}{1-|\varepsilon_1|} < 2\,|\varepsilon_1|.$$

Wir erhalten also aus (59)

(60) $$\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right| = \sqrt{2\pi}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{-\frac{\pi t}{4}}(1+\varepsilon_2),$$

wobei im Gebiete (55)

(61) $$|\varepsilon_2| < \frac{1}{t^2}$$

ist.

[1] Vgl. z. B. E. LINDELÖF, *Le calcul des résidus* (S. 97—99, Formeln (1) und (5)).

Ferner haben wir

(62) $$\left|\pi^{-\frac{s}{2}}\right| = \pi^{-\frac{\sigma}{2}}$$

und

$$\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi t}{2}} (1 + \varepsilon_3), \quad |\varepsilon_3| < e^{-\pi t},$$

woraus folgt

(63) $$\left|\sqrt{\sin\frac{\pi s}{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi t}{4}} (1 + \varepsilon_4),$$

wo $|\varepsilon_4| < \frac{1}{2}|\varepsilon_3|$ ist, und also im Gebiete (55) z. B.

(64) $$|\varepsilon_4| < \frac{1}{t^2}.$$

Schliesslich ist

$$\log(-si) = \log|s| - i \operatorname{arc\,tg}\frac{\sigma}{t},$$

und wenn wir demnach

(65) $$|\log(-si)| = (1 + \varepsilon_5)\log t$$

setzen, so wird, wie eine kleine Zwischenrechnung zeigt, im Gebiete (55)

(66) $$|\varepsilon_5| < \frac{1}{t^2}.$$

Zusammengenommen, kommt aus (57), (60), (62), (63) und (65), wenn wir $(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_4)(1 + \varepsilon_5)^{-1} = 1 + \varepsilon_6$ setzen, die Gleichung

(67) $$|\varphi(s)| = |\zeta(s)| \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{\sigma-1}{2}} (\log t)^{-1} (1 + \varepsilon_6)$$

heraus, wobei nach (61), (64) und (66) im Gebiete (55)

$$1 - \frac{4}{t^2} < \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{-1} < 1 + \varepsilon_6 < \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{-1} < 1 + \frac{4}{t^2}$$

und also

(68) $$|\varepsilon_6| < \frac{4}{t^2}.$$

Nach (53) haben wir nun

$$|\zeta(1 + ti)| < \left(1 - \frac{a}{\log t}\right) \log t,$$

wo $a = 0{,}018$ ist. Wenn wir diese Ungleichung in (67) einsetzen, erhalten wir für $\sigma = 1, t \geq 50$, mit Rücksicht auf (68)

$$(69) \qquad |\varphi(1 + ti)| < \left(1 - \frac{a}{\log t}\right)\left(1 + \frac{4}{t^2}\right).$$

Nun ist die Funktion $\varphi(s)$ so gewählt, dass die Relation

$$(70) \qquad |\varphi(1 - \sigma + ti)| = |\varphi(\sigma + ti)|(1 + \varepsilon_7)$$

besteht, wo ε_7 wieder eine kleine Grösse bezeichnet. Wir haben nämlich nach (5)

$$|\chi(1 - \sigma + ti)| = |\chi(\sigma + ti)|,$$

und aus dieser Gleichung nebst (63) und (65) folgt nach (57) die Gleichung (70), wenn wir

$$1 + \varepsilon_7 = (1 + \varepsilon_4(1 - \sigma, t))(1 + \varepsilon_4(\sigma, t))^{-1}(1 + \varepsilon_5(1 - \sigma, t))^{-1}(1 + \varepsilon_5(\sigma, t))$$

setzen. Mit Rücksicht auf (64) und (66) ist dann im Gebiete (55)

$$1 - \frac{5}{t^2} < \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{-2} < 1 + \varepsilon_7 < \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{-2} < 1 + \frac{5}{t^2},$$

und also

$$(71) \qquad |\varepsilon_7| < \frac{5}{t^2}.$$

Mittels (70) und (71) folgern wir nun sogleich aus (69) die Ungleichung

$$(72) \qquad |\varphi(ti)| < \left(1 - \frac{a}{\log t}\right)\left(1 + \frac{4}{t^2}\right)\left(1 + \frac{5}{t^2}\right).$$

Für $t \geq 50$ sind aber die rechten Seiten von sowohl (69) als (72) kleiner als 1. Wir haben also bewiesen, dass die Ungleichung (58) auf den beiden der imaginären Achse parallelen Seiten des Gebietes (55) besteht.

Wir müssen noch zeigen, dass diese Ungleichung auch auf der Strecke $t = 50, 0 \leq \sigma \leq 1$ erfüllt ist.

Wegen (70) und (71) ist dies wahr, wenn wir beweisen können, dass auf der Hälfte $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ dieser Strecke $|\varphi(s)| < \left(1 + \frac{5}{t^2}\right)^{-1}$ ist. Nach (67) und (68) ist es wieder hierzu genügend zu zeigen, dass auf dieser Hälfte

$$|\zeta(s)| < \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1-\sigma}{2}} \log t \left(1 + \frac{4}{t^2}\right)^{-1}\left(1 + \frac{5}{t^2}\right)^{-1}$$

ist, oder also, dass die Ungleichung

(73) $$|\zeta(\sigma + 50\,i)| < 0{,}9964 \left(\frac{25}{\pi}\right)^{\frac{1-\sigma}{2}} \log 50$$

für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$ erfüllt ist.

Wir bezeichnen die Summe der n ersten Glieder der rechten Seite der Formel (9) mit $H(s)$, die Summe der übrigen Glieder mit $K(s)$, so dass also

$$\zeta(s) = H(s) + K(s),$$
$$H(s) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^s} + \frac{1}{2\,n^s},$$
$$K(s) = \frac{n^{1-s}}{s-1} + \sum_{\nu=1}^{k} T_\nu + R_k.$$

Die Summe der positiven Glieder des Ausdruckes

$$\Re\, H(\sigma + 50\,i) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^\sigma} \cos(50 \log \nu) + \frac{1}{2\,n^\sigma} \cos(50 \log n)$$

bezeichnen wir mit $A(\sigma)$, die Summe der negativen Glieder mit $B(\sigma)$, so dass

$$\Re\, H(\sigma + 50\,i) = A(\sigma) - B(\sigma).$$

Analog setzen wir

$$\Im\, H(\sigma + 50\,i) = A'(\sigma) - B'(\sigma).$$

Für $n = 10$ findet man

$$A\left(\frac{1}{2}\right) < 1{,}649, \quad B\left(\frac{1}{2}\right) < 1{,}870,$$

$$A'\left(\frac{1}{2}\right) < 1{,}061, \quad B'\left(\frac{1}{2}\right) < 0{,}684.$$

Da die Grössen $A(\sigma)$, $B(\sigma)$, $A'(\sigma)$, $B'(\sigma)$ alle mit wachsendem σ abnehmen und da $A(\sigma)$ immer $\geqq 1$ ist, schliessen wir hieraus für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$

$$-0{,}870 < \Re\, H(\sigma + 50\,i) < 1{,}649$$
$$-0{,}684 < \Im\, H(\sigma + 50\,i) < 1{,}061,$$

woraus weiter

$$|H(\sigma + 50\,i)| < 1{,}962$$

folgt. Wenn wir weiter $k = 2$ wählen und $|R_k|$ nach der Formel (12) abschätzen,

erhalten wir

$$|K(\sigma + 50i)| < \left|\frac{n^{1-s}}{s-1}\right| + |T_1| + |T_2| + \left|\frac{s+5}{\sigma+5}\right| |T_3|.$$

Für $\sigma = \frac{1}{2}$ finden wir in dieser Weise $\left|K\left(\frac{1}{2} + 50i\right)\right| < 0{,}281$, und da die Glieder der rechten Seite im Intervalle $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ alle mit wachsendem σ abnehmen, ist also in diesem Intervalle

$$|K(\sigma + 50i)| < 0{,}281.$$

Also ist für $s = \sigma + 50i$, $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$

$$|\zeta(s)| < |H(s)| + |K(s)| < 2{,}243.$$

Andererseits ist für $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ die rechte Seite von (73) grösser als $0{,}9964 \log 50 > 3{,}896$. In diesem Intervalle gilt also die Ungleichung (73), und folglich ist die Ungleichung (58) auf der Strecke $t = 50$, $0 \leq \sigma \leq 1$ erfüllt.

Hiermit ist bewiesen, dass diese Ungleichung auf dem ganzen Rande des Gebietes (55) besteht.

Weiter folgt aus (67) und (13), dass im Gebiete (55)

$$\varphi(s) = O(t^2)$$

ist. Nach einem von Phragmén und Lindelöf bewiesenen Satz[1] schliessen wir hieraus, dass die Ungleichung (58) auch im Innern vom Gebiete (55) besteht, und nach (67) und (68) folgt hieraus schliesslich die Ungleichung (56).

20. Schliesslich müssen wir noch $|\zeta(s)|$ im Gebiete $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 0$ abschätzen, wozu wir die Funktionalgleichung (3) benutzen. Nach (60) haben wir für $1 \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$, $t \geq 25$

$$|\Gamma(s-1)| = \sqrt{2\pi}\, t^{\sigma - \frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi t}{2}} (1 + \varepsilon'_2),$$

wo

(74) $$|\varepsilon'_2| < \frac{1}{4t^2}$$

[1] *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés d esfonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* (Acta Mathematica, Bd 31, S. 382, 1908). Vgl. die auf S. 362 zitierte Arbeit von Lindelöf.

ist. Wegen der Relation $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$ folgt hieraus

$$|\Gamma(s)| = \sqrt{2\pi}\, t^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi t}{2}} (1+\varepsilon'_2) \left|\frac{s-1}{t}\right|.$$

Weiter ist

$$\left|\cos\frac{\pi s}{2}\right| = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi t}{2}} |1 + e^{\pi s i}|,$$

und nach (3) wird also

$$(75) \qquad |\zeta(1-s)| = |\zeta(s)| \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}} (1+\varepsilon_9),$$

wo

$$1 + \varepsilon_9 = (1+\varepsilon'_2) \left|\frac{s-1}{t}\right| |1 + e^{\pi s i}|$$

gesetzt ist. Wegen (74) und der im Gebiete $1 \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$, $t \geq 25$ gültigen Ungleichungen

$$1 \leq \left|\frac{s-1}{t}\right| < 1 + \frac{1}{8t^2}, \qquad 1 - e^{-\pi t} < |1 + e^{\pi s i}| < 1 + e^{-\pi t}$$

ergibt sich, dass in diesem Gebiete die Ungleichung

$$(76) \qquad |\varepsilon_9| < \frac{1}{2t^2}$$

erfüllt ist. Nach (54) folgt dann aus (75) und (76) für $1 \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$, $t \geq 50$

$$|\zeta(1-s)| < \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}} \log t \left(1 - \frac{0.048}{\log t}\right) \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) < \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}} \log t,$$

oder also für $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 0$, $t \geq 50$

$$(77) \qquad |\zeta(s)| < \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \log t.$$

21. Wir kehren jetzt zu der Funktion $F(s)$ und der Ungleichung (50) zurück.

Die gefundenen verschiedenen Ungleichungen für $|\zeta(s)|$ werden wir zur Abschätzung von $|F(s)|$ in den entsprechenden Intervallen benutzen. Da bei

der Herleitung dieser Ungleichungen $t \geqq 50$ angenommen wurde, müssen wir im folgenden $T - r \geqq 50$ annehmen.

Aus der für $\sigma > 1$ gültigen Ungleichung $|\zeta(s)| \leqq |\zeta(\sigma)|$ folgt erstens unmittelbar für $\sigma \geqq 0$

$$(78) \qquad |F(s)| < \zeta\left(\frac{5}{4} + \sigma\right).$$

Zweitens folgt aus (54) für $-\frac{1}{4} \leqq \sigma \leqq 0$

$$(79) \qquad |F(s)| < \frac{1}{2}\{\log(T+t) + \log(T-t)\} < \log T.$$

Drittens erhalten wir für $-\frac{5}{4} \leqq \sigma \leqq -\frac{1}{4}$ nach (56)

$$2|F(s)| < \left(\frac{T+t}{2\pi}\right)^{\frac{-1-4\sigma}{8}} \log(T+t)\left(1 - \frac{4}{(T+t)^2}\right)^{-1} +$$

$$+ \left(\frac{T-t}{2\pi}\right)^{\frac{-1-4\sigma}{8}} \log(T-t)\left(1 - \frac{4}{(T-t)^2}\right)^{-1}.$$

Wenn $|t| < 2$ und $T > 50$ angenommen wird, sind die Werte der Faktoren $\left(1 - \frac{4}{(T+t)^2}\right)^{-1}$ und $\left(1 - \frac{4}{(T-t)^2}\right)^{-1}$ kleiner als $1 + \frac{5}{T^2}$. Wenn wir

$$\psi(t) = \left(\frac{T+t}{2\pi}\right)^{\frac{-1-4\sigma}{8}} \log(T+t)$$

setzen, haben wir demnach

$$2|F(s)| < \left(1 + \frac{5}{T^2}\right)(\psi(t) + \psi(-t)).$$

Die zweite Ableitung von $\psi(t)$ wird

$$\psi''(t) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{T+t}{2\pi}\right)^{-\frac{4\sigma+17}{8}}\left\{\sigma + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\left(\sigma + \frac{1}{4}\right)\left(\sigma + \frac{9}{4}\right)\log(T+t)\right\}.$$

Das zweite Glied in den Klammern ist für $-\frac{9}{4} < \sigma < -\frac{1}{4}$ positiv, und also wird $\psi''(t) < 0$ für $-\frac{5}{4} \leqq \sigma \leqq -\frac{1}{4}$. Daraus folgt, dass

$$\psi(t) + \psi(-t) < 2\,\psi(0)$$

ist, und also

(80) $$|F(s)| < \left(1 + \frac{5}{T^2}\right)\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{-1-4\sigma}{8}} \log T.$$

Schliesslich finden wir nach (77) für $-\frac{7}{4} < \sigma < -\frac{5}{4}$

$$2\,|F(s)| < \left(\frac{T+t}{2\pi}\right)^{-\sigma-\frac{3}{4}} \log(T+t) + \left(\frac{T-t}{2\pi}\right)^{-\sigma-\frac{3}{4}} \log(T-t).$$

In derselben Weise wie oben können wir hieraus schliessen, dass im Intervalle $-\frac{3}{2} < \sigma < -\frac{5}{4}$

(81) $$|F(s)| < \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\sigma-\frac{3}{4}} \log T$$

ist.

22. Wir betrachten jetzt das in der Ungleichung (50) rechts auftretende Integral.

Wenn wir

(82) $$\alpha = \text{arc cos}\left(-\frac{1}{4r}\right), \quad \beta = \text{arc cos}\left(-\frac{5}{4r}\right)$$

setzen, so sind die Intervalle der Integrationsvariable φ, die denjenigen Intervallen von σ entsprechen, in welchen die obigen Ungleichungen (78), (79), (80) und (81) bestehen, der Reihe nach

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha, \quad \alpha < \varphi < \beta, \quad \beta < \varphi < \pi.$$

Hierbei ist $r > \frac{5}{4}$ angenommen, weil dies für das Endresultat vorteilhaft ist.

Wir erhalten dann

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \log\,|F(re^{i\varphi})|\,d\varphi < A \log\frac{T}{2\pi} + B \log\log T + C,$$

wo

$$A = -\frac{1}{4\pi}\int_{\alpha}^{\pi}\left(\sigma + \frac{1}{4}\right)d\varphi - \frac{1}{4\pi}\int_{\beta}^{\pi}\left(\sigma + \frac{5}{4}\right)d\varphi,$$

$$B = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi = \frac{1}{4},$$

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \zeta\left(\frac{5}{4} + \sigma\right)d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} \log\left(1 + \frac{5}{T^2}\right)d\varphi,$$

und $\sigma = r \cos \varphi$ ist. Nach (50) folgt hieraus weiter

$$|Q(T)| < A' \log T + B' \log\log T + C',$$

wo

$$A' = \frac{A}{q},\quad B' = \frac{1}{4q},\quad C' = \frac{1}{q}\left(C - A \log 2\pi - \frac{1}{2}\log|F(0)|\right) + \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi}|R(50)|.$$

Wenn wir in der Formel für A die Integrationen ausführen, finden wir (vgl. (82))

$$\int_{\alpha}^{\pi}\left(\sigma + \frac{1}{4}\right)d\varphi = -r \sin \alpha + \frac{1}{4}(\pi - \alpha) = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{16 r^2 - 1} - \operatorname{arc} \cos \frac{1}{4r}\right),$$

$$\int_{\beta}^{\pi}\left(\sigma + \frac{5}{4}\right)d\varphi = -r \sin \beta + \frac{5}{4}(\pi - \beta) = -\frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{16 r^2}{25} - 1} - \operatorname{arc} \cos \frac{5}{4r}\right).$$

Wenn wir zur Abkürzung $\pi - \alpha = \gamma$, $\pi - \beta = \delta$ setzen, können wir das Resultat in der folgenden Form schreiben:

$$A' = \frac{\operatorname{tg} \gamma + 5 \operatorname{tg} \delta - (\gamma + 5\delta)}{16\pi q}.$$

Um das Minimum dieses Ausdruckes zu finden setzen wir seine erste Ableitung nach r gleich Null. Nach einigen Umformungen ergibt sich als Bedingung des Minimums

$$\operatorname{tg} \gamma + 5 \operatorname{tg} \delta = 16\pi A'.$$

Wenn wir r aus dieser Gleichung bestimmen, finden wir mit zwei Dezimalstellen $r = 1{,}32$. Mit diesem Werte r wird $q = \log \frac{r}{\varrho} = 0{,}5653$ und

$$A' = 0{,}1361, \quad B' = 0{,}4422.$$

Von den Werten

$$\zeta(1{,}25) = 4{,}5951, \quad \zeta(1{,}5) = 2{,}6124, \quad \zeta(1{,}75) = 1{,}9623, \quad \zeta(2) = 1{,}6449,$$
$$\zeta(2{,}25) = 1{,}4602, \quad \zeta(2{,}5) = 1{,}3415, \quad \zeta(2{,}57) = 1{,}3157$$

ausgehend erhalten wir weiter nach der Trapezregel, wenn wir beachten, dass die zweite Ableitung von $\log \zeta\left(\frac{5}{4} + r \cos \varphi\right)$ nach φ positiv ist, und wenn wir

$$y_\nu = \log \zeta\left(\frac{5}{4} + \frac{\nu}{4}\right), \quad \varphi_\nu = \text{arc cos} \frac{\nu}{4r}, \quad (\nu = 0, 1, \ldots, 5),$$
$$y_6 = \log \zeta(2{,}57), \qquad \varphi_6 = 0$$

setzen,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \zeta\left(\frac{5}{4} + \sigma\right) d\varphi < \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{5} (y_\nu + y_{\nu+1})(\varphi_\nu - \varphi_{\nu+1}) = 0{,}1367$$

und also, da

$$\frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \log\left(1 + \frac{5}{T^2}\right) d\varphi < \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \cdot \frac{5}{T^2} < \frac{5}{4 \cdot 50^2} = 0{,}0005$$

ist, $C < 0{,}1372$.

Es erübrigt noch eine obere Grenze von $-\log |F(0)| = -\log \Re \zeta\left(\frac{5}{4} + Ti\right)$ zu berechnen. Nach (47) haben wir

$$\left|\log \zeta\left(\frac{5}{4} + ti\right)\right| \leq \log \zeta\left(\frac{5}{4}\right). \tag{83}$$

Wenn wir $\log \zeta\left(\frac{5}{4} + ti\right) = x + iy$ setzen, so ist

$$\Re \zeta\left(\frac{5}{4} + ti\right) = e^x \cos y, \tag{84}$$

und weiter ist nach (83), wenn $\log \zeta\left(\frac{5}{4}\right) = a$ gesetzt wird

(85) $$x^2 + y^2 \leqq a^2.$$

Das Minimum von $e^x \cos y$ im Bereiche (85) kann nur auf dem Rande desselben eintreten, und dann, wenn die Bedingungen

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2}, \quad y = a \sin y$$

erfüllt sind. Durch Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich, wenn für die Zahl a ihr Wert 1,525 eingesetzt wird

$$x = -0{,}0721, \quad y = \pm 1{,}5233,$$

und der Wert des Minimums wird gleich 0,0442.

Also ist $|F(0)| = \Re \zeta\left(\frac{5}{4} + Ti\right) > 0{,}0442$ und somit

$$-\log |F(0)| < 3{,}1191.$$

Wir wollen schliesslich den durch (25) definierten Ausdruck $R(T)$ abschätzen. Nach (43) ist

$$\left| \Im J\left(\frac{1}{4} + \frac{Ti}{2}\right)\right| < \frac{1}{3\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + T^2}\right)} < \frac{1}{3T},$$

und weiter ist

$$\left| \frac{T}{4} \log\left(1 + \frac{1}{4T^2}\right)\right| < \frac{1}{16T},$$

$$\left| \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2T}\right| < \frac{1}{8T}.$$

Also wird

$$\frac{1}{i} |R(T)| < \frac{25}{48\pi T} < \frac{25}{48 \cdot 50\pi} = 0{,}0033.$$

Wir haben nun eine obere Grenze von allen in C' eingehenden Grössen bestimmt, und erhalten endlich

$$C' < 4{,}3191.$$

Hiermit ist die Ungleichung (39) bewiesen.

Nach den gemachten Voraussetzungen besteht dieselbe für $T > 50 + r = 51{,}32$. Durch die numerischen Rechnungen von GRAM, LINDELÖF und vom Verfasser[1] ist indessen die Lage sämtlicher Nullstellen von $\zeta(s)$ im Intervalle $|t| < 200$ schon genauer bestimmt. Dabei hat sich erwiesen, dass in diesem Intervalle stets $|Q(T)| < 2$, also bedeutend kleiner als nach (39) ausfällt. Die Abschätzung (39) ist in der Tat für jedes $T \geqq 2$ gültig.

[1] J. P. GRAM, *Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann* (Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1902). Abgedruckt in Acta Mathematica, Bd. 27.

E. LINDELÖF, *Quelques applications d'une formule sommatoire générale* (Acta Soc. Sc. Fenn., Bd. 31, 1902). Vgl. *Sur une formule sommatoire générale* (Acta Mathematica, Bd. 27).

R. J. BACKLUND, *Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion* (Dissertation, Helsingfors 1916). Ich habe in dieser Arbeit 79 Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Strecke $\sigma = \frac{1}{2}, 0 < t < 200$ getrennt und zugleich bewiesen, dass diese Nullstellen die einzigen sind, deren imaginärer Teil zwischen 0 und 200 liegt.

ÜBER DIE FOURIERKOEFFIZIENTEN EINER STETIGEN FUNKTION.

(Aus einem Brief an Herrn A. WIMAN.)

VON

TORSTEN CARLEMAN

in UPPSALA.

Vor einiger Zeit haben Sie die Frage aufgeworfen, ob die Ordnung des zu einem stetigen Kern gehörigen FREDHOLM'schen Nenners die obere Schranke 2 erreichen kann. Ich werde im folgenden ein Beispiel angeben, für das diese Grenze tatsächlich erreicht wird. Das Beispiel hängt übrigens mit einer Konvergenzfrage betreffend die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion zusammen, welche vielleicht auch an und für sich nicht ohne Interesse ist.

Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ definierte Funktion, deren Quadrat integrierbar ist. Bekanntlich konvergiert die Reihe

$$\sum (a_n^2 + b_n^2),$$

wo a_n und b_n die Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos n x \, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin n x \, dx$$

bedeuten. Nach dem FISCHER-RIESZ'schen Satze kann man keinen Exponenten $2 - \delta$ $(\delta > 0)$ finden, so dass

$$\sum (|a_n|^{2-\delta} + |b_n|^{2-\delta})$$

für alle quadratisch integrierbaren Funktionen konvergiert. Betrachtet man hingegen nur Funktionen $f(x)$ von beschränkter Schwankung, so wissen wir, dass es eine Konstante c gibt, so beschaffen, dass

$$|a_n| < \frac{c}{n}, \quad |b_n| < \frac{c}{n}.$$

Folglich konvergiert in diesem Falle die Reihe

$$\sum (|a_n|^{1+\varepsilon} + |b_n|^{1+\varepsilon})$$

für jedes positive ε. M. a. W. der Konvergenzexponent der Folge a_n, b_n ist hier höchstens gleich Eins. So wird man zu der Frage geführt: Welche ist die obere Grenze der Konvergenzexponenten, wenn $f(x)$ die Gesamtheit der stetigen Funktionen durchläuft?

Diese Grenze ist 2. Ich werde in der Tat eine stetige Funktion angeben, bei der

$$\sum (|a_n|^{2-\delta} + |b_n|^{2-\delta})$$

für alle positive δ divergiert.

Die wesentlichste Schwierigkeit bei dieser Konstruktion ist durch den folgenden Satz von S. Bernstein[1] erledigt. Sei p eine ungerade Primzahl von der Form $4\mu + 1$ und $\left(\frac{k}{p}\right)$ das zahlentheoretische Symbol von Legendre $\left(\left(\frac{k}{p}\right) = +1\right.$ oder -1, je nachdem k in bezug auf p quadratischer Rest oder Nichtrest ist$\left.\right)$. Dann hat das trigonometrische Polynom

$$f_p(x) = \frac{2}{p^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{p-1} (p-k) \left(\frac{k}{p}\right) \cos kx = \sum_{k=1}^{p-1} a_k^{(p)} \cos kx$$

folgende Eigenschaften:

(1) $$|f_p(x)| < 1,$$

(2) $$\sum_{k=1}^{p-1} |a_k^{(p)}| = \frac{p-1}{\sqrt{p}}.$$

Ich behaupte, dass die Reihe

[1] C. R. Juin 1914.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} f_{p_\nu}(x) = F(x) \tag{3}$$

die erwünschte Eigenschaft besitzt. Dabei bedeutet $p_1, p_2, \ldots p_\nu, \ldots$ eine wachsende Folge ungerader Primzahlen von der Form $4\mu + 1$, die noch folgenden Bedingungen genügen

$$p_n > e^n, \tag{4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{p_{n-1}-1} |a_\nu^{(p_n)}| < 1. \tag{5}$$

Dass es immer möglich ist (5) zu erfüllen, folgt daraus, dass bei festgehaltenem k

$$\lim_{p=\infty} |a_k^{(p)}| = \lim_{p=\infty} \frac{2(p-k)}{p^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Da wegen (1) die Reihe (3) offenbar gleichmässig konvergiert, so ist $F(x)$ eine stetige Funktion, deren Fourierkoeffizienten, die wir mit A_n, B_n bezeichnen wollen, durch die Relationen

$$A_0 = 0,$$

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_n^{(p_\nu)}}{\nu^2}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$B_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gegeben sind. Die Summe

$$S_{p_n-1} = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{p_n-1}|$$

lässt sich nun, bei Berücksichtigung, dass $a_k^{(p_\nu)} = 0$ für $k \geq p_\nu$, folgendermassen abschätzen:

$$S_{p_n-1} \geq \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} |A_k| = \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_k^{(p_\nu)}}{\nu^2} \right| = \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} \left| \frac{a_k^{(p_n)}}{n^2} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_k^{(p_\nu)}}{\nu^2} \right| \geq \frac{1}{n^2} \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} |a_k^{(p_n)}| -$$

$$- \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} |a_k^{(p_\nu)}|}{\nu^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{p_n-1} |a_k^{(p_n)}| - \frac{\sum_{k=1}^{p_{n-1}-1} |a_k^{(p_n)}|}{n^2} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} |a_k^{(p_\nu)}|}{\nu^2}.$$

Berücksichtigen wir, dass gemäss (2) und (5)

$$\sum_{k=1}^{p_n-1} |a_k^{(p_n)}| = \frac{p_n - 1}{\sqrt{p_n}}, \qquad \sum_{k=1}^{p_{n-1}-1} |a_k^{(p_n)}| < 1,$$

$$\sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} |a_k^{(p_\nu)}| < 1, \qquad (\nu = n+1, n+2, \ldots)$$

so ergibt sich

$$S_{p_n-1} > \frac{p_n - 1}{n^2 \sqrt{p_n}} - \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} > \frac{p_n - 1}{n^2 \sqrt{p_n}} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}.$$

Da aber $n < \log p_n$, folgt hieraus schliesslich, dass für genügend grosse n

$$S_{p_n-1} > \frac{\sqrt{p_n}}{2 \log^2 p_n}$$

ist. Wir können somit behaupten: Es gibt unendlich viele positive ganze Zahlen m, für welche

$$(6) \qquad |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m| > \frac{\sqrt{m}}{2 \log^2 m}.$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{2-\delta} \qquad (\delta > 0)$$

divergiert. Denn wäre sie konvergent, so gäbe es eine von n unabhängige Zahl L derart, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} |A_\nu|^{2-\delta} < L$$

und es wäre nach einer bekannten Ungleichung

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \le \left(\sum_{\nu=1}^{n} |A_\nu|^{2-\delta}\right)^{\frac{1}{2-\delta}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} 1\right)^{\frac{1-\delta}{2-\delta}} < L^{\frac{1}{2-\delta}} n^{\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2(2-\delta)}},$$

was offenbar dem Resultat (6) widerspricht.

Wir kehren nun zu der am Anfang erwähnten Frage zurück. Man bestätigt leicht, dass die Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) \, dy = 0$$

mit dem stetigen Kern

$$K(x,y) = \frac{1}{\pi}(F(x-y) - F(x+y)),$$

die Eigenfunktionen $\sin kx$ und die entsprechenden Eigenwerten $\lambda_k = \frac{1}{A_k}$ besitzt. Da also die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i|^{2-\delta}}$$

für alle $\delta > 0$ divergiert, kann die Ordnung der zugehörigen FREDHOLM'schen Nenner nicht kleiner als 2 sein.

Man kann mit Hilfe der Funktion $F(x)$ noch folgende Frage beantworten. Es sei $K(x,y)$ ein für $0 \leq {x \atop y} \leq \pi$ definierter reeller symmetrischer Kern so beschaffen, dass

$$\int_0^\pi \int_0^\pi (K(x,y))^2 \, dx \, dy \tag{7}$$

konvergiert. Die Eigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen bezeichnen wir mit λ_ν bzw. $\varphi_\nu(x)$. Ferner möge $u(x)$ eine beliebige stetige Funktion sein. Dann gelten die Entwicklungssätze:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi K(x,y)\, u(x)\, u(y)\, dx\, dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \left(\int_0^\pi u(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx \right)^2, \tag{8}$$

$$\int_0^\pi K(x,y)\, u(y)\, dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \int_0^\pi u(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx \,.\, \varphi_\nu(x). \tag{9}$$

Die Reihen rechter Hand sind absolut konvergent. Es ist bei den Beweisen von HILBERT und SCHMIDT wesentlich vorausgesetzt, dass das Doppelintegral (7) konvergiert. Es erhebt sich die Frage, ob diese Sätze auch für allgemeinere Kerne gelten, etwa für Kerne von der Form

$$K(x,y) = \frac{H(x,y)}{|x-1|^\alpha} \qquad \left(\frac{1}{2} < \alpha < 1\right), \tag{10}$$

worin $H(x,y)$ beschränkt bleibt. Der erste Satz (8) ist auch in diesem Falle gültig,[1] der zweite aber nicht, was das folgende Beispiel zeigt. Man setze

$$K(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\nu x\cos\nu y}{\nu^{1-\alpha}} = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu(x+y)+\cos\nu(x-y)}{\nu^{1-\alpha}}. \tag{11}$$

Ferner wird statt $u(x)$ die oben besprochene Funktion $F(x)$ gesetzt. Es ist leicht zu bestätigen, dass $K(x,y)$ in der Form (10) dargestellt werden kann. Die Reihe (9) ist in diesem Falle

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu}{\nu^{1-\alpha}}\cos\nu x.$$

Damit diese Reihe für alle x absolut konvergiere (oder für x-Werte die eine Punktmenge bilden, deren Mass grösser als Null ist), ist notwendig und hinreichend, dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|A_\nu|}{\nu^{1-\alpha}}$$

konvergiert.[2] Diese Reihe divergiert aber für $\alpha > \frac{1}{2}$. Denn es gilt für unendlich viele m

$$\sum_{\nu=1}^{m}\frac{|A_\nu|}{\nu^{1-\alpha}} > \frac{1}{m^{1-\alpha}}\sum_{\nu=1}^{m}|A_\nu| > \frac{m^{\frac{1}{2}}}{2\,m^{1-\alpha}\log^2 m} = \frac{m^{\alpha-\frac{1}{2}}}{2\log^2 m}.$$

Ich will schliesslich noch die BERNSTEIN'sche Konstruktion auf ein Problem anwenden, das die im Einheitskreise beschränkten Potenzreihen betrifft. Es sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion, welche der Bedingung

$$|f(z)| < 1 \qquad (|z| < 1) \tag{12}$$

genügt. LANDAU hat die obere Grenze von $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ bei der Bedingung (12) genau bestimmt, und diese obere Grenze ist von der Grössenordnung $\log n$. Ich will nun an einem Beispiel zeigen, dass die Grössenordnung der oberen Grenze (G_n) von

$$\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|$$

[1] Vgl. CARLEMAN, Über das Neumann-Poincarésche Problem etc. Diss. Uppsala 1916. S. 45.

[2] FATOU, Bull. de la soc. math. de France 1913.

nicht erheblich kleiner als $\sqrt{n}$ sein kann. Dass sie nicht grösser ist, folgt leicht aus der bekannten Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^2 d\varphi.$$

Herr FEKETE[1] hat in einer anders gerichteten Untersuchung gelegentlich den folgenden Satz ausgesprochen: Es sei $\varphi(x)$ eine nach 2π periodische, beschränkte, im RIEMANN'schen Sinne integrierbare Funktion von x und

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

die zu ihr gehörige Fourierreihe. Dann ist

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} (-b_\nu \cos \nu x + a_\nu \sin \nu x)\right| \leq CM \log n,$$

wo M die obere Grenze von $|\varphi(x)|$ und C eine von M und n unabhängige Konstante bedeutet.[2]

Da ich mich auf diesen Satz stützen will, füge ich dessen Beweis hier ein.

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} (-b_\nu \cos \nu x + a_\nu \sin \nu x)\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu(x-s)\right)\varphi(s)\,ds\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\frac{n(x-s)}{2}\sin\frac{(n+1)(x-s)}{2}}{\sin\frac{x-s}{2}}\varphi(s)\,ds\right| <$$

$$\leq \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\frac{n(x-s)}{2}}{\sin\frac{x-s}{2}}\right| ds = \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\frac{ns}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\right| ds.$$

Bekanntlich ist das Integral in der letzten Zeile kleiner als $C \log n$.

[1] Journal für Mathematik 146.

[2] Die Funktion

$$\varphi(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

zeigt übrigens, dass eine bessere Grössenordnung nicht zu erzielen ist, da für $x = 0$

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \cdots + \frac{\cos nx}{n} \backsim \log n.$$

Ich betrachte nun das Polynom

$$\frac{1}{2C\log p}\cdot\frac{2}{p^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{p-1}(p-k)\left(\frac{k}{p}\right)z^k=\sum_{\nu=1}^{p-1}a_\nu z^\nu,$$

dessen Realteil für $z=e^{i\theta}$ gleich $\frac{1}{2C\log p}f_p(\theta)$ wird. Der Satz von FEKETE ergibt nun bei Berücksichtigung der Ungl. (1), dass

$$\left|\sum_{\nu=1}^{p-1}a_\nu z^\nu\right|<1 \qquad (|z|<1)$$

ist. Da ferner

$$\sum_{\nu=1}^{p-1}|a_\nu|=\frac{1}{2C\log p}\cdot\frac{p-1}{\sqrt{p}}=\frac{1}{2C\log p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sqrt{p},$$

können wir den Schluss ziehen

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log G_n}{\log n}=\frac{1}{2}.$$

Zürich den 6. Dezember 1917.

MITTEILUNG

von

PAUL KOEBE

in Jena.

Am Schlusse meiner Abhandlung IV der Serie »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung» habe ich angekündigt, auch die Fortsetzung der Serie im Journal für Mathematik und in den Acta mathematica veröffentlichen zu wollen. Nach einer neueren Entschliessung habe ich meinen Plan geändert und werde die Fortsetzung (ca. vier weitere Abhandlungen) in der neubegründeten *Mathematische Zeitschrift* (Verlag Julius Springer, Berlin) bringen.

BIBLIOGRAPHIE.

Felix Alcan.

Paris.

MICHEL, CH., Cours d'algèbre et d'analyse, Avec 91 fig. et 345 exercices et problèmes proposés. — VIII + 853 pp. 8. Fr. 18: —; 1916.

Nombres irrat. Limites. Continuité. Fonctions puissance, exponent. et logarithm. Fonctions circulaires. Polynomes. Fractions rationn. Développements limités. Analyse combinat. Binome de Newton. Fonctions symétr. rat. Déterminants. Equat. lin. Formes lin. Nombres imag. Dérivées et différentielles. Applicat. de la théorie d. dérivées à l'étude d. équat. et d. fonct. Equations ent. Calcul intégrale. Applicat. géom. du calcul intégral. Séries num. Séries ent. Equations différent.

Friedrich Brandstetter.

Leipzig.

LÜBSEN, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Analysis zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke d. prakt. Lebens, 11:e Aufl. neu bearb. von A. DONADT. Mit 10 Fig. 208 pp. 8. M. 3: 60; 1914.

Kombinationslehre. Binom. Lehrsatz für ganze Exponenten. Arithmet. Reihen höh. Ordnung. Von d. figuriert. Zahlen. Konvergenz unendl. Reihen. Verwandl. d. Funkt. in Reihen. Die komplexen Zahlen u. d. Rechnungsarten mit solch. Zahlen. Von d. alg. Gleichungen. Auflös. d. binom. Gleichungen. Auflös. d. kub. u. biquadrat. Gleich. Zerlegung gebrochener Funkt. in Partialbrüche. Von d. Kettenbrüchen. Interpolation.

LÜBSEN, H. B., Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung (Differential- u. Integral-Rechnung) zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Notwendigste u. Wichtigste. Neu bearb. von A. DONADT. 9:e Aufl. Mit 63 Fig. — VII + 440 pp. 8. M. 8 geh.; 1916.

Einl. d. Funkt. Darstell. d. Verlaufs e. Funktion. Begriff d. Grenze. Allg. Sätze üb.

Grenzwerte. — Allg. Sätze üb. Differentiation. Ableit. d. elementaren Differentialformen. — Von d. höh. Differentialquotienten. — Der Mittelwertsatz; die Sätze von Taylor u. Maclaurin nebst Anwend. — Anw. d. Diff.rechn. auf das Probl. d. Tangenten an ebene Kurven. — Best. d. wahren Wertes e. Funktion von d. unbest. Form. . . Maxima u. Minima. Vom Laufe d. krum. Lin. Konvexität, Konkavität. Inflexion. Von d. Krüm. d. Kurven. Differentiation unentwick. Funkt. zweier Veränderl. Vertauschung d. unabhäng. veränderl. Grösse. Evoluten u. Evolventen. Differentiat. d. Funkt. v. zwei u. mehr unabh. veränd. Grössen. Max. u. Min. d. Funkt. mehrerer unabh. veränd. Grössen. Max. u. Min. mit Nebenbedingungen. — Die wichtigsten Regeln d. Integralrechn. Quadratur eb. Flächen. Rektifikat. krum. Lin. Inhaltsberechn. d. Umdrehungskörper. Berechn. d. Oberflächen von Umdrehungskörpern. Näherungsweise Integrationen innerh. best. Grenzen. Integrat. d. Diff.gl. Best. krum. Lin. aus gegeb. Eigenschaften. Ergänzungen zu d. im 15. Buche gegeb. Integrat.method. Eigensch.best. Integrale. Integrat. durch Differentiat. unter d. Integralzeichen. Euler's Summationsformel.

Cambridge University Press.

Cambridge.

Bateman, H., The mathematical analysis of electrical and optical wave-motion on the basis of Maxwell's equations. — VI + 159 pp. 8. 7 sh. 6 d.; 1915.

Fundamental ideas. Gen. survey of the different methods of solving the wave-equation. Polar coordinates. Cylindrical coord. The probl. of diffraction. Transformations of coordinates appropriate for the treatment of probl. connect. with a surface of revolut. Homogeneous solutions of the wave-equat. Electromagnet. fields with moving singularities. Miscellaneous theories.

Brunt, David, The combination of observations. — X + 219 pp. 8. 8 sh.; 1917.

Errors of observation. The law of error. The case of one unknown. Observat. of different weight. The gen. problem of the adjustment of indirect observat. involving sev. unknown quantities. Evaluation of the most probable values of the unknowns, their weights a. prob. errors. The adjustm. of conditioned observations. The rejection of observat. Alternatives of the normal law of errors. Correlation. Harmonic analysis from the standpoint of least squares. The periodogram. Appendix.

Cunningham, E., The principle of relativity. — XIV + 221 pp. 8. 9 sh.; 1914.

The relativity of Newtonian dynamics. The development of the concept of the aether. The electron theory. Correlat. of stationary a. moving syst. Einstein on the relativ. of space a. time. The kinematics of Einstein. The electron theory of matter. — Minkowski's four-dimension calculus. The field equat. of the electr. theory in Minkowski's form. Minkowski's electrodynamics of mov. bodies. — The dynamics of the electron. Relativity a. dynam. theory. The dynamics of a particle. The dynam. of continuous material media. Relativity a. an objective aether. Relativity a. probability. Conclud. remarks.

Hardy, G. H., The integration of functions of a single variable. 2nd ed. (Cambridge Tracts 2.) — VIII + 67 pp. 8. 3 sh.; 1916.

Introd. Element. functions a. their classificat. The integrat. of elem. functions. Summary of results. The integrat. of rat. functions. The integrat. of algebraic. functions. The integrat. of transcend. functions. Bibl. On Abel's proof of the theor. of v., § 11.

Jessop, C. M., Quartic surfaces with singular points. — XXXV + 198 pp. 8. 12 sh.; 1916.

Introduct. Quartic surfaces with isolated singular points. Desmic surfaces. Quart. surfaces with a double conic. Quart. surf. with a nodal conic a. additional nodes. The cyclide. Surfaces with a double line: Plücker's surf. Quart. surf. with an infinite numb. of conics: Steiner's surf., the quart. monoid. The gen. theory of rational quart. surf. Determinant surfaces.

Macauly, F. S., The algebraic theory of modular systems. (Cambridge Tracts 19.) — XII + 112 pp. 8. 4 sh. 6 d.; 1916.

Introd. The resultant. The resolvent. Gen. properties of modules. Unmix. mod. Solut. of homogen. lin. equations. Noether's theorem. — The inverse syst. Properties of simple modules. Modular equat. of unmix. modules. Note on the theory of ideals.

Macmahon, Percy A., Combinatory Analysis. Vol. 2. — XIX + 340 pp. 8. 18 sh.; 1916.

The theory of Euler. Geometrical and other transformations. Ramanujan's identities. Partitions without sequences. Particular study of the function

$$\frac{(1-x^{j+1})\,(1-x^{j+2})\ldots(1-x^{j+i})}{(1-x)\,(1-x^2)\ldots(1-x^i)}.$$

Connexion of the theory of partit. with other combinat. theories. — The method of Diophantine inequalit. A syzygetic theory. The Diophantine ineq. $a\alpha \geq b\beta$. The simultan. Diophantine ineq.

$$a_1\alpha \geq b_1\beta,$$
$$b_2\beta \geq a_2\alpha.$$

On the form of enumerat. functions. On the algebraic forms of integers. The theory of magic squares. — Partit. in two dimensions: Introductory notions. The method of Diophantine ineq. The method of Lattice funct. Excursus on permutat. funct. — Plane partit. with unrestr. part magnitude. Plane partit. with restr. part magnitude. Partit. in solido. The symmetry appertain. to partitions. — Symm. funct. of sev. systems of quantities, with some applicat. to distrib. theory: Elem. theory. The theory of separat. a. the allied theory of distrib. The different. operations. The lin. part. diff. ope-

rators of the theory of separat. a. the partit. obliterating operators. Further theory of the latin square. Tables.

Robb, Alfred A., A theory of time and space. — VI + 373 pp. 8. 10 sh. 6 d.; 1914.

Seward, A. C., Science and the nation. Essays by Cambridge graduates with an introduction by the Right Hon. Lord Moulton. — XXII + 328 pp. 8. 5 sh.; 1917.

Introd. The national importance of chemistry. Phys. research a. the way of its applicat. The modern science of metals, pure a. applied. Mathematics in relat. to pure a. applied science. The science of botany a. the art of intens. cultivat. Science in forestry. System. plant-breed. An agricult. war probl. Geology as an econ. science. Medicine a. experim. science. The »Specific treatment» of disease. Flies a. disease. The government of subject peoples.

Moritz Diesterweg.

Frankfurt a. Main.

Voigt, Andreas, Die Teilbarkeit der Potenzsummen und die Lösung des Fermat'schen Problems. Eine zahlenteoretische Untersuchung. — XII + 105 pp. 8. M. 2: — geh.; 1916.

Dürr'sche Buchhandlung.

Leipzig.

Schmidt, Max C. P., Kulturhistorische Beiträge zur Kenntnis des griechischen und römischen Altertums. H. 1: Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik. 2:e verb. u. stark verm. Aufl. XVI + 269 pp. 8. 1914. — H. 2: Die Entstehung d. antiken Wasseruhr. 113 pp. 8. 1912.

H. 1: Die moderne Terminologie d. elem. Mathematik. Die wissensch. Terminol. d. Griechen im allgem. Die math. Terminol. d. Griechen im bes. Die zusammengesetzt. Wörter in d. math. Term. Nil, Euphrat, Indus. Milet, Ephesos, Samos. Begriff d. Elementarmath. — Abh.: Punkt, Linie, Gerade, Fläche, Ebene, Grenze, Winkel. Thales v. Milet. Lineal u. Richtschnur, Lotstift u. Lotschnur, Winkelmass u. Zirkel. Pythagoras v. Samos. Die Saitenharmon. d. Pythagoras. Herkunft d. Wortes »Hypotenuse», »Kathete», »Peripherie». Euklid v. Alexandria. Das Rechnen bei d. Griechen, bei d. Römern. Herkft d. Wortes »Summe». Zur latein. Termin. d. el. Arithmetik. — Anm. — Texte.

H. 2: Einl. Aussehen u. Gesch. d. ält. Klepsydra. Die Periode d. dorisch-jon. Philosophie. Die Periode d. att. Logographie. Die alexandrin.-röm. Periode. Schluss. — Anm. — Texte.

SCHMIDT, MAX C. P., Realistische Chrestomathie aus der Litteratur des klassischen Altertums. Buch 1. VIII + 128 pp. 8. 1900.

Einl. Definit., Postulate, Axiome. Kongruenz d. Dreiecke. Parall. Linien u. Parallelogramme. Pythagoreischer Lehrsatz. Rechteck u. Teilrechteck. Winkel im Kreise. Satz d. Thales. Lehre v. d. Proport. d. Strecken. Ähnlichkeit d. Dreiecke. Lehre v. d. Proport. d. Zahlen. Ptolemäischer Lehrsatz. Das Sieb d. Eratosthenes. Auflös. v. Gleich.

Jacob Dybwad.

Kristiania.

STÖRMER, CARL, Sur un problème relatif au mouvement des corpuscules électriques dans l'espace cosmique. 3:e et 4:e communicat. Avec 34 fig. (Videnskapsselskapets Skrifter, I Kl., 1916, No 6 & 12.) — Utgit for Fridtjof Nansens Fond. 60 pp. resp. 91 pp. 8. 1916.

Gauthier-Villars & Cie.

Paris.

Annuaire, pour l'an 1917, publ. par le Bureau des Longitudes. — VII + 686 pp. 16. Fr. 2: —

Le calendrier babylon., p. G. Bigourdan. L'avance de l'heure légale pend. l'été de l'année 1916, p. J. Renaud. Déterminat. d. mètre en longueurs d'ondes lumin., p. M. Hamy. Notice s. l'ing. hydrographe en chef Ph. Hatt, p. J. Renaud. — Calendr. p. l'année 1918, fêtes, concord. d. cal., éclipses, lev. et couchers du sol. et de la lune, phases, marées, coeff. d. marées.

BÔCHER, MAXIME, Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes. Prof. à la Sorbonne en 1913—1914. Rec. et réd. par GASTON JULIA. — (Collection Borel.) VI + 118 pp. 8. Fr. 5: —; 1917.

Les théorèmes d'existence. L. analogies d. différentiels lin. avec l. syst. algébriques lin. L. solutions réelles et leurs zéros dans l. cas l. plus simples. L. fonct. caractéristiques et leurs zéros dans quelq. cas plus gén. L. fonct. de Green et leurs applications.

DUMONT, E., Théorie générale des nombres. Définitions fondamentales. (Scientia, No 35.) — 92 pp. 8. Fr. 2: — cart.; 1915.

Des nombres absolus: Segments de droite. Généralités s. l. nombres abs. Nombres entiers. Complément à la théorie d. segm. de droite. Nombres commensurables. Nombres incommens. — Des nombres relatifs: Vecteurs géométr. Généralités sur l.

nombres relat. Nombres qualifiés. Angles dirigés. Nombres complexes. Quaternions. Vecteurs-glisseurs. Biquaternions. Conclusion gén.

Halphen, G.-H., Oeuvres. Publ. par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard avec la collaborat. de E. Vessiot. T. 1. — XLIV + 570 pp. 8. Fr. 20: —; 1916.

Lecornu, Léon, Cours de mécanique, professé à l'Ecole polytechnique. T. 2. — VI + 538 pp. 8. Fr. 18: —; 1915.

Principes gén. Energie d. syst. Syst. à liaisons. Théorie d. percussions. Equat. de Lagrange. Théorie d. petits mouvem. — Moments d'inertie. Rotat. autour d'un axe fixe. Mouvem. parallèlement à un axe fixe. Mouvem. aut. d'un point fixe. Mouvem. d'un solide homogène sur un plan horizont. parf. poli. Mouvem. d'un solide ent. libre. Extens. au mouvem. d'un syst. déformable. — Frottement, roulement, pivotement. Choc d. corps sol. — Etude géom. de la déformat. d'un syst. continu. Tensions intér. Relat. entre l. déformations et l. tensions d'un corps sol. Equilibre d'élasticité. Applicat. Problème de Saint-Venant. Mouvem. d. corps élast. — Hydrostatique. Equat. de Lagrange et d'Euler. Equat. de Helmholtz. Mouvem. permanent. Résist. au mouvem. d'un solide. Dynamique d. fluides natur.

Lémeray, E. M., Principe de relativité. Cours libre prof. à la Fac. d. Sci. de Marseille, 1915. (Actualités scientif.) — IV + 156 pp. 16. Fr. 3: 75; 1916.

Introd. Transformat. de Lorentz. Cinémat. du point. Statique. Dynamique. Transformat. d. forces. Forces qui s'exercent entre corps en mouvem. Forces centrales. Forces répuls. Eléments de la dynam. de l'électron. Forces attractives. Gravitat. Inertie de l'énergie.

Montessus de Ballore, R. de, Exercices et leçons de mécanique analytique. — VI + 334 pp. 8. Fr. 12: —; 1915.

Centres de gravité. Attraction et potent. — Moments d'inertie. Calcul direct de mom. d'inertie. Artifices divers. Principes d. travaux virt. et de d'Alembert. Equat. de Lagrange. Mouvem. d'un corps sol. Mouvem. d'un corps sol. autour d'un point fixe. Mouvem. d. syst. matériels. Equilibre. Stabilité. Petits mouvem. d'un syst. aut. d'une posit. d'équilibre stable. Chocs et percussions. — Les intégrales ellipt. dans le domaine réel: Introd. Fonctions sn, cn, dn. Intégrales de Legendre et d'Abel. Etude de l'intégrale $\int f[x, \sqrt{P(x)}]\,dx$ où f est une fract. rat. et $P(x)$ un polyn. en x du quatr. ou du trois. degré .... Fonct. de $\wp u$, ζu, σu ....

Montessus de Ballore, R. de, Leçons sur les fonctions elliptiques en vue de leurs applications. Cours libre prof. à la Fac. d. Sci. de Paris. — X + 268 pp. 8. Fr. 12: —; 1917.

Définitions de sn, cn, dn. Périodes réelles. Dérivées. Développements en séries. Variations. Formules d'addit. et leurs conséquences. Fonct. sn, cn, dn pour l. val. imag. de la variable. Périodes imag. Zéros et pôles. L. intégrales ellipt. Cal-

culs num. concern. l. intégrales ellipt. et l. fonct. sn, cn, dn. Fonctions ell. u, $E(\varphi)$. $\Pi(\varphi)$. Calcul direct d. int. ell. de prem. et de deuxième espèce. — La fonct. $\wp u$ dans le cas du discrim. posit. ($\Delta > 0$). La fonct. $\wp u$ dans le cas du discrim. négat. ($\Delta < 0$). Dérivées, variat., développem. en serie de $\wp u$. La fonct. ζu. La fonct. σu. Les fonct. $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$. Zéros. — Définit. gén. d. fonct. ell. Représent. géom. de la double périodicité. Nouv. express. de $\wp u$. Théor. gén. Les fonct. $\wp u$, ζu, σu pour d. val. quelconques d. invariants g_2, g_2. Décomposit. d. fonct. ell. Fonctions sn, cn, dn généralisées. — Fonct. $\theta(v,\tau)$, $\theta_1(v,\tau)$, $\theta_2(v,\tau)$, $\theta_3(v,\tau)$. Relat. avec σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$. Relat. entre ζu, $\wp u$, sn, cn, dn et l. fonctions θ. Calculs num. concern. l. fonct. $\wp u$, ζu, σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ dans le cas d'invar g_2, g_3 réels. Calculs concern. l. fonct. ell. dans le cas d'invar. g_2, g_3 imag. Calcul d. int. ell. à l'aide d. fonct. θ.

Poincaré, Henri, Oeuvres, publ. sous les auspices du Ministère de l'Instruction par. G. Darboux. Tome 2, publ. avec la collaboration de N. E. Nörlund et de E. Lebon. — LXXI + 632 pp. 4. 1916.

Préf. Eloge hist. d'Henri Poincaré, par G. Darboux. — Analyse pure: Sur l. fonctions fuchsiennes. S. une nouv. applicat. et quelq. propriétés import. d. fonct. fuchsiennes. S. l. fonct. fuchsiennes. S. l. groupes kleinéens. S. une fonct. analogue aux fonct. modulaires. S. l. fonctions fuchs. S. l. groupes discontinus. S. l. fonctions fuchs. S. une classe d'invariants relat. aux équat. linéaires. S. l. fonctions fuchs. S. l. groupes d. équations lin. S. l. fonctions fuchs. S. l. groupes hyperfuchsiens. S. l. fonctions fuchs. et. l. formes quadrat. ternaires indéfinies. L. fonctions fuchs. et l'équat. $\Delta u = e^u$. Grand prix d. sc. math. (Géométrie, prix du Budget). S. l. théorie des fonctions fuchs. S. l. fonctions unif. qui se reproduisent par d. substitut. linéaires. Théorie d. groupes fuchsiens. S. l. fonctions fuchs. Mémoire s. l. groupes kleinéens. S. l. groupes d. équations lin. Mém. s. l. fonctions zétafuchs. L. fonctions fuchs. et l'arithmétique. L. fonctions fuchs. et l'équat. $\Delta u = e^u$. Fonctions modulaires et fonctions fuchs. Notes par N. E. Nörlund.

Vallée-Poussin, C. de la, Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. Leçons professées au Collège de France. (Collection de monographies s. la théorie d. fonct., publ. par E. Borel.) — VIII + 154 pp. 8. Fr. 7:—; 1916.

Ensembles mesurables et intégrale de Lebesgue: Notions gén. s. l. ensembles de points. Mesure d. ensembles et fonct. mesurables. Intégrale de Lebesgue. — Fonctions additives d'ensemble: Notions gén. s. l. dérivées et les réseaux. Fonct. d'ensemble absolum. continues et addit. Intégrales indéf. Fonct. addit. d'ensemble normal. — Classes de Baire: Fonct. de classe I. Théorème et probl. de Baire. Fonct. de classe α. Conditions généralisées de Lebesgue et de Baire.

Zoretti, L., Exercices numériques et graphiques de mathématiques sur les leçons de mathématiques générales. — XV + 124 pp. 8. Fr. 7:— cart.; 1914.

Géométrie élémentaire: Révision. Coniques. Fonction linéaire. Mouvement uni-

forme. Trinome du sec. degré. Fonct. homographique. Les fonct. circulaires. Triangulation. Levé de plans. Calculs approchés. Procédés empiriques. Notion de graphique. Dérivation graphique. Calculs effectués au moyen de séries. Résolut. d. équations. Etude de cert. courbes. Courbure. Fonct. exponentielle. Logarithmes. Intégration graph. Valeur moyenne. Intégrales curvilignes, doubles, triples. Applicat. Equat. différent. Constructions géométr. relat. aux vecteurs. Etudes d. surfaces. Div. échelles. Points alignés. Abaques.

C. W. K. Gleerup.

Lund.

BRODÉN, T., Om begreppens dialektiska upprinnelse. Logisk-matematiska prolegomena. Mit deutscher Uebers. des Vorwortes. — 127 pp. 8. Kr. 1:75; 1915.

Enhet. Mångfald. Kombinat. af dem. Någonting som är enhet resp. mångfald, resp. enhet-mångf. Någonting som *kan* betraktas såsom enhet resp. mångf., resp. bägge delarna. Primit. enhetsbegrepp. Enhetsbetoning. Mångfaldsbeton. Dubbelbeton. Ett föremål, fl. förem., mängd af föremål. Absol. enheter. Återbl. Motsägelselagen. Mgdr af abs. enheter. Ändl. o. oändl. mängder. Hela tal. Mängder af mgdr. Brutna o. irrat. tal. Neg. tal. »Begrepp» o. »föremål». Antionomier.

A. Hermann & Fils.

Paris

DUHEM, PIERRE, La chimie est-elle une science française? — 190 pp. 8. Fr. 2:—; 1916.

Avant-propos. Jean Rey. Jean Mayow. Robert Boyle. Les cinq principes d. combinaisons chimiques. Les théories chim. de Becher. Georges-Ernest Stahl et la théorie du phlogistique. Les vicissitudes de la théorie du phlogistique au cours du XVIIIe siècle. Joseph Prestley. Charles-Guillaume Scheele. Antoine-Laurent Lavoisier.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung.

Berlin u. Leipzig.

WIELEITNER, H., Algebraische Kurven. Neue Bearb. 1. T.: Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Fig. (Samml. Göschen 435.) — 146 pp. 8. M. 0:90; 1914.

Allgem. Gesichtspunkte. Die Beziehungen zum Unendlichfernen. Die Kurven als Tangentengebilde. Höh. Singularitäten. Näherungskurven.

Gyldendalske Boghandel.
Nordisk Forlag.

Kristiania.

WEREIDE, THORSTEIN, Statistical theory of energy and matter. — XV + 169 pp. 8. 1915.

Herold'sche Buchhandlung.

Hamburg.

HAS, REINHARDT, Das Fermatsche Prinzip. Der Beweis d. Fermatschen Prinzips auf Grund des Koeffizientengesetzes. — 18 pp. 8. M. 2:—. 1912.

Ulrico Hoepli.

Milano.

CREMONA, LUIGI, Opere matematiche, pubbl. sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei. T. 2, 451 pp. 4. L. 25:—; 1915. T. 3, XXII + 520 pp. 4. L. 30:—; 1917.

T. 2: Solution de la question 545. Sur la quest. 317. S. un probl. d'homographie. Intorno alla trasform. geom. di una fig. piana in un'altra pur piana. S. l. surfaces développables du cinq. ordre. Mém. de géom. pure s. l. cubiques gauches. Note s. l. cub. gauches. S. l. surfaces gauches du trois. degré. Sulle trasform. geom. delle fig. piane. I. Un teor. s. cubiche gobbe. Questioni prop. nel Giornale di Mat. Corrispondenza. Area di un segmento di sez. con. Sulla projezione iperboloidica di una cub. gobba. Not. bibliogr. Oeuvres de Desargues, par M. Poudra. S. teoria delle coniche. Consideraz. s. curve piane del terz'ord. Nouve ricerche di geom. pura s. cub. gobbe ed in ispecie s. parabola gobba. S. l. nombre d. coniques qui satisfont à d. condit. doubles. Rivista bibl. S. teoria delle con. Sopra alcune quest. nella teoria d. curve piane. S. l. hyperboloides de rotat. qui passent par une cub. gauche donnée. S. l. surface du quatr. ordre qui a la propr. d'être coupée suiv. deux con. par chacun de s. plans tang. Solut. d. quest. 563, 564 et 565. Solut. de la quest. 491. Solut. d. quest. 677, 678 et 679. Solut. de la quest. 380. On the geom. transform. of plane curves. Einleit. in eine geom. Theorie d. eb. Curven. Sulle trasform. geom. d. fig. piane. II. S. l'hypocycloïde à trois rebroussements. On the fourteen-points conic. On norm. to conics, a new treatm. of the subj. Sol. of the probl. 1751. Démonstrat. géom. de deux théorèmes relat. à la surf. d'égale pente circonscrite à une conique. S. storia d. prospettiva ant. e mod. I principii d. prospettiva lin. sec. Taylor, per M. Uglieni. Prelimin. di una teoria geom. d. superficie. Rappresentaz. d. superf. di Steiner e d. superf. gobbe di terzo grado sopra un piano. Un teor. int. alle forme quadrat. non omogenee fra due var. Extr. d'une lettre à M. Chasles. S. una certa fam. di superf. gobbe. S. una certa curva gobba di quart'ord. Relaz. sull' Opera del

prof. Casorati: Teorica d. funz. di var. complesse. Rappresentaz. di una classe di superf. gobbe s. un piano, e determinaz. d. loro curve assintot. S. superf. gobbe di quarto grado.

T. 3: Della vita e d. opere di Luigi Cremona. Mém. de géom. pure s. l. surf. de trois. ordre. S. trazform. d. curve iperellitiche. Int. al numero dei moduli d. equaz. o d. curve algebr. di un dato genere. Lettera al Direttore del Giornale di Mat. Sugli integrale a diff. alg. S. ventisette rette di una superf. del trezo ord. Grundzüge er. allg. Theorie d. Oberflächen in synthet. Behandl. S. linee di curvatura d. superf. di sec. grado. Note à un mém. de R. Sturm. S. superf. di quart'ord. dotata di una con. dopp. I, II. Observat. géom. à propos de la note de M. Brioschi. »S. l. tangents doubles d'une courbe du 4. ord. av. un point double.« S. trasform. razion. nello spazio. I, II. Ueb. die Abbild. alg. Flächen. S. trasform. raz. di 2. grado nello spazio, la cui inv. è di 4. grado. Lettera al prof. Beltrami. S. trasform. raz. nello spazio. Rappresentaz. piana di alc. superf. alg. dotate di curve cuspidali. Le fig. reciproche n. statica grafica. Commemoraz. di Alfredo Clebsch. Relaz. int. ad una mem. del sig. colon. Pietro Conti. S. corrispond. fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria d. superf. S. l. syst. de sphères et l. syst. de droites. Teoremi stereom. dai quali si deducono le propr. dell'esagrammo di Pascal. Ueb. die Polar-Hexaeder bei d. Flächen dritt. Ordn. Domenico Chelini. S. superf. e le curve che passano pei vertici d'infiniti poliedri form. da piani oscul. di una cub. gobba. Quest. 556. S. una certa superf. di quart'ord. Commemoraz. di H. J. S. Smith. Cenno necrol. di W. Spottiswoode. An ex. of the meth. of deducing a surf. from a plane fig. On a geom. transform. of the fourth ord., in space of three dim., the inv. transf. being of the 6th ord. S. una trasform. biraz., del sesto gr., dello spazio a tre dim., la cui inv. è del quinto grado. Commemoraz. del. senat. prof. Eugenio Beltramo.

Loria, Gino, Guida allo studio della storia delle matematiche. (Manuali Hoepli.) — XVI + 228 pp. 8. L. 3: —; 1916.

Preparazione alle ricerche s. storia d. matemat.: Generalità. Il metodo storico. Rassegna d. principali opere s. storia d. matemat. La storia d. matemat. nella letteratura periodica. — Ausiliari nelle ricerche s. storia d. matemat.: Generalità. I manoscritti. Biografia e bibliografia relat. alle matemat. dei greci e dei latini. Cenni s. bibliografia relat. a. matemat. degli antichi popoli extra-europei. La biografia e le collezioni biograf. Altre fonti biograf. Le opere complete ed i carteggi scientifici. La bibliografia ed i cataloghi bibliogr. Recensioni e crit. di scritti matemat. Come utilizzare gli ausiliari preced. descritti. Indice.

Vivanti, Giulio, Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari (Manuali Hoepli). — XV + 398 pp. 8. L. 4: 50; 1916.

Funzioni analit. Equazioni diff. lin. Alc. proprietà dei determinanti. — Equaz. integrali: Definiz. fundament. Equaz. di Volterra. Equazioni di Fredholm: Sist. di funz. ortogonali, biortogon. e polari. Equaz. di Fredholm di sec. specie. Parametri e funz. param. Risoluz. dell'equaz. non omogenea quando λ è un param. Parametri,

nuclei iter., nucleo risolv. Nuclei simm. Altri nuclei spec. Applicaz. d. proprietà dei nuclei simm. alla teoria gen. Cenni s. equaz. di Fredholm di prima spec. Sist. d'equaz. di Fredholm di sec. spec. — Rapporti tra le equaz. int. e le equaz. diff. lin. autoaggiunte d. sec. ord. Alc. applicaz. alla fis. mat.

A.-Bol. Adolf Johanson & Co.

Stockholm.

PIRA, KARL, Om idésystem och talsystem. (Smärre Skrifter utg. af Boströmsförbundet. 38—40.) Del. 1—3. — 126 + 108 + 184 pp. 8. Kr. 1: 50, 1: 25, 2: —; 1913—14.

Några negat. o. posit. kritiker af Boströms lära om analogien mellan idésyst. o. talsyst. — Försök till en krit. exposition af det inre sammanhanget i Boströms lära om idésyst. — Öfversikt af de begrepp, gen. hvilkas analyserande probl. löses.

Gebrüder Knauer.

Frankfurt a. Main.

KLINGELHÖFFER, R., Der Fermat'sche Satz. — 28 pp. 8. M. 2: —.

LESSER, OSKAR, Die Entwicklung des Funktionsbegriffes und die Pflege des funktionalen Denkens im Mathematikunterricht unsrer höheren Schulen. Mit 21 math. Tafeln. 74 pp. 8. M. 1: 80; 1907.

PUSTAU, WILHELM, Lösung des grossen Fermatschen Satzes. 3:e Bearb. — 12 pp. 8. M. 2: —. 1914.

J. Lindauersche Universitäts Buchhandlung.

München.

Sammlung mathematischer Formeln, hrsg. von bayerischen Mathematiker-Verein. Ausg. A: Für Gymnasien, Realgymnasien u. Realschulen. 35 pp. 8. M. 0: 60; Ausg. B: Für Oberrealschulen. 52 pp. 8. M. 0: 80. 1915.

Planimetrie. Stereometrie. Trigonometrie. Mathemat. Geographie. Analyt. Geometrie. Algebra. Differentialrechn. Integralrechnung.

J. C. B. Mohr.

Tübingen.

KAUFMANN, AL., Theorie und Methoden der Statistik. Ein Lehr- u. Lesebuch für Studierende u. Praktiker. — XII + 540 pp. 8.; 1913.

Das Wesen u. d. Anwendungskreis d. statist. Methode. Das Gesetz. d. grossen Zahl. u. d. Wahrscheinlichkeitstheorie. Dispersion u. Stabilität d. statist. Reihen. D. statist. Schlussfolgerung. D. statist. Methode in ihr. Verhältnis zur Indukt. D. statist. Gesetzmässigkeit u. d. Freiheit d. individuel. Willens. — D. statist. Erhebung. D. Fehlerquellen d. stat. Erheb. u. d. Zuverlässigkeitsgrad ihrer Ergebn. Erhebungsplan, Programm, u. Organisat. d. stat. Erhebung. Zählungen u. Verzeichn. Nichterschöpfende Erhebungsmethoden. D. Aufbereitung d. stat. Urmaterials. D. Tab. Verhältniszahlen u. Mittelwerte. Graph. Darstellungsmethoden.

Librería de la Vda é Hijos de Murillo.

Madrid.

Toledo, Luis Octavio de, Elementos de aritmética universal. T. 1: Calculatoria, Terc. ed., corr. — 586 pp. 8. 17 pes.; 1909. T. 2: Coordinatoria. Determinantes. Algoritmos ilimitados. — 421 pp. 8. 14 pes.; 1916.

Toledo, Luis Octavio de, Introducción al estudio de las Funciones de variable compleja. (Estudios de analisis matematico. I.) — 210 pp. 8. 5 pes.; 1907.

Leonhard Simion Nf.

Berlin.

Schröder, Georg, Der grosse Fermat'sche Satz. Ein mathematisches Problem gelöst. — 62 pp. 4. M. 4: —; 1913.

Julius Springer.

Berlin.

Bortkiewicz, L. v., Die Iterationen. Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie. — XII + 205 pp. 8. M. 10: — geb.; 1917.

Die Massen. Die Gruppen. Die Sequenzen. Die Iterationen. — Die math. Erwart. u. d. mittlere Fehler. D. Bernouillische Theor. u. d. Gesetz d. grossen Zahlen. Reihenvergleich. — Die Zahlen d. Iterationen v. gegeb. Länge. D. Zahlen d. einreih. Iterationen v. gegeb. Länge. D. Zahlen d. vollst. Iterat. v. gegeb. Länge. Die mittl. Länge d. vollst. Iterat. Das V-Verfahren. D. Zahlen d. e. gegeb. Länge überschreitenden Iterationen. — D. Fall v. mehr als zwei Arten v. Elementen od. v. mehr als zwei Erfolgen (d. Roulettespiel). D. Fall verbund. Elemente (d. Zwillingsgeburten). — Stat. u. math. Ziffernreihen. D. Geborenen männlichen u. weibl. Geschlechts. — Marbes Naturphil. Untersuch. zur Wahrscheinlichkeitslehre». Marbes »Gleichförmigkeit in d. Welt».

Librería General de Victoriano Suárez.

Madrid.

Toledo, Luis Octavio de, Tratado de álgebra. T. 1: Parte elemental. Seg. ed. — XI + 362 pp. 8. 10 pes.; 1914.

Toledo, Luis Octavio de, Tratado de trigonometría rectilínea y esférica. Seg. ed. — 285 pp. 8. 8 pes.; 1914.

B. G. Teubner.

Leipzig & Berlin.

Abraham, M., Theorie der Elektrizität. Bd. 2: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. 3. Aufl. — X + 402 pp. 8. M. 11: — geb.; 1914.

Die physikal. u. math. Grundlagen d. Elektronentheorie. Die Wellenstrahlung einer bewegt. Punktladung. Die Mechanik d. Elektronen. — Ruhende Körper. Bewegte Körper. Mechanik d. Strahlungsdruckes. Relativitätstheorie.

Archimedis Opera Omnia cum commentariis Eutocii. Iterum edidit J. L. Heiberg. Vol. 3. (Bibliotheca scriptorum græcorum et romanorum Teubneriana.) — XCVIII + 448 pp. 8. M. 9: — geh.; M. 9: 60 geb.; 1915.

Prolegomena. Eutocii commentarii in libros de sphaera et cylindro, in dimensionem circuli, in libros de planorum aequilibriis. Scholia codicis A. Index.

Föppl, Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. In 6 Bdn. Bd 1: Einführung in die Mechanik, 5:e Aufl. — XVI + 431 pp. 8. M. 9: 20 geh.; M .10: — geb.; 1917.

Ursprung u. Ziel d. Mechanik. Mechan. d. materiellen Punktes: Begriff d. mat. Punktes. Das Trägheitsgesetz. Die Kräfte. Der freie Fall. Die dedukt. Ableit. d. Fallgesetze. Die gleichförmig verzög. Beweg. Dimensionen u. Mass-syst. Die ungleichförm. beschleunigte geradlin. Beweg. Arbeit u. lebend. Kraft. Antrieb u. Bewegungsgrösse. Krummlin. Beweg. d. math. Punktes. Das Prinzip d. Unabhängigkeit verschied. Bewegungen voneinand. u. d. Satz vom Kräfteparallelogramm. Der schiefe Wurf. Zentripetal- u. Zentrifugalkraft. Prinz. d. virtuellen Geschwindigkeiten. Momentensatz. Weit. Folgerungen aus d. Momentensatz. Beweg. auf vorgeschrieb. Bahn. Aufgab. — Mech. d. starr. Körpers: Begriff. d. starr. Körpers. Lehre v. d. Beweg. d. starr. Körpers. Gleichgew. d. Kräfte am starr. Körper. Notwend. u. hinreich. Gleichgewichtsbedingungen. Zusammensetzen d. Kräfte am starr. Körper. Hebel, Balken u. Platte. Aufgaben. Die Lehre v. Schwerpunkte: Der Schwerpunkt als Massenmittelpkt. D. Schwerpkt als Mittelpkt parall. Kräfte. Resultierende v. Zentrifugalkräften. Ermittel. d. Schwerpkts. Die Guldinsche Regel. Stabiles, labiles u. indiff. Gleichgew. Satz v. d. Beweg. d. Schwerpkts. Lebend. Kraft des starr. Körpers. Aufgab. — Energieumwandelungen:

Berechn. d. Schwungrades er. Dampfmaschine. Der Massendruck d. Dampfmaschinengestänges. Die Energieströme. Aufg. — Die Reibung: D. gleitende Reib. Reibungswinkel u. Reibungskegel. Reib. in Führungen. Reib. zwischen Zahnrädern. Zapfenreib. u. Reibungskreis. Reib. an Stützzapfen. Rollende Reib. Seilreibung. Seilsteifigkeit. Die Reib. an d. flachgäng. Schraube. D. Reib. an d. scharfgäng. Schraube. Aufg. — Elastizitätsgrad. Festigkeit stabförm. Körper. Biegung, Knickung u. Verwindung. Aufg. — D. gerade zentrale Stoss. Anw. auf Schlagwerke u. Rammen. D. ger. exzentrische Stoss. Stoss gegen ein. Körper m. fest. Drehachse. D. Mittelpkt d. Stosses. D. schiefe Stoss. D. Stoss gegen eine feste Wand. — Die Eigenschaften d. vollkomm. Flüssigkeit. Ausfluss aus Gefässen. Veränderlichkeit d. Druckes in em. Stromfaden. Besondere Fälle d. Ausflusses aus Gefässen. Ausflusszeiten. Druck es. Wasserstrahles geg. e. feste Wand. Die Reaktion d. Strahles. D. Stoss er. unbegrenzt. Flüssigkeit geg. e. ebene Fläche. Beweg. d. Wassers in Flüssen u. Kanälen. Die Staukurve. Das Gleichgew. schwimm. Körper. Formeln.

FRAENKEL, ADOLF, Ueber gewisse Teilbereiche und Erweiterungen von Ringen. — 64 pp. 8. M. 2:80 geh; 1916.

Einl. Ueber die Primringe zerlegbarer Ringe. Rationale Funkt. er. Variabeln m. Koeffiz. aus em. einfachen Ring. Ueb. die einf. Erweiterungen zerlegbarer Ringe.

GROSSMANN, MARCEL, Elemente der darstellenden Geometrie. Mit 134 Fig. (Teubners Leitfäden f. d. math. u. techn. Hochschulunterricht). — 84 pp. 8. M. 2:— kart.; 1917.

Einleit. Normalprojektion auf eine Ebene. Konjugierte Normalprojektionen. Körper m. ebenen Flächen. Einfache Körper m. krumm. Flächen.

GUTZMER, A., Die Tätigkeit des deutschen Unterausschusses der internationalen math. Unterrichtskommission 1908—1916. Bericht anlässlich der Fertigstellung d. »Abhandlungen». (Berichte u. Mitteilungen, veranlasst durch die IMUK, hrsg. von W. Lietzmann. 1. Folge. XII.) — 27 pp. 8; 1916.

KERST, B., Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. (Mathemat. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting. Bd 26.) — 47 pp. 8. M. 0:80; 1916.

LORENTZ, H. A., The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat. A course of lectures delivered in Columbia Univ., New York, in March and April 1906. Sec. ed. (B. G. Teubners Samml. v. Lehrbüchern. Bd 29.) — 343 pp. 8. M. 9 geh.; M. 10:— geb; 1916.

General principles. Theory of free electrons. Emission a. absorption of heat. Theory of the Zeeman-effect. Propagation of light in a body composed of molecules. Theory of the inverse Zeeman-effect. Optical phenomena in moving bodies. Notes.

LOREY, WILHELM, Das Studium der Mathematik an d. deutschen Universitäten seit Anfang d. 19. Jahrhunderts. Mit 13 Abb. u. 4 Taf. sowie em. Schluss-

wort zu Bd III von F. Klein. (Abhandl. üb. d. math. Unterricht in Deutschland, veranl. durch die IMUK, hrsg. von F. Klein, Bd 3; H. 9.) — XII + 431 pp. 8. M. 12:— geh.; M. 14:— geb.; 1916.

Allgem. üb. d. deut. Univ. Der überkomm. Zustand d. math. Unterrichts an d. Univ. zu Anf. d. 19. Jahrhunderts. Vergebl. Versuche er. planmäss. Neuorganisat. i. d. Jahren 1818—1848. Die Entwickl. d. math. Universitätsunterrichts bis z. Gründ. d. Deut. Reiches. Bes. Ausführungen z. Zeit vor 1870, mit Ausblicken auf d. Gegenwart. Die Zeit v. 1870—1890. Von d. Reichsgründ. bis z. Beginn d. Schulreformbeweg. Die neue Zeit 1890—1914.

Mehmke, Rudolf, Leitfaden zum graphischen Rechnen. Mit 121 Fig. u. er. Additions- u. Subtraktionskurve als Beil. (Sammlung math.-physikal. Lehrbücher, hrsg von E. Jahnke. 19.) — VIII + 152 pp. 8. M. 4:80 geh.; M. 5:40 geb.; 1917.

Einleit. Gewöhnl. Rechn. u. Auflösung von Gleichungen: Anwend. gewöhnl. Massstäbe. Anwend. logarithm. Mass-stäbe. — Geom. Eigenschaften d. logarithm. Bilder v. Funktionen. u. Gleichungen. — Integration u. Differentiat.: Anwend. gewöhnl. Massstäbe. Integrat. v. gewöhnl. Diff. Gleich. erster Ordn. Integrat. v. gew. Diff. Gl. höher. Ordn. — Anw. logarithm. Mass-stäbe.

Müller, Emil, Lerbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. 2. Bd, 2. Heft. Mit 188 Fig. — VII + 232 pp. 8. M. 8:40 geh.; 1916.

Schiefe od. schräge Achsonometrie. Schiefe Projektion. — Darstellung d. Raumelemente. Zeichnen perspektiver Bilder. Lösung d. Aufgaben üb. Massverhältnisse. Darstellung von Kurven u. Flächen. Sachreg. Namenverzeichnis.

Pringsheim, Alfred, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. Bd 1: Vorlesungen über Zahlenlehre (reelle und komplexe Zahlen, unendliche Algorithmen). Abt. 1: Reelle Zahlen und Zahlenfolgen. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern..., Bd 40: I, 1.) — XII + 292 pp. 8. M. 12:— geh., M. 13:40 geb.; 1916. — Abt. 2: Unendliche Reihen mit reellen Gliedern. (B. G. Teubners Samml. v. Lehrb... Bd 40: I, 2.) — VIII + 222 pp. 8. M. 10:80 geh., M. 12:40 geb.; 1916.

1. Die rational. Zahlen. Begrenzte u. unbegrenzte Systembrüche. Rat.-konv. Zahlenfolgen. Konverg. Zahlenfolgen, reelle Zahlen u. Grenzwerte reeller Zahlen. Potenzen m. belieb. Exponenten u. Logarithmen. Erweiterungen d. Grenzwertbegriffes. Null- u. Unendlichkeitstypen. Zweifach unendl. Zahlenfolgen.

2. Allg. Grundlagen. Reihen m. lauter positiv. Gliedern. Reihen m. posit. u. negat. Gliedern. Unendl. Doppelreihen m. reellen Gliedern.

Riebesell, P., Die mathematischen Grundlagen der Variations- u. Vererbungslehre. Mit d. Bildnis von Gregor Mendel u. 15 Abb. (Mathemat. Bibliothek, hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting. 24.) — 45 pp. 8. M. 0:80 kart.; 1916.

Die Stellung d. Variations- u. Vererbungswissenschaft im Syst. d. Naturwiss. Die wahrscheinlichkeitstheoret. Grundlagen. Die Anwend. d. Wahrscheinlichkeitsrechn. Die praktische Bestimm. d. Variationskurve. Abweich. v. d. norm. Variationskurve. Mehrere Veränderl. Die Abstammung. Die Mendelschen Regeln.

Rohrberg, Albert, Theorie und Praxis des Rechenschiebers. (Mathemat. Bibliothek, hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting. 23.) — 50 pp. 8. M. 0:80; 1916.

Anfert., Beschreib. eines Rechenschiebers. Bezieh. d. vier Skaalen zueinander. Die Multiplikat. Die Division. Vereinigte Multiplikat. u. Div. Die trigonom. Teilungen. Die gleichförm. geteilte Skala. Die logarithm. Skala d. Log. Rechenschieber m. gröss. Genauigkeit.

Stolz, Otto, & Gmeiner, J. A., Theoretische Arithmetik. II. Abteil.: Die Lehren von den reellen und von den komplexen Zahlen, 2:e Aufl. bearb. von Dr J. Anton Gmeiner. (3:e Aufl. d. Abschnitte V—VIII, X, XI, des I. und I, II, V des II. Teiles der Vorlesungen üb. Allgemeine Arithmetik von O. Stolz.) Mit 23 Fig. (Teubners Sammlung von Lehrbüchern... Bd IV, 2.) VIII + 369 pp. 8. M. 12: — geh.; M. 13: — geb.; 1915.

Stetige Systeme einer Dimension von absolut. u. v. relat. Grössen. Theorie d. Verhältnisse nach Euklid. Ableitung d. reellen Zahlen aus denselben. Arithmetische Theorie d. irrat. Zahlen nach G. Canter u. Ch. Méray. Die reellen Zahlen. Reelle Potenzen. Wurzeln. Logarithmen. Die unendl. Reihen mit reellen Gliedern. Analyt. Theorie d. komplex. Zahlen. Geometr. Theorie d. gemeinen komplex. Zahlen. Geometr. Bedeutung d. Quaternionen. Komplexe Potenzen, Wurzeln u. Logarithmen. Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern. Bericht. u. Nachträge.

Weber, H. Rudolf, & Gans, Richard, Repertorium der Physik. 1. Bd: Mechanik und Wärme. 1. T.: Mechanik, Elastizität, Hydrodynamik und Akustik, bearb. von Richard Gans und F. A. Schulze. Mit 126 Fig. — XII + 434 pp. 8. M 8: — geb.; 1915.

Mechan. diskret. Massenpunkte: Die Grundmasse u. -Begriffe d. Mechanik. Die Prinzipe d. Mechanik. Dynamik d. starr. Körpers. Gravitation. Festlegung eines Koordinatensystems. Erddrehung. Zentrifugalkraft. Reibung. Theorie d. Schwingungen. — Mechan. kontinuirlicher Medien: Kinematik u. allg. Dynam. deformierbarer Medien. Stat. Probl. d. Elastizitätstheorie. Dynam. Probl. d. Elastizitätstheorie. — Beweg.-gleich. u. allg. Sätze d. Hydrodynam. Feste Körper in Flüssigkeiten. Kinematik. Dynamik. Zweidimension. Probl. Wellen. Luftschwingungen. Flüssigkeitsreibung. Ebbe u. Flut. — Akustik: Schallausbreitung. Schallintensität. Verschied. Probl. d. Akustik. Gliederung d. Tonbereiches.

Wolff, Georg, Mathematik und Malerei. Mit 18 Fig. u. 35 Abbild. (Mathemat. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting. 20/21.) — 76 pp. 8. M. 1:60 kart.; 1916.

1. Das Kolorit. Die Luftperspektive. Die Linearperspekt. — Augenpunkt u. Horizont. Die Distanz. Künstlerische Freiheit. 2. Untersuchung v. Bildern mit Architekturdarstellungen. Idealfig. d. Porträtmalerei.

The United States Naval Observatory.

Washington.

U. S. Naval Observatory, Publications. Sec. ser., Vol. 9, p. 2. — Observations made with the nine-inch transit circle, 1903—1908, under the direct. of W. S. EICHELBERGER. — 759 pp. 4. 1915.

— —, Appendix to the Publications of the U. S. Naval Observatory, Sec. ser., Vol. 9. — Determination of the difference of longitude between Washington and Paris, 1913—1914, red. under the direct. of F. B. LITTELL and G. A. HILL. — 100 pp. 4; 1916

Carnegie Institution of Washington.

Washington.

LEHMER, DERRICK NORMAN, List of prime numbers from 1 to 10,006,721. (Carnegie Institution of Washington, Publicat. No. 165.) — XV + 133 pp. Fol.; 1914.

Smithsonian Institution.

Washington.

Reports, on wind tunnel experiments in aerodynamics, by J. C. HUNSAKER, E. BUCKINGHAM, H. E. ROSSELL, D. W. DOUGLAS, C. L. BRAND, & E. B. WILSON. (Smithsonian miscellan. collections, vol. 62: 4.) — 92 pp. 8; 1916.

Divers.

Festskrift, tillegnad ANDERS DONNER på hans sextioårsdag den 5 nov. 1914 af forne elever. — 410 pp. 4; 1915. (J. Simelii Arfvingars Boktryckeriaktiebolag, Helsingfors.)

I. BONSDORFF: A method to determine the astronom. flexure. R. FURUHJELM: Best. d. Eigenbeweg. d. Capellabegleiters. Ueber e. photograph. Aufnahme d. Koronaspektrums währ. d. Finsternis am 21. Aug. 1914. Jämförelse mellan stjärnposit. i Helsingfors Observ. fotograf. katalog och i Boss' »Prelim. Gen. Cat.» R. FURUHJELM & F. IVERSEN: Photograph. Positionsbest. d. Kometen 1911 V (Brooks). K. F. SUND-

MAN: Plan d'une machine destinée à donner l. perturb. d. planètes. HJ. TALLQVIST: De fysik. förklar. af aberrationen. R. WITTING: Sur l'éclat spectral de la cour. sol. int. le 21 août 1914. Om solbelysn. under förmörk. d. 21 aug. 1914. Om strålningen från olika delar af solskifvan. Zur Frage d. Verlaufs d. Polbeweg. Y. VÄISÄLÄ: On a method for calculat. observat. of zenith-distances of the Polaris.

HEFLICH, A., & MICHALSKI, S., Ratgeber für das Selbststudium (»Poradnik dla samouków»). Methodische Anweisungen für Studierende der Natur- u. der Geisteswissenschaften. Hrsg. mit Unterstützung aus dem Mianowskischen Fonds zur Förderung wissenschaftlicher Arbeit. Bd. 1—2. — 620 pp. 8. Warschau, 1915.

1. Vorw. v. S. MICHALSKI. Von der Wissenschaft. v. J. LUKASIEWICZ. Einl. v. Z. JANISZEWSKI. S. KWIETNIEWSKI: Mathematik, I & II. Stufe. Methodik d. math. Unterrichts. Z. JANISZEWSKI: Einl. S. KWIETNIEWSKI: Analyt., projekt. u. darst. Geometrie. W. SIERPINSKI: Arithmetik. Zahlentheorie. Alg. Mengenlehre. Funkt. reel. Veränderl. Diff.- u. int.-Rechnung. Differenzen u. Summenrechnung. S. ZAREMBA: Theorie d. analyt. Funkt. Z. JANISZEWSKI: Diff.- u. Int. Gleich. Reihenentwick. S. ZAREMBA: Part. Differentialgleich. Gruppentheorie. Variationsrechn. S. KWIETNIEWSKI: Differentialgeom. Z. JANISZEWSKI: Topologie. Grundl. d. Geom. S. MAZURKIEWICZ: Wahrscheinlichkeitsrechn. Z. JANISZEWSKI: Math. Logik Die phil. Probl. d. Math. S. KWIETNIEWSKI: Gesch. d. Math. . . .

2. Physik v. M. SMOLUCHOWSKI. Geophysik, v. M. RUDZKI. Meteorologie, v. R. MERECKI.

KUPPIS, JOSEF, Die Beweisführung des grossen Satzes Fermats. Mathematische Studie. 15 pp. 8; 1915 (Selbstverlag des Verfassers, Budapest).

MADSEN, V. H. O., Le service géodésique du Danemark 1816—1916. (Den Danske Gradmaaling, Ny Raekke, H. 16.) Avec 5 pl. et 3 portr. — 46 pp. 4; 1916. (Imprimerie Bianco Luno, Copenhague.)

Préf. Travaux sous la direction de H. G. Schumacher, C. C. G. Andræ, G. K. C. Zachariæ, V. H. O. Madsen. Biographies: H. C. Schumacher, C. C. G. Andræ, G. K. C. Zachariæ.

MORÁVEK, GOTTLIEB, Allgemeine Beweise der Gültigkeit des letzten Fermatschen Satzes. Mit einem Anhang über Pythagoräische Zahlen. — 18 pp. 8. M. 1: —; 1916. (Selbstverlag des Verfassers, Prag.)